图书在版编目(CIP)数据

数学美拾趣/易南轩著.—北京：科学出版社,2002
(生活与科学文库)
ISBN 7-03-009985-0

Ⅰ.数… Ⅱ.易… Ⅲ.数学：美学-普及读物 Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 096882 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

定价：13.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

由于种种原因，致使一个非“科班出身”、又是“半路出家”、同时已是“不惑之年”且离开书本已有20年的我，才开始了中学数学教学，从事这“太阳底下最光辉的职业”，起始确实是勉为其难的。然而，当我踏上这三尺讲台，开始了“粉笔生涯”后，便感到这是一个可以延伸的广阔的大舞台。当我进入到早在中、小学时便感兴趣的数学园地而发现了一座长着奇花异草的数学大花园时，一种欣喜之情，一种无怨无悔之情油然而生！

常年与青少年为伍，使我具有年轻人的心态；每晚直至午夜的苦读与钻研，使我进入到一个自由的思维王国。在教学与钻研中，我发现数学几乎与所有美的事物都有着联系。我为数学和谐、统一的美而赞叹！为数学简单而奇异的美而倾倒！这种强烈的审美冲动，促使我对数学美和数学美育功能进行

探索和研究。在这过程中，除发表了有关数学美的近10篇论文外，其余的点滴记录，便集成了这本《数学美拾趣》的小册子。其中每一篇文章都是阐述某一个事物与数学的联系，并从中体现出一种数学美，尽管阐述是那样的粗浅、不成熟，但毕竟是一个心愿完成的记录。即使是这样，每一篇文章的完成还是参考了不少的资料，整个小册子的完成参考了大量的书刊杂志，由此可知完成一件事的不易。限于篇幅，所有的参考资料无法一一列出，故而书末只列出了几本主要参考书目。在此，向其余的作者致以谢意。《数学美拾趣》这本小册子所记录的只是"数学美"海洋中的点滴水珠，但愿这些水珠能滋润青少年的心田，能让数学爱好者更加热爱数学，如能达此目的，便算是实现了作者的初衷。

本书初稿的打印、校对，得到了我的两位年轻的同事——张圣义、王坤老师的大力帮助，是他们牺牲了数月的业余时间、付出了辛勤劳动才得以完成的，在此，向他们表示深切的谢意。

易南轩

2001年8月于北京

目 录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook

一、导言

爱美之心，人皆有之，人们执著地追求美。但什么是美？却只能意会，不能言传。然而当我们聆听一首优美的音乐，观看一幅精美的图画，或置身于幽雅的大自然中，我们便会全身心地感到愉悦，受到一种美的陶冶。

可是，除了艺术的美、大自然的美外，人们是否想到科学也有美，数学也有美呢？有不少中小学生认为学习数学很艰苦、枯燥无味，不存在什么美感的问题。只是为了考试，为了升学而不得不学习数学。

数学果真无美感可言吗？否。古今中外有许多知名学者都认为数学是美的，并作过精辟的论述。

古希腊学者毕达哥拉斯说："美就是和谐，整个天体是一种和谐，宇宙的和谐是由数组成的，因而构成了整个宇宙的美。"提出了数的美的三段论。

英国哲学家、数学家罗素认为："数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也具有至高的美，是一种冷而严肃的美。这种美不是投合我们天性脆弱的方面，这种美没有绘画或者音乐那样华丽的装饰，它可以纯

净到崇高的地步，能够达到只有伟大的艺术才能谱写的那种完满的境地。”这就道出了美的特殊性。

英国数学家怀特海说：“作为人类精神最原始的创造，只有音乐堪与数学媲美。只有取得过数学财富的少数人，才能尝到数学的‘特殊乐趣’。”这似乎说数学是“阳春白雪，和者盖寡”。

而另一数学家哈代的看法要实在些：“现在也许难以找到一个受过教育的人对数学美的魅力全然无动于衷，实际上，没有什么比数学更为‘普及’的科学了。大多数人能欣赏一点数学，正如同多数人能欣赏一支令人愉快的曲调一样。”即数学也有它“下里巴人”的一面。

外国的学者如是说，那么中国的学者对数学的看法又如何呢？

香港旅美数学家、菲尔兹奖获得者丘成桐说：“数学家找寻美的境界，讲求简单的定律，解决实际问题，而这些因素都永远不会远离世界。”即数学有取之不尽的源泉。

我国现代著名数学家徐利治教授提出：“所谓数学美的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构系统的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性和普遍性，还有数学中的奇异性等，都是数学美的具体内容。”徐利治指出了数学美的具体含义。其实，数学美并非“阳春白雪，曲高和寡”。当我们悟出了一个出色的数学公式，当我们用巧妙的方法解答出一道数学难题时，我们心中不也充满了一种成功的喜悦吗？我们在学习数学时，当看到一个优美对称的图形，一个代数轮换对称式，不也为这些图形和算式的对

称协调而赏心悦目,充满一种美感吗?

当我们遇到一道数学证明题,它的条件式和求证式都具有对称的形式,而正是由于这种对称美的启示,促使我们采取一种“对称”的手段,而使问题简捷地获证。蓦然回首,我们不也像欣赏一首优美的音乐一样充满了愉悦之情吗? 当然,从数学上得到的满足与对音乐的欣赏相比,需要有更高的数学素养。

如今,数学已成为研究自然科学和社会科学的基础科学。它已渗透到包括文学、音乐、美术、建筑等各个领域之中,在科学技术生产生活等方面也都有数学的用武之地。难怪20世纪最伟大的数学家希尔伯特把数学比喻为“一座鲜花盛开的园林”。他鼓励我们去寻幽探胜,去向人们介绍这些奇景秀色,去共同赞美它!

笔者面对“数学美”这浩瀚的海洋,虽难以在这海洋中遨游,但偶涉浅滩,在海滩上拾到了一些精美的贝壳。现将这些贝壳连成小串献给我的同仁们,以期通过我们——数学教师的共同努力,让青少年学生对这些小小贝壳,能从艺术和思维的角度来鉴赏,首先感受到“数学美”,并使他们在美的熏陶下,得到感情的共鸣和思维的启迪,以极大的热情去学习数学、掌握数学、运用数学。

二、黄金分割

1.美妙的黄金分割

公元前500年，古希腊学者发现了“黄金”长方形，即长方形的长和宽之比为1.618最佳(即看起来令人赏心悦目)，这个比叫做黄金分割比。1.618的倒数的近似值即为0.618，这个数被称为黄金分割数，1.618这个比例值于1854年由德国的美学家蔡辛正式定为“黄金分割律”。

这个美妙的比例实质上是将一条单位长的线段分成两段，使$\frac{全段}{大段}=\frac{大段}{小段}$，这就是众所周知的分线段为中外比。

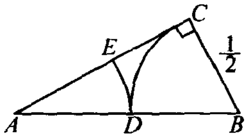

图2-1

设大线段长为x，则小线段长为$1-x$，于是有$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$，解得$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，取其正值$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

中外比(黄金分割比)的作图并不难,如图 2-1,只需取一个直角三角形,它的两条直角边分别为 1 与$\frac{1}{2}$,则斜边为$\frac{\sqrt{5}}{2}$,再将它减去$\frac{1}{2}$的直角边长,得 AD,然后在 AC 上取 $AE=AD$,则点 E 分线段 AC 为中外比(黄金分割比)。

2. 建筑丰碑与“黄金比”

人类对“黄金分割比”(简称“黄金比”)的应用,可上溯到 4600 年前埃及建成的最大的胡夫金字塔,该塔高 146 米,底部正方形边长为 232 米(经多年风蚀后,现在高 137 米,边长 227 米),两者之比为 $0.629\approx5:8$;在 2400 年前,古希腊在雅典城南部卫城山岗上修建的供奉庇护神雅典娜的巴特农神殿,其正立面的长与宽之比为黄金比;于 1976 年竣工的加拿大多伦多电视塔,塔高 553.3 米,而其七层的工作厅建于 340 米的半空,其比为

$$340:553\approx0.615\approx8:13$$

无独有偶,这三座具有历史意义的不同时期的建筑,却不约而同地用到了黄金比,这也许是由于黄金分割比具有非常悦目的美,能使建筑物看来和谐、协调之故吧!

3. 人体也有黄金分割点

意大利数学家菲披斯曾注意到数学界不屑一顾的“冷门”——人体的黄金分割。他说一般人在人体肚脐上下的长度比值为 0.618:1 或者与此相近,这是人体上下结构的最优数字。此外,他发现人体结构还有三

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

个黄金分割点，上肢的分割点在肘关节，肚脐以下部分的分割点在膝盖，肚脐以上部分的分割点在咽喉。如果一个人各部分的结构比都符合黄金分割律，便是最标准的体型。这一发现为评价体型优劣提供了科学依据。

4. 随处可见的黄金分割比

在现代，黄金矩形的造型已深入到家家户户，如写字台的桌面，墙上的挂历、信封，过滤嘴烟盒，单卡收录机，图书室的目录卡……等等，几乎都是黄金矩形，这说明人们对黄金矩形的偏爱。

在自然界，树的一枝上各叶片按螺旋形上升的距离刚好按黄金比排列，因为这种排列叶片的受光效果最好。从而可启发建筑师设计出使房间接受阳光最充足的新颖高楼大厦。据说有经验的报幕员，不是站在舞台的正中报幕，而是在舞台左边或右边的三分之一处（接近黄金分割点）报幕，这样可取得最佳剧场效果。

这“神奇的黄金分割律”为什么能使得艺术家和数学家都对它“情有独钟”呢？其魅力究竟何在呢？古希腊哲学家、数学家柏拉图说：“美就是恰当。”法国哲学家、数学家笛卡儿说：“美是一种恰到好处的协调和适中。”先哲们的说法，也许就是恰当的解释。

三、数学中的黄金分割美

1. 五角星图形

我国的国旗、国徽、军旗、军徽都采用了五角星图案(一些其他国家也是如此)。而发现黄金矩形的毕达哥拉斯学派的会徽也是一个五角形,每个会员都佩带一个五角星标记的徽章。为什么五角星成为众多民族喜爱的图形? 正五角星图形到底具有哪些美感呢?

五角星的形成来自于大自然(如五角星形花瓣),它也和大自然一样,既有美妙的对称也有扣人心弦的变化。

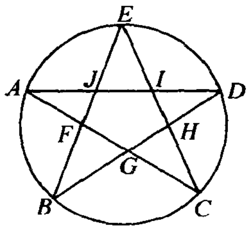

图 3-1

将圆周分成五等分,依次隔一个分点相连,则可一笔画成一个图形,即成一个正五角星形(如图 3-1)。首先,在连接的过程中就让人惊异于形成图形的奇妙(奇异的美);而连成的图形又具有如此明显的对称性(对称的

美)！五角星美的核心是五条边相互分割成黄金比(如图中 F、G 是 AC 的黄金分割点)这是一种最匀称的比,是给人产生美的原动力。因此,五角星形具有如此巨大的魅力,成为世人所喜爱的图形。

2.黄金图形

请看下面的几种黄金图形。

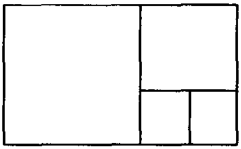

图 3-2

黄金矩形:宽与长之比为黄金数的矩形。对黄金矩形依次舍去所做的正方形,可得到不断缩小的黄金矩形序列。(如图 3-2)

黄金三角形:分两类,第一类是底与腰之比为黄金数的三角形,如图 3-3 中的△ABC,△BCD,△DEC,……组成不断缩小的三角形序列;第二类是腰与底之比是黄金数的三角形,如图 3-4 中的△ABC,△DAB,△EBD,……也组成不断缩小的黄金三角形序列,前述的埃及胡夫金字塔,其正投影即为此类黄金三角形。

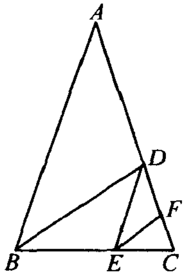

图 3-3

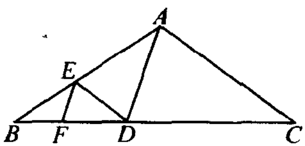

图 3-4

黄金椭圆:短轴与长轴之比为黄金数的椭圆(如图

3-5)。它的面积与以它的焦距为直径的圆的面积相等；它的离心率的平方也是黄金数。

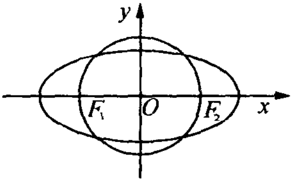

图 3-5

黄金双曲线：实半轴与半焦距之比为黄金数的双曲线（如图 3-6）。它的离心率的倒数也是黄金数。

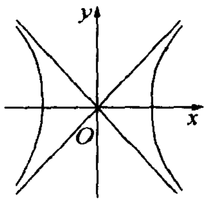

图 3-6

这些黄金图形使人看起来赏心悦目，是同类图形中最和谐、优美的图形。

3. 将黄金数表示为连分数

由线段的黄金比 $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$，有 $x^2=1-x$，$x(1+x)=1$，得 $x=\frac{1}{1+x}$。

对等式右边分母中的 x 又以 $\frac{1}{1+x}$ 代替，可得 $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$；依次类推，可得连分数：$x=$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}。$$

这样一个简洁的连分数给人以有序而无穷的印象，使人具有不言而喻的美感，黄金数与连分数之间竟有如此迷人的联系，怎不让人惊叹！

4. 菲波那契数列

13世纪意大利数学家菲波那契在他的《算盘经》的修订版中增加了一道著名的兔子繁殖问题，为黄金分割大放异彩。

问题是一对兔子每一个月可以生一对小兔，那么，从刚出生的一对小兔算起，满一年可以繁殖多少对兔子？

则由第一个月到第十二个月兔子的对数分别是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，这个数列称为菲波那契数列。这个数列的一个特点是从第3项起，每一项等于它的前两项之和：

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

其通项公式为

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

奇妙的是公式中含有无理数$\sqrt{5}$，而 n 用自然数代入时，所得的结果却都是整数；另一出人意料的是，相邻两项的比$\frac{F_n}{F_{n-1}}$，当 n 趋于无穷大时，它的极限恰好是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

菲波那契数列具有特殊、神秘的魅力。难怪近年国外出版了一种《菲波那契数列》杂志，专门发表有关这个数列的新发现和新用途的文章，使得菲波那契数列的研究长盛不衰，生生不息。

四、圆周率记趣

圆周率就是圆的周长与直径之比,1706年英国数学家琼斯提出用希腊字母“π”来表示圆周率。现在小学生们都知道 $\pi \approx 3.14159$。在中学数学计算中,只需用3.14表示π就够了。迄今人们用电子计算机已把π算到小数点后几亿位,为什么人们要作如此的追求呢?一位德国数学家曾指出:“圆周率的精确度可以作为衡量一个国家数学水平的标志。”这种说法虽然未免有些夸张,但人们对圆周率精确度的追求正是一种智力探索的激励,是人们锲而不舍精神的追求,是一种博大的奋斗之美,也是一种对计算机技术发展的促进。

1.人类追求“π”值精确度的旅程

我国三国时魏国人刘徽利用“割圆术”算出 $3.141024 < \pi < 3.142709$,后人称3.14为“徽率”;南北朝时南朝人祖冲之于公元460年求得:$3.1415926 < \pi < 3.1415927$,后人称3.141592为“祖率”;事隔1000多年后,法国数学家韦达才于1579年求得π值为3.1415926535897932З。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook