

513

013

L76d

高等教育自学考试应试宝典系列

高等数学(一)应试指导与仿真模拟

(经管类专科)

刘有炳 编著

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)应试指导与仿真模拟(经管类专科)/刘有炳编著,一西安:西北工业大学出版社,2001.4

(高等教育自学考试应试宝典系列)

ISBN 7-5612-1330-1

I. 高… II. 刘… III. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08333 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:029—8493844

网 址: <http://www.nwpup.com>

印刷者:西安市长安县第二印刷厂

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:7.875

字 数:198 千字

版 次:2001 年 4 月 第 1 版 2001 年 4 月 第 1 次印刷

印 数:1~5 000 册

定 价:全套定价:23.00 元(共 2 册) 本册定价:11.00 元

前 言

为了适应参加高等教育自学考试“高等数学(一)”(经管类)考生的学习需要而编写了这本自学指导书,其内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和微分方程.每章都包括如下六个部分:

(一)主要内容:用精炼的语言列出本章主要内容,旨在使考生熟悉本章内容.

(二)自学考试基本要求:指出本章考试中应掌握什么?了解什么?理解什么?并突出重点和难点.

(三)自学考试应记公式:列出参加自学考试应记公式,并指出必须熟记的公式.

(四)典型例题:针对性地举出一定数量的例题进行分析,以帮助考生理解基本概念,提高计算能力.

(五)自学考试题型:把过去多年“高等数学(一)”考试题分类列出,并作出解答,以便考生熟悉自考试题类型.

(六)自测题:每章都有反映本章内容的自测练习题,让考生参加自学考试前练习,并给出参考答案.

该书是根据全国高等教育自学考试“高等数学(一)”(经管类)考核目标而编写的.作者具有几十年“高等数学”教学经验,长期从事“高等数学(一)”(经管类)自学考试的命题、教学、辅导和改卷等工作,具有丰富的自学考试辅导经验.

作者对这本书的结构和编写形式做了新的尝试,目的在于对考生有所帮助,本书稿经过近6年的试用,今年又改进并公开出版.

这本书的编写和出版,得益于西北工业大学出版社的大力支

持,在此,谨向他们表示衷心的感谢.

由于水平所限,书中在内容的取舍、结构的安排以及例题选取等方面如有不妥之处,诚望读者指正,以便进一步修改.

作 者

2001 年 1 月

目 录

第一章 函数	1
一、主要内容	1
二、自学考试基本要求	4
三、自学考试应记公式	4
四、典型例题	5
五、自学考试题型	9
六、自测练习题	13
第二章 极限与连续	17
一、主要内容	17
二、自学考试基本要求	21
三、自学考试应记公式	22
四、典型例题	23
五、自学考试题型	30
六、自测练习题	34
第三章 导数与微分	37
一、主要内容	37
二、自学考试基本要求	39
三、自学考试应记公式	40
四、典型例题	41
五、自学考试题型	46
六、自测练习题	53
第四章 中值定理与导数的应用	57
一、主要内容	57
二、自学考试基本要求	61

三、自学考试应记公式	61
四、典型例题	62
五、自学考试题型	66
六、自测练习题	74
第五章 不定积分	78
一、主要内容	78
二、自学考试基本要求	80
三、自学考试应记公式	82
四、典型例题	83
五、自学考试题型	88
六、自测练习题	93
第六章 定积分及其应用	98
一、主要内容	98
二、自学考试基本要求	101
三、自学考试应记公式	102
四、典型例题	102
五、自学考试题型	107
六、自测练习题	116
第七章 多元函数微积分	120
一、主要内容	120
二、自学考试基本要求	129
三、自学考试应记公式	130
四、典型例题	131
五、自学考试题型	139
六、自测练习题	147
第八章 无穷级数	155
一、主要内容	155
二、自学考试基本要求	160
三、自学考试应记公式	162

四、典型例题	163
五、自学考试题型	168
六、自测练习题	181
第九章 微分方程初步	187
一、主要内容	187
二、自学考试基本要求	189
三、自学考试应记公式	190
四、典型例题	190
五、自学考试题型	194
六、自测练习题	204
自测练习题参考答案	207
附录	216
模拟试卷一	216
模拟试卷二	223
1999 年高等教育自学考试高等数学(I)(财)试卷	230
2000 年高等教育自学考试高等数学(I)试卷	237

第一章 函 数

一、主要内容

(一)集合

具有某种性质的事物的全体称为一个集合,集合中的事物称为集合的元素.

有限集:若集合中的元素是有限个,则称为有限集.

无限集:若集合中的元素是无穷多个,则称为无限集.

空集:不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

全集:由所有研究对象的全体构成的集合称为全集,记作 U .

1. 集合的表示法

(1)列举式:按任意顺序列出的集合的所有元素,并用括号 $\{ \}$ 括起来.

(2)构造式:如果 A 为满足性质 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合,则记为 $A = \{ a | P(a) \}$.

(3)图式:用一个封闭曲线围成的平面区域代表一个集合.

2. 集合与集合之间的关系

(1)子集 设两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的每一个元素都属于 B ,则称 A 为 B 的子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(2)集合的相等 设集合 A 和 B ,若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

3. 集合的运算

(1)集合的并 由集合 A 和集合 B 的所有元素构成的集合,

称为 A 与 B 的并, 记作 $A \cup B$.

(2) 集合的交 由集合 A 与集合 B 的公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 记作 $A \cap B$.

(3) 集合差 设有集合 A 和集合 B , 属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记作 $A - B$.

(4) 集合的余(或补) 设有全集 U , 全集中所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 的余集, 记为 $\bar{A}$.

4. 集合的运算规律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

集合的一般运算顺序是余、交、并, 先括号内后括号外.

(二) 函数

1. 定义 设 x 与 y 是变量, 如当变量 x 在某一范围内取一数值时, 变量 y 按照一定的规律, 总有确定的数值和它对应, 则变量 y 叫做变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

2. 函数的表示法

(1) 分析法(公式法)

(2) 列表法

(3) 图像法

3. 函数的特性

(1) 函数的奇偶性 如果函数 $y = f(x)$ 对于定义域内的一切 x 满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数; 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴, 奇函数的图形对称于坐标原点.

(2) 函数的单调性 设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内任意两点

$x_1 < x_2$: ①有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加. ②有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少.

(3) 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 对于任意 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$ (M 为一个正数), 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 否则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内无界.

(4) 函数的周期性 对函数 $y = f(x)$ 的定义域内的一切 x 值, 若存在一个正数 T , 使得 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上述关系的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

4. 反函数

函数 $y = f(x)$ 若将 y 当作自变量, x 当作函数, 即 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数, 而 $f(x)$ 叫做直接函数.

因为习惯上总是用 x 表示自变量, y 表示函数, 所以通常把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改写成

$$y = \varphi(x) \text{ 或 } y = f^{-1}(x)$$

函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y = x$.

5. 复合函数

如果 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数: $u = \varphi(x)$, 则称 y 是 x 的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

6. 基本初等函数

(1) 幂函数: $y = x^a$ (a 为实数)

(2) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(3) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(4) 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

(5) 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成并用一个式子表示的函数,称为初等函数.

二、自学考试基本要求

(1)掌握集合、区间、邻域等概念,熟悉集合中常用的符号如“ $\cap$ ”、“ $\cup$ ”、“ $\subset$ ”、“ $\in$ ”等等,会用集合表示区间和简单的平面区域,如由直线、圆或抛物线等常见的曲线围成的平面区域.

(2)掌握实数的绝对值概念及其简单性质,会用不等式和绝对值表示区间和邻域.

(3)掌握函数概念,理解分段函数的意义,会求函数的定义域和函数值,会建立简单应用问题的函数关系,掌握函数的奇偶性和单调性的概念,并会用定义判断奇偶性,了解函数的周期性和有界性概念.

(4)掌握复合函数的概念,会分析函数的复合过程,理解反函数的概念及其图形特征.

三、自学考试应记公式

(1)奇函数: $f(-x) = -f(x)$

(2)偶函数: $f(-x) = f(x)$

(3)幂函数: $y = x^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, -1, \frac{1}{2}$) 的图形

(4)指数函数: $y = a^x$ 与 $y = e^x$ 的图形

(5)对数函数: $y = \log_a x$ 与 $y = \ln x$ 的图形

(6)三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 的图形

(7)反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 的图形

四、典型例题

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \ln(x-3) + \sqrt{x^2-9}$$

$$(2) y = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

$$(3) y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(4) y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$$

解 (1) 由 $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x > 3 \\ |x| \geq 3 \end{cases}$, 原函数的定义域为 $(3, +\infty)$.

(2) 由 $\begin{cases} 1-\sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 原函数的定义域为 $(-\infty, 0), (0, 1]$.

(3) 由 $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \neq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 原函数的定义域为 $[-1, 1)$.

(4) 由 $\sin x - \cos x \neq 0, \tan x \neq 1$, 得 $x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$, 因此原函数的定义域为 $x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的一切实数.

例 2 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数?

$$(1) f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1, 0) \\ x-1, & x \in (0, 1) \end{cases}, \quad g(x) = f^{-1}(x)$$

$$(4) f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

解 (1) $f(x) = \ln x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$g(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

(2) $f(x) = x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

而 $f(x) = x$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的值域是 $(0, +\infty)$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

(3) 由于 $g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in (0, 1) \\ x+1, & x \in (-1, 0) \end{cases}$, 它与

$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1, 0) \\ x-1, & x \in (0, 1) \end{cases}$ 相同,

所以 $f(x)$ 与 $g(x) = f^{-1}(x)$ 是同一函数.

(4) $f(x) = |x|$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,

$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

例 3 设 $f(x) = x2^x$, 求 $f(0), f(-2), f(\frac{1}{x}), f(x_0)$.

解 $f(0) = 0 \times 2^0 = 0$

$$f(-2) = (-2) \times 2^{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \times 2^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x_0) = x_0 2^{x_0}$$

例 4 设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1 = t$, 则 $x = t-1$

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6$$

因此 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

【注意】 解此类题的一般思路是令 $t = 1 + x$, 解出 x , 再代入到原式中, 就可得到 $f(x)$.

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(1), f(2), f(-\frac{\pi}{4})$.

解 $f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$$f(-\frac{\pi}{4}) = \left| \sin(-\frac{\pi}{4}) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 6 设 $f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 求 $f(x+1), g(\frac{1}{x}), f[g(x)]$ 和 $g[f(x)+2]$.

【分析】 解此类题为求自变量取不同值所对应的函数值, 这时只要搞清楚对应法则, 问题就迎刃而解, 这里 $f(\quad) = 2(\quad) - 1, g(\quad) = \frac{1}{1+(\quad)^2}$

$$1, g(\quad) = \frac{1}{1+(\quad)^2}$$

解 $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$

$$g(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f[g(x)] = 2[g(x)] - 1 = 2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1$$

$$\begin{aligned} g[f(x)+2] &= \frac{1}{1+[f(x)+2]^2} = \\ &= \frac{1}{1+[(2x-1)+2]^2} = \\ &= \frac{1}{1+(2x+1)^2} \end{aligned}$$

例 7 设 $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$.

解 与例 4 类同, 令 $t = \frac{x+1}{x}$, 解得 $x = \frac{1}{t-1}$ 代入原函数有

$$f(t) = \frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2} + \frac{1}{t-1} =$$

$$1 + (t-1)^2 + (t-1) =$$

$$t^2 - t + 1$$

因此 $f(x) = x^2 - x + 1$

例 8 判断下列函数的奇偶性:

解 (1) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(3) $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} = f(x)$

因此 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 由于 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) =$

$$\ln(\sqrt{1+x^2} - x) =$$

$$\ln \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$-\ln(\sqrt{1+x^2} + x) = -f(x)$$

因此 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 由于 $f(-x) = \frac{1 + \sin(-x) - \cos(-x)}{1 + \sin(-x) + \cos(-x)} =$

$$\frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$$

因为 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

例 9 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1)$$

$$(2) f(x) = e^x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$$

解 (1) 两边平方: $y^2 = x^2 - 1$, 即 $x^2 = y^2 + 1$,

当 $x \geq 1$ 时, $y \leq 0$, 故有 $x = \sqrt{y^2 + 1} \quad (y \leq 0)$

因此所求的反函数为 $y = \sqrt{x^2 + 1} \quad (x \leq 0)$.

(2) 由于 $y = e^x + 1$ 解出 $x = \ln(y - 1) \quad (y > 1)$

故 所求的反函数为 $y = \ln(x - 1) \quad (x > 1)$.

(3) 当 $x \geq 0$ 时, 由 $y = x^2$ 得 $x = \sqrt{y} \quad (y \geq 0)$

当 $x < 0$ 时, 由 $y = x^3$ 得 $x = \sqrt[3]{y} \quad (y < 0)$

故 所求的反函数为 $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x < 0 \end{cases}$.

例 10 某商店对某种商品根据购买量的大小规定了如下的价格, 购买量在 10 kg 以下(包括 10 kg)部分, 每千克 20 元; 购买量少于等于 100 kg 时, 其中超过 10 kg 的部分, 每千克 15 元; 购买量超过 100 kg 的部分, 每千克 10 元, 试求出购买量与费用之间的函数关系.

解 设购买量为 x kg, 则费用函数为 $C(x)$, 由题意, 得

$$C(x) = \begin{cases} 20x, & 0 < x \leq 10 \\ 200 + 15(x - 10), & 10 < x \leq 100 \\ 200 + 1350 + 10(x - 100), & x > 100 \end{cases}$$

五、自学考试题型

(一)单项选择题

1. 若 $A = \{a, b, c\}$, 则 A 的子集共有④.

① 3个 ② 5个 ③ 7个 ④ 8个

2. 下列函数中满足关系 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 的函数是③.

① $f(x) = e^x$ ② $f(x) = \ln x$
③ $f(x) = ax$ ④ $f(x) = ax + b$

3. 设 $A = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则有④.

① $A \supset B$ ② $A \subset B$
③ $(A \cap B) \supset B$ ④ $(A \cap B) \subset B$

4. 若 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$, 则 $f(x) =$ ③.

① $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ ② $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$
③ $(1+x)^2$ ④ $(1-x)^2$

5. 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x + 3$, 则 $f[g(x)]$ 的定义域是①.

① $(-3, +\infty)$ ② $[-3, +\infty)$
③ $(-\infty, 3]$ ④ $(-\infty, 3)$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$ ③.

① 0 ② 1 ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x+2)$ 的定义域为④.

① $[0, 1]$ ② $[-1, 1]$
③ $[-2, 1]$ ④ $[-2, -1]$

8. 函数 $y = \lg(x-1)$ 的反函数是②.

① $y = e^x + 1$ ② $y = 10^x + 1$
③ $y = x^{10} - 1$ ④ $y = x^{-10} - 1$

9. 曲线 $\begin{cases} x = \sin t \\ x = \cos 2t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{6}$ 处对应点为②.

① $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
③ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$