职工高等工业专科学校试用教材

高等数学

主　编　白富志
副主编　孟昭凤　严基宏

机械工业出版社

职工高等工业专科学校试用教材

高　等　数　学

主　编：白富志

副主编：孟昭凤　严基宏

编　委：（以姓氏笔划为序）

王天光　方氏强　白富志

李俊英　孟昭凤　严基宏

周志燕　高　杰　曹光华

梁家君

主　审：张贵恩　孙旷舞

机械工业出版社

(京)新登字 054 号

本书是根据国家教委 1992 年 18 号文件精神编写的，体现了高等职业技术教育特色和不同专业部门需要的特色。内容主要有函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线曲面积分、级数、微分方程等。在每一章节后都配有习题。本书内容深入浅出、通俗易懂，便于自学。本书为职工高校机电类及其它专业教材，也可供工程技术人员参考。

高等数学

主编　白富志

责任编辑：王世刚　版式设计：李松山

封面设计：张 [illegible]　责任校对：丁丽丽

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码 100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

保定冀成印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16・印张 25.25・字数 630 千字

1994 年 8 月北京第 1 版・1994 年 8 月保定第 1 次印刷

印数 00 001—3800 定价：20.60元

*

ISBN 7-111-04255-7/O・95（G）

序

随着机电一体化技术与产品在世界范围内的兴起与发展，教育必须紧紧跟上形势及经济发展的需要。1990 年 4 月我会受原机械电子工业部教育司委托，组织了全国部分成人高等学校的专家、教授在天津编写了“机电一体化”等专业指导性教学文件，对本专业的研究与发展起了一定的推动和示范作用。编写组的这项工作获得 1991 年全国学会工作成果奖。

1992 年我会机械制造专业委员会桂林年会建议编写“机电一体化”成套教材，以解决本专业当前教学急需。经过一年多的工作，重新编写了“机电一体化”专业教学计划（分为应用型和技艺型两类）及各科教学大纲，并在部分职工高校试用。在此同时，着手组织编写教材及出版工作。鉴于这套教材进程以及工作上的方便，自 1993 年 5 月济南会议起，由学会秘书处统一组织工作，并委托我会学术委员会具体负责本次编辑出版的协调和实施工作。

这套教材以我会学术委员会、机械制造专业委员会、工程材料专业委员会、技术基础课委员会、基础学科委员会为主，集中我会全国学术骨干力量，在三年内分两批出齐。第一批共计出版：①工程材料与金属工艺学；②金属切削机床与数控机床；③伺服系统与机床电气控制；④机械制造工艺与机床夹具；⑤计算机绘图；⑥微机与可编程控制器；⑦数控原理与编程；⑧电子技术；⑨8098 单片机原理与应用；⑩高等数学；⑪工程数学；⑫工程力学等十二种教材。其余教材将于第二批出版，以供全国职工高校试用。

中国机械工程学会
职工高等教育专业学会
1994 年 1 月

前　言

为适应我国高等职业技术教育的蓬勃发展,加强教材的配套与建设，我们受中国机械工程学会职工高等教育学会的委托，根据国家教委 1992 年 18 号文件的精神，按照基础课和专业基础课，以应用为目的，以必需、够用为度，既体现高等职业技术教育的特色，又体现不同产业部门需要的特色，按照应用型和技艺型两类课程设置要求，编写了本教材。

在编写中，尽量考虑高等职业技术教育特点，力求使教材结构紧凑、语言简练，对于必要的基本理论、基本方法和基本技能，力求阐述详细、深入浅出、通俗易懂，便于自学。编写中注重了引例及习题尽量与专业实践密切结合；为增强教材对不同专业的适应性，在内容编排上尽量作到有一定弹性，有些章节用 * 号标出，可供选择。我们期望本书对职工高校的高等数学教学有所裨益。

为了使读者便于巩固加深理解基本概念，掌握一定的计算方法，提高计算技能，在每一章节后都配有足够习题，供教师与读者选用。习题以基本训练为主。

本书为职工高校机电类专业以及其它专业教材，也可为工程技术人员掌握数学方法，提高计算技术的参考书。

在编写过程中，本书得到了河北大学张贵恩教授、河北职工医学院孙旷舞教授的关心和支持，并承蒙他们审阅了全书，在此表示衷心的感谢。

参加本书编写工作的还有黄林静、田明欣同志。

由于编者水平有限，时间仓促，编写中的错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

1994.4.16

目　录

第一章　函　　数

初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学则以变量为研究对象。变量之间的依赖关系，构成了函数的概念。函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是数学分析研究的对象。本章将介绍函数的概念、特性，基本初等函数和初等函数等内容。

第一节　函数的概念

一、常量与变量

在观察自然现象、研究一些实际问题或生产过程中，总会遇到许多量。这些量一般可分为两种，一种是在过程进行中保持不变的量，称为常量；另一种是在过程进行中不断变化的量，称为变量。例如，把一密闭容器内的气体加热时，气体的体积和分子个数保持一定，所以是常量；而气体的温度与压力随着加热过程增大而发生变化，所以是变量。又例如，在给一金属块加热过程中金属块重量不变，是常量；而其温度、体积在变化,是变量。

还应注意到，某一个量是常量还是变量，并不是固定的，随着所考虑的问题不同可能会变化的。例如，重力加速度一般看作常量，但超出一定范围，又是变量。

二、区间与邻域

1.区间

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示其变化范围。区间又分为两类。

（1）有限区间。介于实数 a 与 b 之间的所有实数的集合称为有限区间。有限区间又分为三种情况。

1）满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有数 x 的集合称为闭区间，记作 $[a, b]$，其中 a，b 称为区间的端点。

2）满足 $a<x<b$ 的所有数 x 的集合称为开区间，记作 (a, b)。

3）满足 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的所有数 x 的集合称为半开半闭区间，记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$。

（2）无穷区间

1）满足 $a<x<+\infty$ 或 $a \leqslant x<+\infty$ 的数 x 的集合，记作 $(a, +\infty)$ 或 $[a,+\infty)$。

2）满足 $-\infty<x<b$ 或 $-\infty<x \leqslant b$ 的 x 的集合，记作 $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$。

3）满足 $-\infty<x<+\infty$ 的 x 的集合，记作 $(-\infty, +\infty)$。

2.邻域

设 a 与 δ 是两个实数。且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-a|<\delta$，即 $a-\delta<x<a+\delta$ 的实数 x 的集合，称为点 a 的 δ 邻域（图 1－1），点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。故邻域为以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，若不等式改为 $0<|x-a|<\delta$，即在邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 中去掉 $x=a$ 点，称为去心邻域。

三、函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中,往往遇到有几个变量同时在变化着,它们彼此之间并不是孤立地,而是相互联系、相互依赖,并按照一定规律变化着,我们先分析几个例子。

例 1－1 一根导线在输送电流的过程中，电压 V 与电流 I 在变化着，它们之间互相联系、互相影响，并且它们的变化是有规律的。

解：在输电过程中，按照欧姆定律，电压 V 与电流 I 成正比（设电阻保持不变）即

$$I=\frac{V}{R} \text{ 或 } V=RI$$

例 1－2 气象观察站的气温自动记录仪描绘某地某一天气温 T(℃) 随时间 t (h) 的变化曲线（图 1－2），时间 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$。

解：对于这个范围内的每一时刻 t，都可以在图形上量出对应的温度 T 的值。例如，当 $t=13.5$ 时，$T=22$℃

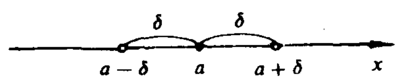

图 1－1

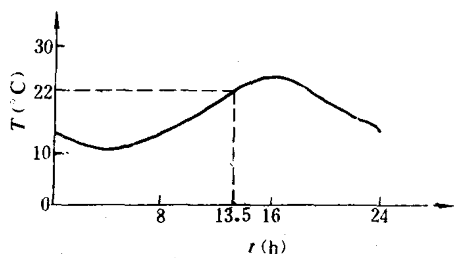

图 1－2

例 1－3 在货轮的船头下部涂着一列数字，这些数字指明吃水的深度，下表给出了某货轮在不同吃水深度时的排水量：

吃水深度 h(m)	3	4	5	6	7	8	9
排(淡)水量 w(t)	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

解：上表反映了变量 w 与变量 h 的对应关系，对于表中给出的吃水深度 h，就有一个确定的排水量 w 与之对应，例如，当 $h=4$m 时，$w=7225$t。

上面三个例子的实际意义虽不相同，但从数量关系的角度来看，它却有着共同之处，即在变化过程中的两个变量之间存在着某种对应关系，当一个变量取定某一值时，另一变量就有确定的值与之对应，两个变量之间的这种对应关系，在数学上就是函数概念。

定义 1-1 设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在给定的某一变域中取任意一个值时，变量 y 按照某一确定的法则有一个确定值与之相对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：

$$y=f(x)$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数。自变量 x 的这个变域，称为函数的定义域。因变量 y 所对应的数值范围，称为函数的值域。

从上面函数的定义中可以看出：函数有两个要素：（1）函数的定义域；（2）确定自变量 x 与因变量 y 之间数值对应的法则。因而对于不同的函数，应用不同符号表示对应法则。两个函数，只有当定义域与对应法则都相同时，才为同一函数。

例如，函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 定义域相同，皆为（$-\infty$，$+\infty$），但对应法则不同，因为 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$；又如函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$，对应法则相同，但定义域不同。前者为（$-\infty$，0）与（0，$+\infty$），后者为（0，$+\infty$），因而它们都是不同的函数。

定义 1－2　设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取定定义域中某一定值 x_0 时，因变量的相应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记为 $f(x_0)$，或 $f(x)\big|_{x=x_0}$，$y\big|_{x=x_0}$

例如：　$y=f(x)=x^2-2x+3$

当 $x=3$ 时，$f(3)=3^2-2\times 3+3=6$

同样，当 $x=a$ 时，对应的函数值是

$$f(a)=a^2-2a+3$$

有时对于变量 x 的每一个值，变量 y 按照一定的规则有两个或更多个确定的数值和它对应，这种情形与上述定义不符，但为方便起见，我们称 y 为 x 的多值函数，而称前面所定义的函数为单值函数。例如，方程 $y^2=x$，当 x 取值 0 时，对应的 y 值只有一个数值 0，但当 x 取开区间（0，$+\infty$）内任一个数值时，对应的 y 值就有两个，所以方程 $y^2=x$ 在（0，$+\infty$）内确定一个双值函数，而 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$ 是它的两个单值分支，以后如果不加特殊说明，所有的函数 $y=f(x)$ 都指单值函数。

四、函数定义域的确定

一般来说，函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的，但在数学上作一般性讨论时，常常只给出函数的表达式，而没有说明实际背景，这时函数的定义域，就是表达式有意义自变量的变化范围。下面举几个由分析表达式求定义域的例子。

例 1－4　求函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

解：在 $\dfrac{1}{x+1}$，当且仅当 $x+1\neq 0$，即 $x\neq -1$ 时，表达式才有意义，因此，函数的定义域为 $x\neq -1$，或用区间表示为（$-\infty$，-1）及（-1，$+\infty$）

例 1－5　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 的定义域。

解：只有当 $x+1\geqslant 0$，及 $2-x>0$ 且 $x\neq 1$ 才有意义，所以它的定义域为

$$-1\leqslant x<1 \text{ 及 } 1<x<2$$

例 1－6　求函数 $y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$ 的定义域.

解：显然函数的定义域是：

$$x\neq n\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

例 1－7　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域。

解：　只有当 $1-x^2\geqslant 0$，及 $x\geqslant 0$ 才有意义，所以函数定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$。

五、函数的表示法

一般来说，函数有三种表示法：解析法（如例1－1），图象法（如例1－2），表格法（如例1－3）。

在实际问题中，有时会遇到一个函数在定义域的不同范围内要用不同的解析式表示的情形，下面来举例说明。

例1－8　脉冲发生器产生一个单三角脉冲，其波形如图1－3所示。

这时电压U与时间t的函数关系为：

$$U(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t & (0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2})\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau) & (\dfrac{\tau}{2}\leqslant t<\tau)\\ 0 & (\tau\leqslant t)\end{cases}$$

例1－9　符号函数$\operatorname{sgn}x$定义为

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

如图1－4所示。

从例1－8与例1－9中看到，在自变量的不同范围内，因变量与自变量的对应关系要用不同的数学式子来表示，一般在函数的定义域内，用两个或两个以上的数学式子分段表示的函数叫做分段函数。

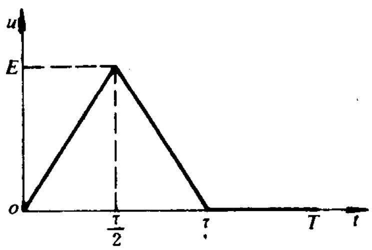

图　1－3

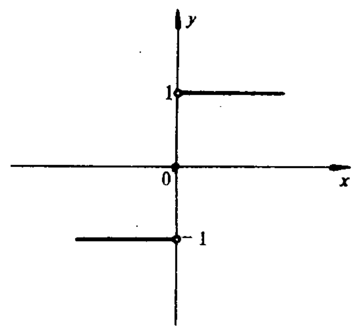

图　1－4

求分段函数的函数值$f(a)$时，要注意自变量的值落在哪一个范围内，以及a所在的范围内表示函数关系的数学式子是什么，然后进行计算。

如例1－9中$\operatorname{sgn}8=1$，$\operatorname{sgn}(-5)=-1$，$\operatorname{sgn}(0)=0$。此外，在我们研究两个不同的函数时，也要用两个不同的字母来分别表示它们的对应规律，或者用同一个字母加上足标以示区别。例如圆的周长L和圆的面积S都是半径r的函数。

我们可以分别用

$$l=f(r)\ 与\ S=\varphi(r)$$

表示它们，显然$f(r)=2\pi r$，$\varphi(r)=\pi r^2$表示不同的对应规律。

六、函数关系的建立

运用数学工具去解决实际问题，往往需要先找出问题中变量之间的函数关系，然后对

它进行研究，这是解决实际问题重要的一步。虽然如何建立函数关系，并无一定的法则可循，只能根据具体问题作具体处理，但亦可参考下面的方法步骤：首先确定实际问题中有哪些变量，所要研究的对象是什么变量，其中再确定自变量与因变量；之后再根据题设的条件，应用几何学、力学、物理学及初等数学中一些已知的公式、定律，如面积、体积、周长，速度、加速度等公式或定律，建立自变量与因变量之间的函数关系式。对一元函数情形而言，在初次建立的函数关系式中，往往含有两个或两个以上的自变量。此时，可根据题设条件，建立起这些自变量之间的关系式，再代入所建立的初次的函数关系式，从而达到使所建立的函数关系式中只含一个主要自变量。在建立起函数关系式后，要根据自变量的具体背景，结合定义域的基本法则，给出所建立函数关系定义域。另外，对分段性质的变量之间的关系，需要用分段函数来表达。

下面，我们通过几个实例来介绍如何建立函数关系，为以后运用微积分方法解决实际问题建立一些初步基础。

例 1－10　现欲建造一容积为 V_0 的圆柱形无盖贮水池，已知其侧面单位面积造价为底面的 3 倍，底面单位面积造价为 a 元，试建立水池的总造价 A 与底半径 r 的函数关系。

解：　水池底面造价 $A_1=\pi r^2 a$

侧面造价 $A_2=2\pi rh3a$

故总造价 $A=A_1+A_2=a\pi r^2+6a\pi rh$

又水池容积为 V_0，故有 $\pi r^2 h=V_0$，$h=\dfrac{V_0}{\pi r^2}$ 代入上式消去 h，得

$$A(r)=a\pi r^2+\frac{6aV_0}{r}\quad(0<r<+\infty)$$

例 1－11　某机床厂生产某型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元，设产品均匀投入市场，那平均库存量为批量的一半，设每年每台库存费为 c 元，试建立一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系。

解：设批量为 x，库存费与生产准备费之和为 $p(x)$

因年产量为 a，故一年生产的批数为 a/x，一年生产准备费为 ba/x，又因库存量为 $x/2$，故一年库存费为 $cx/2$。

故一年库存费与生产费之和为

$$p(x)=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x\qquad(0<x\leqslant a)$$

例 1－12　质点在点 (x_0,y_0) 以初速 $v_0=50\mathrm{m/s}$ 沿与水平成 $\alpha=30°$ 角方向抛出，若不计空气阻力，试分别建立质点飞行高度及水平距离与时间 t 的函数关系式。

解：由物理学斜抛公式知：质点飞行的水平距离

$$x(t)=x_0+v_0(\cos\alpha)t=x_0+50\times\frac{\sqrt{3}}{2}t=x_0+25\sqrt{3}t\qquad(0\leqslant t<+\infty)$$

质点飞行的高度

$$y(t)=y_0+v_0(\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2=y_0+25t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (0\leqslant t<+\infty)$$

例 1－13 一蓄水池的横断面为一等腰梯形，尺寸如图 1－5 所示，池长为 50m，试建立水深 x 与水的容积 V 的函数关系。

解：梯形横截面容水部分之截面的面积

$$S=10x+2\times\frac{1}{2}x\mathrm{ctg}45°x$$

$$=10x+x^2$$

故水的容积

$$V(x)=(10x+x^2)\times 50$$

$$=500x+50x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 10)$$

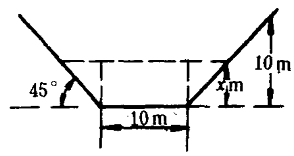

图 1－5

例 1－14 一下水道的横截面为矩形加半圆形，横截面积为 A，试建立截面的周长 l 与底宽 x 的函数关系（图 1－6）。

解：设截面的矩形高为 h 则周长

$$l=\frac{1}{2}2\pi\frac{x}{2}+x+2h=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x+2h$$

因截面积为 A，故有

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2+xh=A$$

即

$$\frac{\pi}{8}x^2+hx=A$$

所以

$$h=\frac{A-\frac{\pi}{8}x^2}{x}=\frac{A}{x}-\frac{\pi}{8}x$$

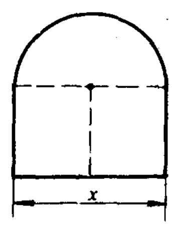

图 1－6

将 $h=h(x)$ 代入上式，得

$$l(x)=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)x+2\left(\frac{A}{x}-\frac{\pi}{8}x\right)=\left(\frac{\pi}{4}+1\right)x+\frac{2A}{x} \qquad (0<x<+\infty)$$

例 1－15 某运输公司规定某种货物的运输收费标准为：不超过 200km，每吨公里收费 6 元，200km 以上，但不超过 500km，每吨公里收费 4 元；500km 以上，每吨公里收费 3 元，试将每吨的运费表示为路程的函数。

解：设路程为 x（公里），每吨运费为 y（元）变量 x 与 y 的关系是分段性质，故需用分段函数表达。

当 $0\leqslant x\leqslant 200 \quad y=6x$

当 $200<x\leqslant 500 \quad y=6\times 200+4(x-200)=4x+400$

当 $x>500 \quad y=6\times 200+4\times 300+3(x-500)=3x+900$

故所求函数为

$$y=\begin{cases}6x & (0\leqslant x\leqslant 200)\\ 4x+400 & (200<x\leqslant 500)\\ 3x+900 & (x>500)\end{cases}$$

习 题 1－1

1.下列各题所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\sin x$ 和 $y=|\sin x|$；　　(2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=\arccos x$ 和 $y=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(5) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}1-x & (x<1)\\ 0 & (x=1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$

2. 物体自空中自由下落，下落距离 S 是时间 t 的函数

$S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8\text{m}/\text{s}^2)$

(1) 求 $f(2)$，$f(2.01)$，$f(t+0.01)$；

(2) 求 $\frac{f(2.01)-f(2)}{0.01}$　$\frac{f(t+0.01)-f(t)}{0.01}$

并说明 (2) 中这两个表达式有什么实际意义。

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x & (0\leqslant x<2)\\ 2 & (2\leqslant x<4)\\ 6-x & (4\leqslant x\leqslant 6)\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4.5)$。

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sin\frac{x}{2}$；　　(2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(3) $y=e^{-\sqrt{x}}$；　　(4) $y=\lg(x^2-1)$；

(5) $y=\frac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+3}$；　　(6) $y=\sqrt{x^2-2x-4}$；

(7) $y=\sqrt{5-x}-\text{arctg}\frac{1}{2x}$；　　(8) $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$

5. 已知 $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-1}$，求 $f(-3)$，$f(a)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(a)+1$，$f(a+1)$，又问 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 存在否？$f(x)$ 的定义域是什么？

6. 设 $\varphi(x)=2^x$，证明

(1) $\varphi(-y)\varphi(y)=1$；　　(2) $\varphi(nt)=[\varphi(t)]^n$

7. 在漏斗形的量杯上要刻上表示容积的刻度，需找出溶液深度与其对应容积之间的函数关系．现已知漏斗的顶角为 30°（图 1－7），试求容积与深度的函数关系。

8. 已知油在油管中的流速沿直径是按抛物线形状分布的（图 1－8），越靠近管壁速度越小，沿管中心轴速度最大，设油管的直径为 d 管中心油的流速为 v_0，求油管中的流速直径的分布，即如图 1－8 求 v 与 x 的函数关系。

9. 一曲柄连杆机构（如图 1－9），若主动轮以等角速度 ω（rad/s）旋转，曲柄 OA 绕轴 O 作圆周运动，连杆 AB 带动滑块 B 作往复直线运动。开始时，O、A、B 三点在一水平线上，求 S 与时间 t 的函数关系，即求滑块 B 的运动规律，设 $OA=R$（m），$AB=l$（m）。

10. 梯形电压波形曲线如图 1－10 所示，试写出从时间 $t=0$ 到 $t=\frac{2\pi}{w}$ 这一周期内电压 V 与 t 的函数关系。

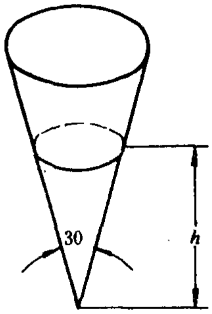

图 1－7

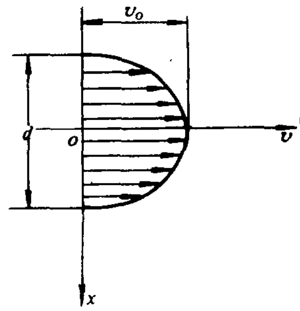

图 1－8

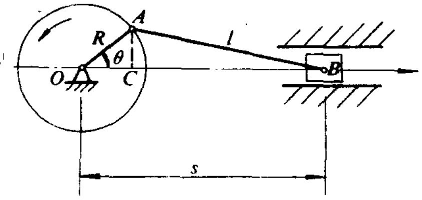

图 1－9

11. 水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（如图 1－11），$ABCD$ 叫做过水断面（即垂直于水流的断面），$L=AB+BC+CD$ 叫做水渠的湿周（即水流断面与界壁交线的长度），当过水断面的面积为定值 S_0 时，求湿周 L 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域。

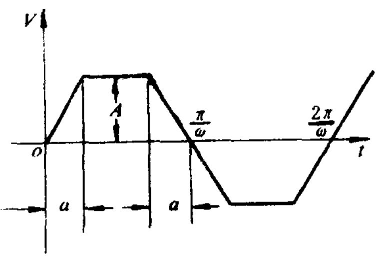

图 1－10

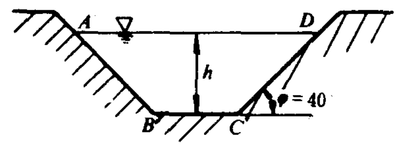

图 1－11

第二节　函数的几种特性

下面结合图形来研究函数的几种简单性态

一、函数的奇偶性

定义 1－3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称如果对于任何 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$

则称 $f(x)$ 为偶函数。若满足关系式 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数，偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1－12），因为若点 $A(x, f(x))$ 是图形上的点，则其关于 y 轴对称点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上。奇函数的图形关于原点对称（图 1－13），因为若 $A(x, f(x))$ 是图形上的点，则其关于原点的对称点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上。既非偶函数，又非奇函数的函数称非奇非偶函数。

例如，$y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数，$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数而 $y=\sin x+\cos x$ 则既非奇函数也非偶函数。

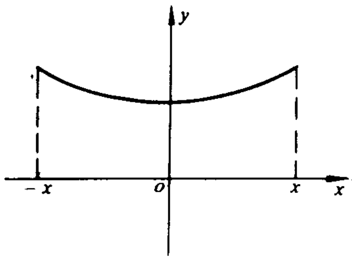

图 1-12

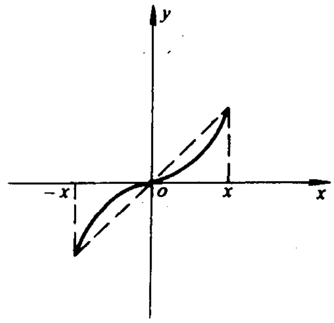

图 1-13

二、函数的单调性

定义 1－4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有意义，如果对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad\qquad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，(图 1－14) 或单调减少 (图 1－15)，单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

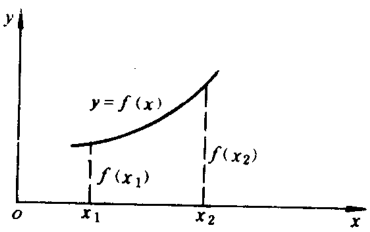

图 1－14

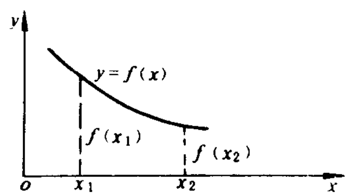

图 1－15

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，又如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的。

三、函数的有界性

定义 1－5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得与任一 $x\in I$ 所对应的函数值都满足不等式。.

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，如果这样的数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界。例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立，而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在正数 M 使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立。

四、函数的周期性

定义 1-6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一常数 $l\neq0$，使得对任何 $x\in$

D，有 $(x+l)\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$
则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的周期。周期函数的周期通常是指它的最小正周期。例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 为以 2π 为周期的周期函数；函数 $\mathrm{tg}x$ 为以 π 为周期的周期函数。周期为 l 的函数，在其定义域内长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状（图 1-16）。

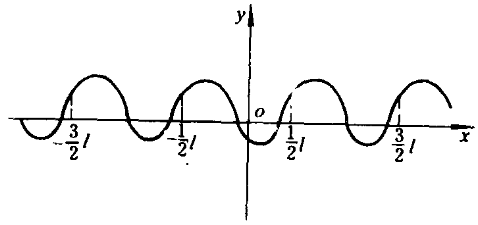

图 1-16

习 题 1-2

1.设下面所考虑的都是定义在区间 $(-l,\ l)$ 内的函数，证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数。

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

2.判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$；　　（2）$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$　$(a>0)$；

（3）$y=x\cdot\dfrac{a^x-a^x}{2}$　$(a>0)$；　　（4）$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$；

（5）$y=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$；　　（6）$y=\begin{cases}-x & (x<-1)\\ 1 & (|x|\leqslant 1)\\ x & (x>1)\end{cases}$

3. 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其周期？

（1）$y=\cos 2x$；　（2）$y=\sin(x-2)$；　（3）$y=\sin x^2$；

（4）$y=1+\cos\pi x$；　（5）$y=x\sin x$；　（6）$y=\sin 2x+\cos\dfrac{x}{2}$；

（7）$y=\begin{cases}c & (2n\leqslant x\leqslant 2n+1)\\ -c & (2n+1<x<2n+2)\end{cases}$　（n 为整数，c 常数）

4. 求证：以 T 为周期的函数 $f(x)$，经过变量代换 $t=\dfrac{2\pi}{T}x$，就变换为以 2π 为周期的函数 $\varphi(t)=f\left(\dfrac{T}{2\pi}t\right)$。

5. 设 $f(x)=kx+b\ (k\neq 0)$，求证 $f(x)$ 不是周期函数。

6. 判断下列函数的单调性：

（1）$y=2x+1$；　　（2）$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；

（3）$y=\log_a x$；　　（4）$y=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 2-|x| & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$