弹性薄板

張 福 范

科学出版社

弹性薄板

張福范

科学出版社

1965

內 容 簡 介

本书为薄板理论的专著；着重讨论了在板平面內有张力或压力与垂直于版面的荷重共同作用的矩形板，正交各向异性矩形板，弹性地基上的矩形板．其中包括四边简支边，四边固定边，两相邻边为简支两相邻边为固定，连续矩形板等情形．此外，尚讨论了角点被支承的矩形板的弯曲．

弹 性 薄 板

张 福 范 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳門內大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1963 年 5 月第 一 版　开本：787×1092 1/18

1965 年 12 月第三次印刷　印张：10 4/9

印数：4,701—5,200　字数：209,000

統一书号：13031・1755

本社书号：2716・13—2

定价：[科七] 1.50 元

序　　言

作者以前曾經断断續續地作过一些有关弹性薄板的計算，其中大部分都曾发表过．現将它們整理成一册，供作弹性薄板計算的一个补充材料．

关于弹性薄板的发展史，主要节录了鉄摩辛柯教授所著的"材料力学发展史"中有关的內容．关于苏联的学者們在弹性薄板方面的貢献，主要参照了詹湼里杰和胡海昌的著作．

第一章极其概括地叙述了弹性薄板的基本方程，幷对有关迦辽金法等作了詳細的說明．

第二章討論了以能量法解长矩形板弯曲成柱面問題．最終的結果与布勃諾夫的解法所得的結果应当是相同的．

第三章主要討論了那維埃的双重三角級数解与欒范解之間的联系，然后处理了一系列較复杂的簡支边矩形板的弯曲，例如在板的平面內有张力或压力与垂直于板面的荷重共同作用的簡支边矩形板等；其中包括均布荷重，有一集中力作用在板的中点，以及在板的周界上有分布弯矩作用等情形．

第四章是将那維埃解和結构力学中的方法混合使用，以解四边固定的矩形板，其中包括正交各向异性的固定边矩形板及在弹性地基上的固定边矩形板等．幷且，当弹性地基的模量趋近于零时，就得到了鉄摩辛柯教授对于固定边矩形板所得的方程．

第五章是以双重三角級数解两相邻边簡支两相邻边固定的矩形板，其中也包括正交各向异性板等．

第六章討論了一类較复杂的連續矩形板，例如在板平面內有张力或压力与垂直于板面的荷重共同作用的連續矩形板，及正交各向异性連續矩形板．除了平衡外，幷討論了連續矩形板的稳定与振动．

第七章以欒范解为基础，討論了角点被支承的矩形板．其中包括板的四个角頂被支承，两相邻边簡支一个角頂被支承，以及板的一边为簡支而两角点被支承等問題．只要板的四个角頂无位移，而非悬空的边，不論是簡支的或固定的，本章的解法是一般性的．这解法也可以用于当板的四个角点不动而悬空的边界系被支承在梁上．本书承王俊奎教授提出許多宝貴的建議，作者謹以誌謝．书中的插图系由理論

力学教研組講师李方泽和王正两位协助繪成，一并誌謝.

张 福 范

北京，清华大学

1961年10月

目　　录

薄板理論发展史

欧拉(L. Euler, 1707—1783)最先探索弹性平板的挠曲問題．在描述一理想薄膜的振动时，他把它当作由两組互相垂直且拉紧的綫所組成的．他得到有关的微分方程[1)]为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{a}$$

其中w表示挠度；A与B为常量．欧拉并将这想法用于鈡振动的研究．

杰克・貝努里(Jacques Bernoulli 1759—1789)[2)]将这同样的概念用之于板的分析，于是得到微分方程[3)]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q, \tag{b}$$

式中D为板的抗弯刚度；q为横向荷重的強度．貝努里很清楚地表示：他的方程只是个近似而已；并且如果取两組并不是直交的梁，則获得的結果将稍有不同；他之所以发表这工作，只是作为解板的弯曲問題的第一个尝試而已．

启拉第(E. F. F. Chladni)对于声学的研究[4)]，尤其是他对板的振动試驗，引起了对于板理論极大的兴趣．在板面上鋪上一层細砂，启拉第就能証实板的各种振动形式的节綫的存在，并从而决定其相应的頻率．1809年法国科学院邀請启拉第作这实驗的表演时，拿坡崙亲自光临，并深为这实驗所感服．就在拿坡崙的建議之下，法国科学院提出了这样一个悬賞的題目：探求板振动的数学理論，并用实驗进行校核．1811年10月为应征的截止期，但到时只有一个人应征，她就是莎菲・渊門(Sophie Germain, 1776—1831)[5)]．

莎菲・渊門幼时就致力于数学，并学习拉丁文，以便攻讀牛頓的"物界原理"．当她知道了科学院所提出的悬賞，她就决定研究板的理論．她是熟悉欧拉的弹性曲綫

---

1) 参閱 Novi Comm. Acad. Petrop., Vol. X, p. 243, 1767.

2) 杰克为丹尼尔・貝努里(Daniel Bernoulli)的姪儿．在1786至1789年間，他是俄国科学院院士．

3) Nova Acta, Vol. V, 1789, St. Petersburg.

4) 启拉第著的"Die Akustik"的第一版在1802年于萊比錫(Leipzig)出版．法文的翻譯本在1809年出版，其中可以見到一簡短的自传．

5) 在她的书"L'état des Sciences et des Lettres"中，有莎菲・渊門的传記．該书是她去世后于1833年在巴黎出版的．

的工作的，即由弯曲变形能的积分以变分原理来获得挠度曲綫的微分方程．她决定以同样的方法来进行，并設板的弯曲变形能的积分式为

$$A\iint\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds \tag{c}$$

（式中的 ρ_1 与 ρ_2 为弯曲面的主曲率半径）．在計算积分（c）的变分时，渊門的計算有錯誤，因而未能获得正确的方程．但作为审查人之一的拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）[1]发現了她的錯誤，并作了修改，就得到所求方程的一个满意的形式：

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{d}$$

这就是通常被称作的莎菲·渊門-拉格朗日方程．

泊松（S. D. Poisson, 1781—1840）作了进一步的努力来改进板的理論．为了要給算式（d）一个物理上的說明，泊松設想板系由分子所組成，其相互之間有分子力作用（与分子間距离的改变成比例）．从一組分子的平衡条件，他成功地得到了方程（d）．但由于他設想所有的質点都分布在板的中間面內，因而在他的方程中的常数 k 与板厚度 h 的平方成比例，而不是理所当然地与板厚度的立方成比例．在同一篇論文中泊松指出：方程（d）不仅可得自积分（c），也可以得自积分

$$A\iint\left[\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2+m\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]ds.$$

其实，适当地选择常数 A 与 m，这算式就是弹性薄板的弯曲变形能的正确算式．这就說明：虽然量（c）并不是板弯曲的变形能，而为何渊門仍能得到薄板的微分方程的正确形式．

作为一个两維的解，泊松得到在荷重作用下板的挠度方程：

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q, \tag{e}$$

式中的抗弯刚度 D 的值系相当于 $\mu=\frac{1}{4}$；q 为荷重強度．他并討論板的边界条件．对于簡支边和固定边，泊松的条件与現在认为正确的相一致．对于沿着边界有已知力分布的情形，他要求有三个条件（而現在我們只用两个条件）．这些条件为：剪力、扭矩及弯矩（自边的任一微段的分子力所計算得的）必須平衡作用在边界上的相应的力．从三个条件減少为两个是后来由克希霍夫（G. R. Kirchhoff）完成的，开尔文爵士（Lord Kelvin）对于这些条件的減少并作了物理的解釋．为了要說明他这理論的应用，泊松研究圓形板的圓对称弯曲，即荷重的強度仅为径向距离的函数．泊松将方程

1）参閱 Ann. Chim., Vol. 39, pp. 149, 207, 1828.

(e) 用极坐标重行写出，并对这問題作出了一完整的解. 后来，他将这解应用于均布荷重，并得到簡支边与固定边板的方程. 他并研究板的横向振动，解出圓板的圓对称振动問題.

板弯曲的第一个滿意的理論，应該归諸于那維埃 (C. L. Navier, 1785—1836). 在他的論文[1](在 1820 年 8 月提交科学院，并在 1823 年发表)中，正如泊松所設想的，那維埃設想板是由質点所組成的. 但他認为質点系分布在板的厚度內，并設在弯曲时，質点的位移平行于板的中間面，且与中間面的距离成正比. 于是他得到了在任何横向荷重下正确的微分方程. 由于那維埃認为質点之間相互作用的力与它們之間距离的改变成比例而与方向无关，所以他的結果只包含一个弹性常数. 如果取泊松比等于 $\frac{1}{4}$，則那維埃的 D(板的抗弯刚度)值与現在一般認为正确的值相同. 那維埃将他的方程应用于簡支边矩形板，提出了正确的边界条件，并以双重級数的形式提出正确的解. 他解了均布荷重及在板中点作用一集中力这两种情形. 这些解是矩形板弯曲問題的正确解的創始.

那維埃并研究了沿边界有均布压力 T 所作用的板的横向屈曲，并得到了屈曲面的正确的微分方程:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0.$$

他将这方程应用于四个角頂被支承的矩形板这个复杂的問題，但并沒有得到一个可取的解.

克希霍夫(G. R. Kirchhoff, 1824—1887)是牛孟(Franz Newmann, 1798—1895)的学生，所以他对弹性理論很有兴趣. 在 1850 年他发表了薄板理論的重要論文[2]. 在这論文中，我們見到一个完善的板的弯曲理論；在論文的开始，克希霍夫对这問題作了一个簡短的闡述. 他提到莎菲·澌門首先企图获得板弯曲面的微分方程，以及拉格朗日修正了她的錯誤. 他并沒有提到那維埃用分子力的假設来获得板的方程这工作. 他討論了泊松的工作，并指出：泊松的三个边界条件一般地是不可能同时滿足的；而这位法国的弹性力学家所以能正确地解出圓形板的振动問題，只是由于他所討論的振动，其对称形式自然地滿足了三个边界条件之一.

克希霍夫的板的理論，是建立在目前所公認的两个假設上的：(1) 原来垂直于板的中間面的綫段，当板弯曲时仍旧保持直綫且垂直于弯曲了的板的中間面；(2) 在横向荷重作用下板发生小挠曲时，板的中間面并不受到拉伸. 这两个假設接近于杆弯

1) 参閱 Bull. Soc. Philomath., Paris, p. 92, 1823.

2) J. Math. (Crelle), Vol. 40, 1850.

曲的初等理論中截面保持平面的假設. 运用了他的两个假設,克希霍夫立出板弯曲的变形能的正确算式:

$$V=\frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{f}$$

克希霍夫幷运用虛功原理以获得板弯曲面的微分方程. 对于任何虛位移,分布在板面上的荷重 q 所作的功必等于板的变形能的增加,即

$$\iint q\delta w\,dx\,dy=\delta V.$$

将(f)式代入幷进行变分計算,克希霍夫就得到了为大家所熟悉的板的弯曲方程. 他幷且指出:只存在两个边界条件而不是象泊松所設想的应該有三个条件.

克希霍夫将他的方程用于自由边界的圓形板的振动理論. 他不仅研究对称形式(其节綫为同心圓),幷且研究以圓的直径为节綫的形式; 对于这种情形, 泊松的边界条件是不能用的. 旣得了一般的解,他作了很多的数字計算,幷对于各种振动形式計算出頻率的表. 他用这些数字結果来分析启拉第所获得的板的振动試驗結果. 他首先須从这些結果中得到泊松比 μ 的正确値. 但由于 μ 的大小对頻率的影响不大,因而这些实驗幷不适宜用来精确地决定 μ.

在他的講稿[1]中,克希霍夫将他的板的理論扩展到挠度不是很小的情形. 大挠度板的理論的提出使弹性理論大大地跨进了一步. 由于这理論以后在各种薄壁构造設計中得到广泛的应用,所以是十分重要的.

开尔文(Kelvin, 1824—1907)在他与戴脫(P. G. Tait)合写的"論自然哲学"一书中, 在討論到薄板的弯曲理論时, 很浅显地解释了为何当挠度比板的厚度小得多时, 克希霍夫的初等理論是足够精确的. 对于边界条件,这书給了一个富有启发的見解. 克希霍夫已經証明:在边界上只須有两个边界条件,而幷不是如泊松所須的三个边界条件. 对于边界条件的减少,开尔文作出了物理上的說明. 运用关于靜力相当的圣維南 (St. Venant, 1797—1866) 原理,他指出:沿着板一边上的分布扭矩,可以用一靜力相当的分布剪力来代替. 因而在边上只須有关剪力与弯矩这两个边界条件. 对于沿矩形板的周界上作用着均布扭矩幷使板产生馬鞍形的曲率这特殊情形, 如将剪力代替扭矩就形成了在矩形板的一对角綫的两端各作用一垂直力 P, 而在另一对角綫的两端各作用一垂直力 $-P$ 这有趣味的系統. 这一系統的力是很容易加在板上的; 在这种方式下所产生的挠度可用来由实驗測定板的抗弯刚度.

---

1) 参閱他的 "Mechanik", 2d. ed., p. 450, 1877.

在近代結构中，薄板的被广泛运用促进了薄板理論的发展. 虽然有关的方程是由克希霍夫所得并曾用之于声学，但在工程中广泛地运用板的理論是在二十世紀才开始的. 欒范（M. Levy, 1838—1910）研究了两对边簡支而另两边为任意边界条件的矩形板. 这是具有很大的实用价值的；工程师們研究了多种特殊的荷重情况，并累积了最大挠度和最大弯矩的表. 别的形状的板，如椭圓形，三角形，扇形等也都被研究，并且出現了主要是討論薄板弯曲的专著[1]. 当得不到問題的精确解时，或者由級数所表示的解不适宜于实际应用时，工程师們就依賴于近似的分析. 在板的理論中广泛地运用了呂滋法，并得到很多重要的結果. 在某些复杂的情况下，采用差分方程，并用数字計算[2]来获得所需的資料.

在許多工程問題中，常常遇到四边固定的矩形板；但是这問題在数学上是有困难的. 柯阿洛維契（B. M. Куалович）[3]对这問題作出第一个可以作数字計算的解. 布勃諾夫（И. Г. Бубнов）[4]将这解簡化，并对各种大小的板作出最大挠度和最大弯矩的表. 爱文斯（T. H. Evans）[5]以鉄摩辛柯[6]的解为基础，制出更为詳尽的表.

作用在板上的一集中力，导致在荷重作用点的局部应力的研究. 这不能由板的近似理論来处理. 那达依（A. Nadai）[7]和华諾斯基（S. Woinowsky-Krieger）[8]曾討論过这問題. 好几位作者[9]曾研究过在一集中力作用下的簡支边矩形板. 在第五次国际力学会議所提出的論文中，鉄摩辛柯和楊（D. Young）[10]曾討論在集中力作用下的固定边矩形板.

为一系列等距离的柱所支承的板，在鋼筋混凝土設計中具有很大的实用意义. 葛拉叔夫（F. Grashof）[11]提出这問題的第一个近似解，而进一步的工作是由萊威（V. Lewe）[12]所作. 在以前所提及的那达依和迦辽金的书中也討論过这問題. 在华諾斯

---

1) S. Timoshenko, Курс теории упругости, ч. II.
A. Nadai, Elastische Platten, Berlin, 1925; Б. Г. Галёркин, Упругие тонкие плиты, 1933.

2) 参閱 H. Marcus 所著的书 "Die Theorie elastischer Gewebe", 2d ed., Berlin, 1932. 并参閱 D. L. Holl 的論文, J. Applied Mechanics, Vol. 3, p. 81, 1936.

3) 参閱他的博士論文, St. Petersburg, 1902.

4) 参閱 И. Г. Бубнов 的书 "Строительная механика корабля", ч. II, 1914.

5) J. Applied Mechanics, Vol. 6, p. A—7, 1939.

6) 参閱 Proc. 5th. Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938.

7) 参閱他的 "Elastische Platten", p. 308.

8) Ing-Arch., Vol. 4, p. 305, 1933.

9) 参閱 A. Nadai, Bauing., 1921, p. 11; S. Timoshenko, Bauing, p. 51, 1922. 并参閱 Гарелкин 的論文，发表于 Messenger Math., Vol. 55, p. 26, 1925.

10) J. Applied Mechanics, Vol. 6, p. A—114, 1939.

11) 参閱他的书 "Theorie d. Elasticität u. Festigkeit", 2d ed., p. 358, 1878.

12) 参閱他的书 "Pilzdecken", 2d ed., Berlin, 1926. 这书中有着对这問題一完整的文献.

基[1]的論文中，对这同一問題提出一新的探討.

公路路面板內的应力分析，引起了对于弹性地基上的板的注意. 这尤其明显地反映在韦司脫高德(H. W. Westergaard)[2]的工作中. 文脫(J. Vint)，爱耳哥德(W. N. Elgood)[3]和茂番(G. Murphy)[4]都曾做过这种板的試驗.

木料板及鋼筋混凝土板的許多应用，引导到各向异性板的弯曲理論. 虽然这一类的工作最早是由甘林(Gehring)[5]所創，但对实际有用的解主要是由許伯(M. T. Huber)所提供的. 他对于这問題的著作都搜集在"Probleme der Statik technish Wichtiger orthotroper Platten"(华沙，1929)一书中. 在他最近出版的弹性理論[6]一书內也可以得到这些資料. 这領域內进一步的工作主要是属于苏联工程师們的；所获得的成果都收集在列赫尼茨基(С. Г. Лехницкии)的"各向异性板"(Анизотропные пластинки)一书中.

在板的近似理論中，曾設挠度要比板的厚度小得多. 对于較大的挠度，必須考慮及板中間面的被拉伸. 这类方程为克希霍夫[7]和克萊勃許(A. Clebsch，1833—1872)所得. 方程是属于非綫性并且是难以处理的. 克希霍夫只将它們用于最簡单的情形，即中間面被均匀地拉伸. 这一領域的进展，主要是由工程师們在处理船壳的应力分析中所完成的. 在处理一长矩形板在均布荷重下的弯曲，布勃諾夫[8]将这問題归結到一狭条的弯曲問題，并对在船舶构造中所遇到的几种边界条件作出解答. 他并且作出图表，使应力分析大大地簡化；这些图表目前仍被广泛地运用于造船工程. 鉄摩辛柯[9]討論了沿边界为均布力偶所作用的圓形板的大挠度，并研究了初等綫性理論的准确范围. 爱斯·韦(S. Way)[10]从理論和实驗研究固定边的圓形板在均布荷重下的弯曲. 他并且分析[11]了在均布荷重下的矩形板，并証实当边长 a/b 之比大于2时，最大应力与布勃諾夫对于无限长板所得的結果相差无几. 福泼尔(A. Föppl)运用作用在板[12]

1) ZAMM, Vol. 14, p. 13, 1934.
2) 参閱 Ingenioren, Vol. 32, p. 513, 1923；并参閱他的論文，发表在 J. Public Roads, 1926, 1929, 1933.
3) Phil. Mag., 7th series, Vol. 19, p. 1, 1935.
4) Iowa Eng. Exp. Sta. Bull., Vol.135, 1937.
5) 参閱他的博士論文，Berlin, 1860.
6) Théorie de L'élasticité (Polish), Cracow, Vol. 1, 1948; Vol. 2, 1950.
7) 参閱他的"Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik", 2d ed., 1877；并参閱 F. Gehrin 的論文，其中采用了克希霍夫在 Crelle's J., Vol. 56 中所作的建議.
8) 这論文的英文翻譯发表在 Trans. Int. Naval. Architects., Vol, 44 p. 15.
9) Mem. Inst. Engrs. Ways of Communication, Vol. 89, 1915.
10) Trans. A.S.M.E., Vol. 56, p. 627, 1934. 并参閱 K. Federhofer, Luftfahrt-Forsch., Vol. 21, p. 1. 1944, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Math-naturw. Klasse, Abt. IIa, Vol. 155, p. 15, 1946.
11) 参閱論文，发表于 Proc. 5th. Intern. Congr. Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938.
12) 参閱他的"Technische Mechanik", Vol. 5, p. 132, 1907.

中間面內的应力的应力函数，将很薄的板的大撓度的一般方程加以簡化. 卡門（Von Kármán)[1] 将板"很薄"的要求舍弃，他的方程为那达依在他的所著的书中所采用，并被沙謨・欒范(Samuel Levy)[2] 用于矩形板的大撓度的研究.

在获得板的近似理論的方程时，我們設每一平行于中間面 xy 的薄层系处于平面应力状态，其中只有应力分量 σ_x, σ_y 及 τ_{xy} 不等于零. 对于較厚的板，关于这問題的一个完善的解，应考虑及六个应力分量. 在圣維南所翻譯的克莱勃許的书[3]中，給了这类問題几个解. 对于圓形板几个严格的解曾为科洛波夫(A. Korobov)[4]所得. 密歇耳(J. H. Michell)[5]提出板的严格理論的一般性的探討，并且由勒务(A. E. H. Love)在他的弹性力学书[6]中作了进一步的发展. 近来，板的严格理論已經引起工程师們的注意，并且有几个問題已經完全解出. 华諾斯基[7] 和迦辽金的論文尤其是应該特别地提出的.

* * *

苏联的学者們对于薄板力学作出了十分丰富的貢献. 因此，在这里另作一概括的叙述[8].

継承了那維埃、欒范等人以富里埃法求非齐次双調和方程的解的工作，Б. Г. 迦辽金作出了許多杰出的貢献；并将計算的結果制成大量的图表，以供工程設計所需. 他将自己的研究成果总結在"弹性薄板"一书中. 正如詹涅里杰在他的文章中所写的："毫不夸张地可以說，在迦辽金的著作間世之前，板的古典理論只是少数数学家們的园地. 但自从他的书出現以后，板的古典理論就成为工程师們眞正的工具." 并且，为大家所熟悉的迦辽金法，也是他在結合了板的計算而提出的. 巴泼考維奇 (П. Ф. Папкович) 在"船舶結构力学"这广博的著作中，不仅創造性地叙述了板的古典理論，并且杰出地发展和丰富了薄板的弯曲和稳定的計算方法，例如将欒范解推广到两相对边固定而其他两相对边任意支承等等. 符拉索夫 (В. З. Власов) 曾企图用結构力学中的方法来解弹性薄板問題. 洛克辛 (А. С. Локщин) 和菲利伯夫 (А. П. Филиппов) 得到了以一系列肋条加強的矩形板的弯曲、振动和稳定等复杂問題的

1) 参閱他的文章 "Festigkeit im Maschinenbau", Encykl. Math. Wiss., Vol. IV_4, p. 311, 1910.
2) 参閱 Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 846, 847, 853.
3) 参閱 "Théorie de L'elasticité des Corps Solides" (圣維南譯), 337 頁.
4) 参閱 S. Timoshenko, Theory of Elasticity, p. 315, 1934.
5) Proc. London. Math. Soc., Vol. 31, p. 100, 1900.
6) 参閱 A. E. H. Love, Theory of Elasticity, 4th ed, p. 473, 1927.
7) Ing.-Arch., Vol. 4, pp. 203, 205, 1933.
8) 詳尽的叙述，可参閱 Г. Ю. 詹涅里杰所写关于苏联学者們在板弯曲理論方面的研究的一篇专著[发表在"应用数学及力学"第七卷，(1948)]；或参閱胡海昌所作的"苏联在薄板力学方面的貢献"（发表在"弹性薄板的小撓度平衡問題"一书）、有关的文献亦可参閱以上两篇文章.

解. 洛克辛研究了矩形薄板为等刚度的肋条加固后的弯曲、振动与稳定. 菲利伯夫研究用肋条所加固的而支承在一系列分离的支柱上的薄板. 他們都是从欒范解为开始的. С. Г. 列赫尼茨基推广了 А. С. 洛克辛的解法，来研究用肋条加固的正交各向异性矩形板的弯曲. 为一系列的柱所支承的板的弯曲，是属于葢錫高林（С. А. Гершгорин）、勃洛赫（В. И. Блох）、尼柯拉也娃（М. В. Николаева）等人的工作. 这类問題的研究也是以欒范解为基础来进行的. 关于在弹性地基上的板的弯曲問題的研究，一类是以温克耳（Winkler）、齐姆門（Zimmerman）假設为出发点，另一类是按照板位于半无限弹性体上来处理的. 属于前一类的有价值的研究，是由盖适瓦諾夫（Н. М. Герсеванов）应用泛函断子所作的. 关于这类工作，后来为夏比罗（Г. С. Щапиро），馬里也夫（А. С. Малиев）等人所継續. 舍弃了温克耳的假設，将导致在数学上十分困难的方程組. 哥尔布夫-巴沙道夫（Горбунов-Посадов）以近似的解法計算薄板在半无限体上的問題. 热莫启金（Б. Н. Жемочки）以点的接触来代替板与基础之間的連續接触，然后运用結构力学中解超靜定問題的方法，提出在弹性地基上的圆板的近似計算. 此外，苏联学者們还运用了一系列新的方法来处理板的弯曲. 例如卢尔也（А. И. Лурье）运用复变函数研究圆形板在任意載荷下的弯曲. С. Г. 列赫尼茨基将复变函数法巧妙地用于各向异性板的弯曲問題. 关于这方面的工作，还有弗里德曼（М. И. Фридман）的有孔圆板的弯曲問題，哈里洛夫（Г. С. Халилов）的单联通簡支薄板弯曲問題等. 立博門（Ю. В. Репман）創造了一个新的方法，虛載荷法，以解在任意边界条件下、矩形板在任何載荷下的弯曲問題. 这方法系設想在板的边界上作用着以发散級数表示分布的弯矩和剪力，然后按照满足已知边界条件来解板的弯曲問題. 格林保格（Г. А. Гринберг）和烏弗良特（Я. С. Уфлянд）提出正交調和函数法，以解任意形状的固定边薄板的弯曲問題. 这个方法的要点是用正交調和函数的級数来表示齐次調和方程的通解. 考列涅夫（Г. Б. Коренев）用另一推广的区域 Ω（已知其格林函数）来代替板原有的区域 Ω_0，提出了相补載荷法以解薄板力学的边值問題. 龙次（Я. Л. Лунц）运用小参数法研究抛物綫形板、无限长条和椭圆形板的弯曲問題.

以上所述的，只能作为一个极其簡单而不周到的介紹. 但由此已經可以認識到苏联学者們継承了前輩的工作，对薄板問題所作的丰富的貢献.

参　考　文　献

[1] S. Timoshenko, History of Strength of Materials.

[2] Г. Ю. Джанелидзе, Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, Прикладная Математика и Механика, 1948.

[3] 胡海昌：苏联在薄板力学方面的貢献，“弹性薄板的小挠度平衡問題”，中国科学院.

第 一 章

弹 性 薄 板 理 論

弹性薄板的近似理論

在弹性薄板理論中所討論的板，其厚度 h 系远小于其他两尺寸. 并且，不同于弹性力学中的平面問題，作用于板的荷重并非位于平分板厚度的中間面內，而系垂直于板的平面，使板的中間面发生彎曲变形.

弹性薄板理論之所以称为近似理論，由于它是以几个假設为基础的. 当然，这些假設必須反映事物本質的主要方面，而舍弃了次要的；并且，从这些假設所导致的結論，必須很好地为实践所証实. 因此，一方面我們应了解到薄板理論的近似性，其中必然存在着一些并不很重要的自相矛盾之处（例如略去剪力对板弯曲的影响等）；在另一方面也必須認識到这理論表达了事物的主要特征. 如果不从这些假設出发，而企图获得滿足弹性力学的所有的微分方程的精确解，则将引导到目前認为是最困难的数学問題之一. 因而到現在为止，只是对于极个别的簡单情形，才获得了一些解. 从而就可以了解到薄板近似理論在工程实际中的重要性.

以发生弯曲变形前的中間面作为 xy 坐标面，z 軸垂直向下（如图 1）. 当板弯曲时，中間面內各点在 z 方向将有一位移 $w(x, y)$，称为板各点的挠度. 我們限 w 与 h 相比要小得多，这样就可以忽略板在弯曲时中間面內各点的应变. 这就是属于板弯曲的小挠度范畴的問題. 弹性薄板弯曲的理論，是建立在以下两个假設上的：

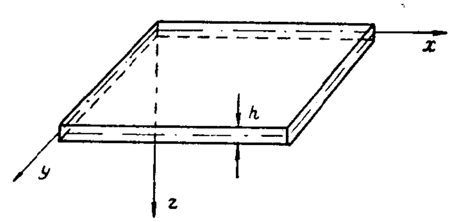

图 1

（1）在板变形前，原来垂直于板中間面的綫段（即設想板是由无数长为 h 的垂直于中間面的綫段材料密集而成的），在板变形以后，仍垂直于微弯了的中間面. 这就是在板与壳理論中的“法綫假設”.

（2）作用于与中間面相平行的諸截面內的正应力 σ_z，与横截面內的应力 σ_x, σ_y, τ_{xy} 等相比为很小，故可以忽略不計.

由于我們所討論的，只限于 $w(x, y)$ 較板的厚度要小得多的間題（小于板厚度的 $\frac{1}{5}-\frac{1}{4}$），故認为中間面內各点在 x 与 y 方向的位移 u 与 v 是不存在的. 但由第一个假設，在离中間面为 z 的点，其位移 u 与 v 各等于

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad v=-z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

于是应变分量各为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由第二个假設，从胡克定律得到：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],\\ \sigma_y&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],\\ \tau_{xy}&=-2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

应力分量 τ_{zx} 与 τ_{zy} 可由以下两个平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0$$

来决定. 將(3)式代入以上两式，并注意到在板的上下两面上 $z=\pm\frac{h}{2}$，$\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$，于是得到

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{1}{2}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial x}\right)+2G\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right],\\ \tau_{zy}&=\frac{1}{2}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\left[\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)+2G\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

自板截出底边为 dx 与 dy 高为 h 的一个微小的六面体；于是作用在它的側面上的諸应力分量將归結成弯矩 $M_x dy$，$M_y dx$，扭矩 $M_{xy} dx$ 及剪力 $Q_x dy$ 等：

$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x z\,dz,\quad M_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z\,dz,\quad M_{xy}=M_{yx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy} z\,dz$$

$$Q_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{zx}\,dz,\quad Q_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{zy}\,dz.$$