初中二年级（上）

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

清华大学出版社

中学数学系列讲座

中学数学系列讲座

初中二年级
（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是初中二年级上学期学生的课外阅读书．目的是为了扩大学生的知识面，丰富解题方法，从而提高数学的分析、解题能力．

全书共七讲，内容包括绝对值与算术根、全等三角形、三角形中的不等量、三角形的五心、一元二次方程及其解法等．每讲都有方法介绍、例题分析、规律总结，并配有练习题与答案．本书可供自学青年及初中数学教师参考，也为各校开展学生课外数学小组活动提供了素材．

中 学 数 学 系 列 讲 座

初中二年级（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北 京 数 学 会 海 淀 区 分 会 编

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京海淀昊海印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：5.75　字数：127千字

1989年2月第 1 版　1989年2月第 1 次印刷

印数 00001–30000　定价：1.50元

ISBN 7-302-00372-6/O·70

前　　言

《中学数学系列讲座》共分 11 册：初中一、二、三年级及高中一、二年级上下各一册，高三年级全一册.

这套书是以“十年制数学教学大纲”为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成. 这是一套具有提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力.

本“系列讲座”以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材.

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导. 由于经验不足，一定有不少缺点，敬请读者批评指正，以便今后修改与补充.

《中学数学系列讲座》编委会

《中学数学系列讲座》

编委会名单

目　　录

第一讲

绝对值、算术根

朱衣浵

一、绝对值

绝对值是中学数学中重要概念之一，因为实数的大小比较、实数之间的各种运算以及方程、不等式、函数、极限和复数等许多方面的问题，都要用到绝对值的知识.

(一)绝对值的定义

实数 a 的绝对值记作$|a|$.下面介绍三种等价的绝对值的定义.

1. 代数定义

利用数的性质来定义绝对值.正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零，即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

这个定义比较简单，只要给出一个数，就能根据这个数的性质求出它的绝对值.例如：$|2|=2$，$|-2|=2$，$|0|=0$.

但是，这个定义不适合做代数运算.例如，要证明对于一切实数 a、b 有$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，必须分 $a>0$，$b>0$；$a>0$，$b<0$(或$a<0$，$b>0$)；$a<0$，$b<0$；$a=0$，$b>0$(或$a>0$，$b=0$)；$a=0$，$b<0$(或$a<0,b=0$)；$a=0$，$b=0$等

各种情况，分别加以检验，但这样做很繁琐.

2. 几何定义

在数轴上，表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值.

实数 a 的绝对值就是在数轴上表示实数 a 的点离开原点的距离，即 $|a|=\sqrt{a^2}$.

在复平面内，表示一个复数 $a+bi$ 的点离开原点的距离 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数的模，也叫做复数的绝对值.

当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就变成了实数，绝对值 $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}=|a|$.

这个定义易于处理一些代数运算. 例如，利用这个定义很容易证明对于一切实数 a、b 有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 成立.

证明：（分析法）欲证 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，即证 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$. 只须证

$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\geqslant\sqrt{(a+b)^2}$，只须证

$(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2})^2\geqslant(a+b)^2$，即证

$\sqrt{a^2b^2}\geqslant ab$，只须证

$|ab|\geqslant ab$. 对于任意实数 a、b都有 $|ab|\geqslant ab$，故命题得证.

3. 运算定义

把实数 a 的绝对值$|a|$看作 a 与它的相反数 $-a$ 之间求非负数的运算，用记号 $|a|=\{a，-a\}^+$表示. 例如：

$|2|=\{2，-2\}^+=2$；　$|-2|=\{-2，2\}^+=2$；

$|0|=\{0,0\}^+=0$；　$\sqrt{3}=\{\sqrt{3}，-\sqrt{3}\}^+=\sqrt{3}$，

$|\pi-3.14|=\{\pi-3.14,-\pi+3.14\}^+=\pi-3.14$.

用这种求非负数的运算来定义绝对值，对初学绝对值的人来说，可以减少绝对值计算中的错误。

(二)绝对值的性质

绝对值的性质比较多，这里只介绍用得较多的几个性质。

(1) 实数 a 的绝对值是个非负数，即 $|a|\geqslant 0$；

(2) 在实数范围内，零的绝对值最小；

(3) 任何实数都有唯一的绝对值；

(4) 任何一个实数 a 都不大于它的绝对值，也不小于它的绝对值的相反数，即

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

(5) 两个互为相反数的实数绝对值相等，即

$$|a|=|-a|;$$

(6) 两实数乘积的绝对值等于它们绝对值的积，即

$$|ab|=|a|\cdot|b|;$$

(7) 两实数商的绝对值等于它们绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0);$$

(8) 两实数和或差的绝对值不大于它们绝对值的和，即

$$|a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

(三) 绝对值的应用

无论解什么类型的题目，只要其中含有绝对值的量，那么最关键的一步是要做去掉绝对值符号的恒等变形。

去掉绝对值符号要注意下面两点：

(1) 如果根据已知条件或题目中的隐含条件可肯定绝对值号内的数（或代数式）为“负”或“非负”，则由绝对值

的定义可直接写出其结果；

（2）如果根据已知条件或题目中的隐含条件不能肯定绝对值号内的代数式为“负”或“非负”，就应分别各种情况进行讨论。

下面分三个方面来研究绝对值的应用：

（1）含有绝对值的代数式的化简

例 1 已知 $x<-3$，化简 $\left|1-\left|1-|1+x|\right|\right|$.

解： 原式 $=\left|1-|1+1+x|\right|=\left|1-|2+x|\right|$

$$=|1+2+x|=-3-x.$$

例 2 化简 $\dfrac{|x|}{x}$.

解： $x\neq 0$，否则无意义。

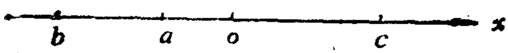
$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{x}=-1, & \text{当 } x<0\text{时；}\\[2ex] \dfrac{x}{x}=1, & \text{当 } x>0\text{时.}\end{cases}$$

例 3 根据数轴上给出的 a、b、c 的条件，化简：

$|a+b-c|-|a-b+c|+|c-a-b|$.

解： 原式 $=-a-b+c-a+b-c+c-a-b$

$=-3a-b+c$.



例 4 根据上例中给出的 a，b，c 的条件，化简：

$$|(a+b-c)(3a+2b-c)|-|(c-a-b)(2c-2a-b)|.$$

解： 原式$=(a+b-c)(3a+2b-c)-(c-a-b)(2c-2a-b)$

$$=(a+b-c)[(3a+2b-c)+(2c-2a-b)]$$

$$=(a+b-c)(a+b+c)$$

$$=(a+b)^2-c^2$$

$$=a^2+b^2-c^2+2ab.$$

(2) 绝对值方程（组）

解含有绝对值符号的方程（组），一般都是采用分区间讨论的方法．

例 5 解方程 $|x-2|+|2x+1|=7$.

解： $|x-2|$，$|2x+1|$ 的零点分别是 1，$-\frac{1}{2}$，所以数轴可分为三个区间，即 $x\geqslant 2$，$-\frac{1}{2}\leqslant x<2$，$x<-\frac{1}{2}$.

当 $x\geqslant 2$ 时，原方程变形为

$$(x-2)+(2x+1)=7,$$

$$3x=8,$$

$$x=\frac{8}{3}.$$

因为 $x=\frac{8}{3}$ 在 $x\geqslant 2$ 的区间内，所以是原方程的根。

当$-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 时，原方程变形为

$$-(x-2)+(2x+1)=7,$$

$$x=4.$$

因为 $x=4$ 不在 $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 的区间内，所以它不是原方程的根.

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，原方程变形为

$$-(x-2)-(2x+1)=7,$$

$$x=-2.$$

因为 $x=-2$，在 $x<-\frac{1}{2}$ 的区间内，所以它是原方程的根.

综上所述，原方程的根为 $x=\frac{8}{3}$，$x=-2$.

例 6 已知 $x>2$，$y<0$，解方程组

$$\begin{cases}|2-x|+5|y-1|=13,\\|1-x|+3|7-y|=28.\end{cases}$$

解：由 $x>2$，$y<0$，原方程组变形为

$$\begin{cases}x-5y=10, & (1)\\x-3y=8. & (2)\end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases}x=5,\\y=-1.\end{cases}$

因为 $\begin{cases}x=5,\\y=-1,\end{cases}$ 符合条件 $x>2$，$y<0$，所以 $\begin{cases}x=5,\\y=-1,\end{cases}$ 是原方程组的解.

例 7 解方程组 $\begin{cases}|x-y|=1,\\|x|+|y|=5.\end{cases}$

解：1.若 $x-y>0$，原方程组变形为

$$\begin{cases} x-y=1, & (1) \\ |x|+|x-1|=5. & (2) \end{cases}$$

对方程(2)在区间 $x\geqslant1$，$0\leqslant x<1$，$x<0$ 上分别求解.

① 当 $x\geqslant1$ 时，(2)变为 $x+x-1=5$,

$$x=3,$$

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

② 当 $0\leqslant x<1$ 时，(2)变为 $x+[-(x-1)]=5$,

即 $1=5$,

说明方程组无解.

③ 当 $x<0$ 时，(2)变为 $-x+[-(x-1)]=5$,

$$x=-2,$$

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=-2, \\ y=-3. \end{cases}$

2. 若 $x-y<0$，原方程组变为

$$\begin{cases} y-x=1, & (3) \\ |x|+|x+1|=5. & (4) \end{cases}$$

对方程(4)在区间 $x\geqslant0$，$-1\leqslant x<0$，$x<-1$ 上分别求解，可得原方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

综上所述，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

下面介绍几种特殊的绝对值方程的解法：

① 形如 $|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|=0$ 的绝对值方程的解法.

解这类方程可根据非负数的性质：若几个非负数的和为零，则每个非负数都为零. 于是，可把绝对值方程转化为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

解这个方程组，就可得到上述绝对值方程的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

例 8 解方程 $|6x-y-8|+|2x+3y+4|=0$.

解：利用非负数的性质，把上述绝对值方程转化为下面的方程组：

$$\begin{cases} 6x-y-8=0, \\ 2x+3y+4=0. \end{cases}$$

解此方程组，得$\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

∴原方程组的解是$\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

② 形如 $|x-a|+|x-b|=M$ 型的绝对值方程的简便解法.

当 $M<0$ 时，上述方程无解；

当 $M=0$ 时，只有在 $a=b$ 时，方程有解，解为 $x=a=b$.

当 $M>0$ 时，可利用椭圆图象与 x 轴交点的坐标，简便地求出上述方程的解.椭圆图象是高二学习的内容，在此我们只利用它的结论而不研究其理论根据.

在 $M>0$ 的条件下，上述绝对值方程的解如下：

当 $M>|a-b|$ 时，方程有两个解，即 $x=\pm\frac{M}{2}+\frac{a+b}{2}$；

当 $M=|a-b|$ 时，方程有无数个解：$a>b$ 时，解为 $b\leqslant x\leqslant a$；在 $a<b$ 时，解为 $a\leqslant x\leqslant b$.

当 $M<|a-b|$ 时，方程无解.

例 9 求 $|x-2|+|x+5|=9$ 的解.

解：这里 $a=2$，$b=-5$，$M=9$.

$\because\ 9>|2-(-5)|$，$\therefore$ 方程有两个解：

$$x_1=\frac{M}{2}+\frac{a+b}{2}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=3,$$

$$x_2=-\frac{M}{2}+\frac{a+b}{2}=-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=-6.$$

例 10 求 $|x-2|+|x+5|=7$ 的解.

解：这里 $a=2$，$b=-5$，$M=7$.

$\because\ 7=|2-(-5)|$，又 $\because\ a>b$

$\therefore$ 方程的解为 $-5\leqslant x\leqslant 2$.

例 11 求$|x+1|+|x+5|=2$的解.

解：这里 $a=-1$，$b=-5$，$M=2$.

$\because\quad 2<|-1-(-5)|$,

$\therefore$ 方程无解.

③ 形如$|x-a|-|y-b|=M$型的绝对值方程的简便解法.

当 $M=0$ 时，上述方程的解是 $x=\dfrac{a+b}{2}$；

当 $M<0$ 时，上述方程可转化为 $|x-b|-|x-a|=-M(-M>0)$型方程求解. 因此，下面我们只研究 $M>0$ 时上述方程的解法.

当 $M>0$ 时，可利用双曲线的图象与 x 轴的交点的坐标简便地求出上述方程的解. 这里也只利用它的结论而不研究它的理论根据.

当 $M<|a-b|$ 时，方程有一个解.在 $a<b$ 时，方程的解为 $x=\dfrac{M}{2}+\dfrac{a+b}{2}$；在 $a>b$ 时，方程的解是

$$x=-\frac{M}{2}+\frac{a+b}{2}.$$

当 $M=|a-b|$ 时，方程有无数个解.在 $a<b$ 时，方程的解是 $x\geqslant b$；在 $a>b$ 时，方程的解是 $x\leqslant b$.

当 $M>|a-b|$ 时，方程无解.

例 12 求 $|x+2|-|x-3|=2$ 的解.

解：这里 $a=-2$，$b=3$，$M=2$.

$\because\quad 2<|-2-3|$，又$\because\quad a<b$,