常微分方程数值解

李大侃　编

浙江大学出版社

常微分方程数值解

李大侃　编

浙江大学出版社

(浙)新登字10号

内 容 简 介

本书为"常微分方程数值解"课程的教材.主要内容有:求解常微分方程初值问题数值解的单步方法、线性多步方法、刚性方程组及其求解的数值方法,并对提高精度的外推算法作了较深入的论述,最后介绍了几种常微分方程边值问题求解的实用方法.

本书的编写由浅入深,注意基本概念、基本理论的阐述,同时注意实际计算能力的培养.全书各章后均配有相应的习题和上机实习题目.

本书可作为理工科院校数学系本科生教材,也可作为工科研究生的教材或参考书,也可供从事电子计算机科学计算的科技人员参考.

常微分方程数值解
李大侃 编
责任编辑 贾吉柱 王其良
* * *
浙江大学出版社出版
浙江大学出版社计算机中心电脑排版
杭州富阳何云印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
* * *
850×1168 32开 6印张 150千字
1994年5月第1版 1994年5月第1次印刷
印数 0001—1500
ISBN 7-308-01308-1/O·157 定价:3.00元

前　言

本教材用作理工科院校数学系本科高年级学生学习"常微分方程数值解"课程的教材，又可作为工科研究生学习该门课程的教材或参考书，也可供从事电子计算机科学计算的科技人员参考.

本书包含求解常微分方程初值问题数值解的单步方法、线性多步方法、刚性方程组及其求解的数值方法；并对提高精度的外推算法作了较深入的论述；最后介绍了几种常微分方程边值问题求解的实用方法.

为了便于教学，编写时力求由浅入深，注意基本概念、基本理论的论述，同时注意实际计算能力的培养. 全书各章后均配有相应的习题和上机实习题目.

浙江大学数学系蒋叔豪副教授、易大义教授对本书提出不少宝贵意见和建议，蒋叔豪副教授还阅读了原稿，在此表示衷心的感谢.

限于水平，书中的缺点和不当之处一定不少，恳请读者批评指正.

编　者

1992 年 9 月

目　录

第一章　绪　论

第二章　预备知识

第三章　解常微分方程初值问题的单步法

第四章　解常微分方程初值问题的线性多步方法

第五章 一阶常微分方程组与刚性问题的数值方法

第六章 加速收敛的外推算法及其对常微分方程初值问题的应用

第七章　常微分方程边值问题的数值解

第一章　绪　论

§1　引　言

在科学技术领域中有许多问题可以归结为一类常微分方程的定解问题. 在《常微分方程》课程中,我们已经对一些典型的微分方程找到了几种求解析解的方法. 当求得某个方程的解析解时,就可以代入初始条件或边界条件将其中的任意常数定下来,从而求得特定解问题的解.

然而,在生产实际和科学研究中所遇到的微分方程往往很复杂,至今有许多类型的微分方程尚不能给出解的解析表达式. 有时候对有些微分方程即使能求出解析解,也往往因计算量太大而不实用.

例如　初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 2xy & x \in (0,T) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

如果要在许多 x 值上计算 $y(x)$ 的值,则要通过数值积分,化费巨大的工作量. 又如,线性常微分方程的求解需要求出相应的特征方程的根,这需要求解高次代数方程,这也是不易做到的,所以照这样的方法求解是极困难的.

根据以上分析,可以看到用求解析解的方法来计算微分方程的解不是普遍适用的,有时甚至是难以办到的. 另一方面,实际问题的研究,往往并不要求出微分方程解的解析表达式,只要得到解在某些

离散点上满足给定精度的近似值，或者得到解的近似表达式. 综上所述，需要研究求解微分方程的数值方法，也就是要求出微分方程定解问题的数值解.

§2 构造数值方法的几种基本方法

我们将以一阶常微分方程初值问题为例来说明什么是数值方法，以及构造数值方法的几种基本思想和途径.

2.1 离散化

设初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \qquad x \in (a,b], & (1.1) \\ y(a) = y_0 & (1.2) \end{cases}$$

在定解区域上解 $y(x)$ 存在唯一.

因为问题(1.1)，(1.2)的解 $y(x)$ 是$[a,b]$区间上关于连续变量 x 的连续函数，所以问题(1.1)，(1.2)，是一个连续性问题. 求初值问题(1.1)，(1.2)的数值解的问题就是要在区间$[a,b]$上的若干个离散点

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

的一个集合上计算初值问题(1.1)，(1.2)的解 $y(x)$ 的近似数值

$$\{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$$

这种初值问题(1.1)，(1.2)的解 $y(x)$ 在离散点集$\{x_n\}$，$(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$上的近似值$\{y_n\}$，$(n = 0, 1, 2\cdots, N)$，称为初值问题(1.1)，(1.2)的一个数值解. 计算数值解$\{y_n\}$，$(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$，的方法称为求解(1.1)，(1.2)的一个数值方法.

数值方法的实质是微分方程的解 $y(x)$ 被它在一列离散点集$\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$上的值$\{y_n\}$近似代替. 这些离散点 x_n，$(n = 0, 1, 2\cdots, N)$ 叫作节点. 为方便计我们往往假设这些点 $x_n(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$ 是等距的，并且写作

$$x_n = a + nh, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

其中量 h 是相邻两个节点之间的距离，称 h 为步长，终点是 $x_N = b$，也就是区间的端点.

建立一个数值方法时需要把连续性问题(1.1)，(1.2)，通过一定的方法建立一个相应的离散化的问题，使得在 $N+1$ 个给定点 x_n($n = 0,1,2,\cdots N$)，上这个离散问题的解 y_n，($n = 0,1,2,\cdots,N$)，能够近似连续性问题的解 $y(x_n)$. 我们称这个过程为"离散化".

下面介绍几种常用的离散化方法.

2.2　用差商代替微商

在问题(1.1)，(1.2) 中如果点 x_n 处的微商 $y'(x_n)$ 用点 x_n 处的差商近似代替，即

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \qquad (n = 0,1,2\cdots,N) \tag{1.3}$$

这里，$x_{n+1} = x_n + h$.

将(1.3) 式代入到(1.1)，(1.2) 中得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n)$$

再注意到 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ 得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)). (n = 0,1,2,\cdots,N)$$

于是我们可以构造出下面的一个离散化问题

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

来近似代替连续性问题(1.1)，(1.2). 称(1.4) 为差分方程的初值问题，也称离散化初值问题.

设离散化初值问题(1.4) 的解为 y_n，($n = 0,1,2,\cdots,N$)，那么，y_n($n = 0,1,2,\cdots,N$) 就是连续性问题(1.1)，(1.2) 的一个数值解.

用差商代替微商是微分方程离散化的一种基本方法.

2.3　Taylor 展开法

设 $y(x)$ 是方程　$y'(x) = f(x,y)$ 的一个解，且函数 $f(x,y)$ 在区间$[a,b]$ 上至少 p 次可微，则可利用 Taylor 展开公式将(1.1) 式离散化. 具体做法是这样的：

设 $y(x+h)$ 在点 x 处的 Taylor 展开式为

$$y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x)+O(h^{p+1})$$

注意到 $y(x)$ 满足(1.1)式，得到

$$y'(x)=f(x,y)$$

$$y''(x)=f^{(1)}(x,y)=f_x+f_yf$$

$$\vdots$$

$$y^{(p)}(x)=f^{(p-1)}(x,y)$$

于是有

$$y(x+h)=y(x)+hf(x,y)+\frac{h^2}{2}f'(x,y)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x,y)+O(h^{p+1})$$

如果用 y_{n+1} 和 y_n 分别代替上式中的 $y(x+h)$ 和 $y(x)$ 并舍去 $O(h^{p+1})$ 我们就得到一个数值公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}f'(x_n,y_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n,y_n) \tag{1.5}$$

(1.5)是问题(1.1)的离散化数值公式.

数值公式(1.5)连同初始条件(1.2)求得的解 y_n,($n=0,1,2,\cdots,N$)是连续问题(1.1),(1.2)的一个数值解.利用 Taylor 展开式可构造高精度的数值公式.

2.4 数值积分法

微分方程(1.1)在区间$[x_n,x_{n+1}]$上改写为积分方程的形式为

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f[x,y(x)]dx$$

$$(n=0,1,2,\cdots,N)$$

再将右边积分利用数值积分公式计算其近似值.例如利用梯形公式计算右边积分的近似值可得

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

用 y_{n+1},y_n 分别代替上式中的 $y(x_{n+1})$,$y(x_n)$,并令

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \tag{1.6}$$

这样，公式(1.6)，(1.2)构成了连续性问题(1.1)，(1.2)的一个离散化表达式．相应地，(1.6)，(1.2)的解 $y_n(n = 0,1,2,\cdots,N)$ 是(1.1)，(1.2)的一个数值解．

2.5 待定常数法

下面我们介绍用待定常数法来构造一个插值形的数值公式

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{i+j} \tag{1.7}$$

作为问题(1.1)，(1.2)的一个离散化表达式．这里 $\alpha_j, \beta_j, (j = 0,1,2,\cdots,k)$ 是待定常数．具体做法如下：

首先，确定一个正整数 k，写出公式

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{i+j}$$

其中 $\alpha_j, \beta_j, j = 0,1,2,\cdots,k$ 为待定常数，且满足

$$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0.$$

定义算符

$$L[y(x), h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)]$$

并且假设 $y(x)$ 于$[a,b]$区间 q 阶可导．将上面算符中右端的函数 $y(x + jh)$ 和 $y'(x + jh)$ 在 x 点处展开成 Taylor 级数，然后按 h 的同次幂合并，记

$$L[y(x), h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \cdots$$

由 Taylor 公式易知上式中的系数 $C_0, C_1, \cdots, C_q$ 满足下面关系式：

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \\ C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) \\ \vdots \\ C_q = \dfrac{1}{q-!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k) - \dfrac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 \\ \quad + \cdots + k^{q-1}\beta_k). \qquad q = 2,3,\cdots. \end{cases}$$

当取 $q \leqslant 2k$ 时，若令

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = \cdots = C_q = 0 \\ C_{q+1} \neq 0 \end{cases}$$

即可确定待定的常数 α_j 和 $\beta_j, j = 1,2,\cdots,k$.

这时

$$L[y(x),h] = C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(x) + O(h^{q+2}).$$

当 $y(x)$ 满足(1.1)式时

$$\begin{aligned} L[y(x),h] &= \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j f(x+jh, y(x+jh))] \\ &= C_{q+1}h^{q+1}y^{(q+1)}(x) + O(h^{q+2}). \end{aligned}$$

如果舍去上式的右端，并用 x_i 代替 x，y_{i+j} 代替 $y(x+jh)$，$j = 0,1,2,\cdots,k$. 记 $f_j = f(x_j, y_j)$ 则得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{i+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{i+j}$$

就是(1.7)式.

(1.7)，(1.2)式构成了连续性问题(1.1)，(1.2)的一个离散化表达式.

解微分方程的数值方法是一种把连续问题进行离散化的方法，它也称为离散变量方法. 这种方法的最大优点是可以普遍应用，只要(1.1)式的右端函数 $f(x,y)$ 是可计算的，就能应用离散化方法，而且只要对函数 $f(x,y)$ 进行多次计算就能保证离散化误差充分小，因此数值方法是自动计算中广泛采用的有效方法.

§3 解常微分方程的数值方法主要研究的问题

常微分方程的数值方法主要研究的问题有以下几个方面：

1. 数值方法的构造问题. 如上节所述，这个问题就是通过某个

途径构造一个离散化方程(例如差分方程)去逼近连续性方程的问题.构造数值方法的几个基本途径和方法我们已在上节中介绍过了.

2. 相容性问题.通过某种方法所构造出的离散化方程当步长 h 趋于零时,能否逼近连续性方程的问题.如果离散化方程能趋于连续性方程,则称这个数值方法是相容的,否则是不相容的,当然不相容的数值方法是不能使用的.

3. 数值解的收敛性问题.由离散化方程的解 $\{y_n\}, n=0,1,2,\cdots,N$,能否收敛到连续性方程的解 $y(x)$ 的问题.也就是说由数值方法得到的数值解能否近似代替原连续方程的解.

4. 数值解法的稳定性问题.所谓稳定性问题是指初始数据的误差和计算过程中产生的误差的积累和传播是否受到控制,也就是说计算结果对误差不敏感的方法是稳定的方法,反之是不稳定的.

5. 误差估计问题.这个问题是指离散化方程的解对连续方程的解的收敛阶问题,也就是方法的精度问题.

以上这五个方面是数值方法所必须研究的问题,每提出一种方法均应保证它的相容性、收敛性、稳定性以及尽可能高的精度.

第二章　预备知识

在微分方程数值解的理论和方法的研究中，数值逼近、数值代数等方面的知识起着基础性的作用．为了以后使用方便，我们将有关的内容做一些介绍，对定理只给出叙述，而不作证明．

§1　代数插值

1.1　插值方法

插值法是一种古老的数学方法，随着电子计算机的广泛使用，插值方法在数值分析的许多分支（例如数值积分、数值微分、微分方程数值解等等）中均有应用．下面我们仅以近似计算函数值为例来说明插值方法．

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

及 $\bar{x}\neq x_i$，$(i=0,1,2,\cdots,n)$，问应如何估计值 $\bar{y}=f(\bar{x})$．对于函数关系 $y=f(x)$，我们所知道的仅仅是上述的表列值．表列值是间接求得的，例如是由实验（观察）得来的．为了估计值 $\bar{y}$，我们可以使用插值方法．插值方法的目的是寻求一个简单的连续函数 $\varphi(x)$，使它在 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处取给定值 $\varphi(x_i)=y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，而在别处希望它能近似地代表函数 $f(x)$．因为 $\varphi(x)$ 已是有解析表达式的简单函数，所以它在 $x=\bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来．这样我们就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的近似值了．

给定点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 叫插值节点，函数 $\varphi(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的插值函数，而 $y=f(x)$ 叫被插函数．

严格地讲，"插值方法"一词只用于 $\bar{x}$ 落在给定点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之间的情形，所以也称插值方法为"内插法". 如果 $\bar{x}$ 落在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之外，并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的值近似地代替 $f(\bar{x})$，则一般称这种近似计算函数值的方法为"外插法".

当插值函数 $\varphi(x)$ 是 x 的多项式时称此种插值方法为多项式插值；当 $\varphi(x)$ 为分段多项式时称此种插值为分段多项式插值；当 $\varphi(x)$ 为三角多项式时，则相应的插值为三角插值.

用多项式作为插值函数，不仅因为它最简单，而且用多项式作插值函数可以使我们满意地解决一系列有实际应用价值的重要课题.

1.2 Lagrange 和 Newton 插值多项式

Lagrange 插值多项式

设 $y=f(x)$ 是实变量 x 的单值函数，已知 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同的点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值分别为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，即 $y_i=f(x_i)$，$i=0,1,2,\cdots,n$. 那么下面的定理成立.

定理 2.1 存在唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2,\cdots,n).$$

定理 2.1 中的 n 次插值多项式 $P_n(x)$ 可表示为

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x) \tag{2.1}$$

其中

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i=0,1,2,\cdots,n)$$

称 $l_i(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数，它满足条件

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

$$(i,j=0,1,2,\cdots,n).$$

显然有

$$P_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x_j)=y_jl_j(x_j)=y_j$$