

肖亚兰等著

西北大学出版社

上

高等数学

教学目标与目标检测题

● 高等数学教学目标与目标检测题 ● 高等数学教学目标与目标检测题

013
9018

977449

013
9018

高等数学教学目标与目标检测题

主编：肖亚兰 王寿生
编者：陆全 扬月茜 戎海武
李怀生 张又林 肖亚兰
王寿生

西北大学出版社

(陕)新登字 011 号

高等数学教学目标与目标检测题

肖亚兰等编著

西北大学出版社出版发行

(西安市太白路)

新华书店经销 陕西广播电视印刷厂印刷

787×1092 毫米 1/16 开本 16 印张 字数: 360 千

1993 年 6 月第 1 版 1993 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—8000

ISBN7-5604-0489-8/O·27 定价: 7.80 元

前 言

高等数学课是理工科大学一门重要的基础理论课，这门课程教学质量的高低对后续课程的学习有很大影响。长期以来，已有为数不少的教师为提高该课程的教学质量从教与学两方面进行了各种探索和尝试，并取得了令人可喜的成果。但是，如何充分发挥评估对教与学的反馈作用，控制教学过程最优化，达到提高教学质量的目的，这一问题以往尚缺乏研究。

另一方面，教师每每把大量的时间投入到繁重的重复性的批改作业中去，使得他们没有足够的精力用于自身业务水平的提高及科学研究。因此，怎样才能既减轻教师批改作业的工作量，又能保证教学质量不断提高，这是每一位高等数学课教师所关心的问题。

“微机辅助高等数学目标教学”便是我们解决这两个问题的一次新尝试。为了大面积提高高等数学课的教学质量并部分减轻教师批改作业的工作量，我们从1990年底开始进行这项教改试验，并编写了这本“高等数学教学目标与目标检测题”。

下面就谈谈高等数学目标教学的几个有关问题。

一、什么是目标教学

“目标教学”即对教学过程进行有序的微观控制。实现微观控制的途径是通过目标检测使师生及时、准确地获取反馈信息，知道哪些目标业已达到，哪些知识尚未掌握，并以此为依据对教学工作及时矫正，以便使大部分学生在规定的时间内达到目标要求。

二、微机辅助高等数学目标教学的特点

1. 目标教学强调师生双方都应明确教学目标

以往的教学中，教学目标基本上是单向的。即教师根据手中持有的“高等数学课程教学基本要求”讲课，而学生则大多是从教材及教师的讲授中体会教学目标，因而使学习带有一定的盲目性。实行目标教学，目标发到学生手里，且目标较之“基本要求”来得具体，学生容易掌握，于是不仅教师教有目标，学生学习也目标明确，因而能更好地发挥教师的主导作用和学生的主体作用。

2. 目标教学是对评估方法的改革

教学中，教师的讲授、学生的学习和教学质量的评估是构成整个教育理论系统的三个相辅相成的子系统。但长期以来，人们习惯于把注意力集中在对教与学的研究上，而对评估对于教与学的反馈作用的重要性却重视不够，或者虽然注意到了，但又苦于没有足够的时间和精力投入到这一需要耗费很多时间、很多精力的工作中去。

目标教学这项教改不是对教师讲授方法的改革，也不是对学生学习方法的改革，而是对评估方法的改革。因为几十年来以至目前还沿用的教学评价（即期末考试或评估考试）是属于终结性的。这种评价的目的是对学生分等级或对其能否进一步学习、升学作结论，或是使教师了解自己的教授效果。在实际中是把教学过程和评价过程区分开来，教学旨在训练学生，评价则是鉴定学生达到的程度。终结性评价对于帮助学生学会未学好的知识作用不是很大。

而形成性评价与此相反，它实施于教学的过程之中，它特别重视教学反馈与矫

EAB26/05

正。通过检测，教师可清晰地了解学生在某章或某节教学中目标的达成情况。这种及时的反馈，为教学活动中应采取的矫正方式、内容提供信息，帮助学生发现自己哪些目标未达成，从而重新安排时间和精力补课。对达到目标的学生起着增强自信的作用；对那些目标部分达成的学生，也会起“强化”的作用。故形成性评价对大面积地提高学生的学业成绩有积极的作用，它主要是帮助学生学好当前的课程。

3. 微机辅助高等数学目标教学

形成性评价对大面积地提高学生的学业成绩有积极的作用。但是，如果没有计算机的帮助，形成性评价的实施必将给教师增加很大的负担，必将占用教师过多的时间。

“微机辅助高等数学目标教学”正是要充分发挥计算机的作用，用微机批改检测题的答卷，并给出统计、评价，达到了大大节约教师时间的目的。

三、教学目标的编制

教学目标的编制根据下述原则：

1. 根据全国工科数学课程指导委员会制定的“高等数学课程教学基本要求”；
2. 根据布卢姆教育目标分类学理论；
3. 根据教师的教学经验和体会。

布鲁姆(B.S. Bloom)博士是当代倡导教育改革的世界著名教育学家、心理学家、芝加哥大学荣誉教授，也是我国华东师范大学的荣誉教授。本世纪50年代，他以教育目标分类学理论闻名于世，其贡献在于把一般的教育目标具体化到学校的每一学科中去。他把教育要达到的全部目标分为三个大的领域——认知领域、情感领域与动作技能领域。其中，认知领域包括有关知识的回忆或再现以及理解、智力与技能形成方面的目标。这是目前许多流行的测验编制研究中最关键的领域。布鲁姆关于认知领域的目标分类是从低级的知识和信息层次开始，达到高级的评价层次。即识记、领会、运用、分析、综合、评价。这种理论更强调以能力为目标的教学，能力建立在知识的基础上，知识目标和能力目标是由低向高一层一层地发展，最终可使学生在知识和能力两方面都得到发展。这种分类法是符合人的认识规律的。

编写教学目标时，我们根据每一章的情况将该章分为若干个单元，并将每个单元的内容概括为若干个知识点，然后，再根据“高等数学课程教学基本要求”及布鲁姆的教育目标分类理论制定出每一个知识点所要达到的教学目标及学习水平(识记、领会、运用、分析综合)。

四、目标检测题的编制

1. 目标检测题从内容上讲，应能基本上覆盖住所有的知识点；从难易程度上讲，应能全面反映教学要求并具有较好的区分度。

2. 为了能在计算机上进行批改，我们把目标检测题都编成了单项选择题。同目前出版的一些标准化习题集不同之处在于，题解中不仅给出了每个题的正确解答，而且对于那些学生常选的错项，也说明了得出这种错解的原因，为学生进行自我矫正提供了进一步的帮助(需要说明的一点是，由于此项工作开始不久，所以这方面还做得很不够)。

3. 为每个单元配备了平行的两套目标检测题，其中的一套供全体学生使用，另

一套则供第一次检测时未达标的学生在对该部分知识进行补救后使用。

4. 每个目标检测题上都标明了该题目要考查的知识点及要考查学生在哪一方面的能力水平。这样, 便于学生通过检测知道自己哪一方面的知识掌握得不好, 哪一方面的能力较差, 为下一步应采取的补救措施指明方向。

五、目标教学的实施

微机辅助高等数学目标教学一方面能充分发挥形成性评价对提高学生学业成绩的积极作用, 另一方面能部分减轻教师批改作业的工作量。实施中, 我们把编制好的高等数学教学目标及目标检测题发给学生, 并适当减少作业的数量。在一部分内容讲完后, 我们及时地把这部分内容的目标检测题答卷收上来, 用计算机批改。批改后再把答卷连同该单元的目标检测题解答发给学生, 同时对学生学习中存在的问题及教师讲授中的失误进行补救。

参加本书编写工作的有陆全、杨月茜、戎海武、李怀生、张爻林、肖亚兰、王寿生。北京航空航天大学的李恒沛老师等及南京航空学院的孙建泉老师为本书提供了素材, 西北工业大学孙家永教授及南昌航空学院数学教研室对我们的工作给予了大力的支持。此外, 西北工业大学赵镇西老师、王德如老师分别对第一至七章、第八至十二章的原稿提出了宝贵意见, 在此一并致谢。

由于编者水平所限, 加之时间仓促, 错误之处在所难免, 欢迎读者批评指正。

编者

1993年5月

编写及使用说明

一、题目编号

题目编号采用7位编码。第一、二位码为章号(以同济大学的高等数学教材第三版为准),第三位码为单元号,第四位码为目标检测题的套号,第五位码为能力水平的等级号。其中各能力水平的等级号分别为:识记1,领会2,运用3,分析综合4。

如:0121305表示该题是第一章、第二单元、第一套目标检测题里的第五题,该题目是考察学生的运用能力的。

二、能力分类

识记:指记住学习过的材料。

领会:指能够解释概念、理论和运算方法的内容并知道其由来;知道同一概念、理论的几种不同表述方式;能够用另一种表述方式来解释概念和理论等。

运用:指能将学习过的概念、理论、公式应用于新的环境,解决一些简单的问题。

分析与综合:指能将所讨论的问题分解成几个较简单的问题,明确各个简单问题的层次,弄清它们之间的关系,并能综合运用有关的概念、理论、公式解决问题,对所学知识达到了融汇贯通。

三、各章编排顺序

首先是该章的“教学基本要求”。这是从“高等数学课程教学基本要求”中摘录下来的。

其次是根据上述“教学基本要求”及该章内容编写的知识要点、重点、教学目标及目标检测题。

本书分两册,一册为“高等数学教学目标与目标检测题”,另一册为“高等数学目标检测题解答”。学生所需目标检测题解答于各单元的目标检测题答卷批改完后一并下发。

目 录

前言	1
编写及使用说明	4
高等工业学校高等数学课程教学基本要求概述	1
第一章 函数、极限与连续	1
第一单元	2
第二单元	5
第三单元	11
第二章 导数与微分	15
第一单元	15
第二单元	22
第三章 中值定理与导数的应用	29
第一单元	29
第二单元	34
第四章 不定积分	40
第一单元	40
第二单元	46
第五章 定积分	54
第一单元	54
第二单元	60
第六章 定积分的应用	64
第七章 空间解析几何与向量代数	68
第一单元	68
第二单元	73
第八章 多元函数微分法及其应用	79
第一单元	79
第二单元	85
第九章 重积分	90
第一单元	90
第二单元	96
第十章 曲线积分与曲面积分	102
第一单元	102
第二单元	107
第十一章 无穷级数	113
第一单元	113
第二单元	118
第三单元	123
第十二章 微分方程	128
第一单元	128
第二单元	133

参考书目	138
附录: 目标检测题解答	1
第一章 函数与极限	1
第一单元	1
第二单元	3
第三单元	7
第二章 导数与微分	10
第一单元	10
第二单元	16
第三章 中值定理与导数的应用	23
第一单元	23
第二单元	28
第四章 不定积分	33
第一单元	33
第二单元	37
第五章 定积分	42
第一单元	42
第二单元	47
第六章 定积分的应用	52
第七章 空间解析几何与向量代数	55
第一单元	55
第二单元	58
第八章 多元函数微分法及其应用	63
第一单元	63
第二单元	67
第九章 重积分	73
第一单元	73
第二单元	77
第十章 曲线积分与曲面积分	81
第一单元	81
第二单元	85
第十一章 无穷级数	90
第一单元	90
第二单元	95
第三单元	100
第十二章 微分方程	103
第一单元	103
第二单元	107

高等工业学校 高等数学课程教学基本要求概述

高等数学课程是高等工业学校各专学生一门重要的基础理论课,它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量专门人才服务的.

通过本课程的学习,要使学生获得:

1. 函数、极限、连续;
2. 一元函数微积分学;
3. 向量代数和空间解析几何;
4. 多元函数微积分学;
5. 无穷级数(包括傅里叶级数);
6. 常微分方程

等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能,为学习后续课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础.

在传授知识的同时,要通过各个教学环节逐步培养学生具有抽象概括的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力,还要特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力.

第一章 函数、极限、连续

教学基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数的单调性、周期性和奇、偶性.
3. 了解反函数和复合函数的概念.
4. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.
5. 能列出简单实际问题中的函数关系.
6. 了解极限的 $\varepsilon-N$ 、 $\varepsilon-\delta$ 定义(对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求),并能在学习过程中逐步加深对极限概念的理解.
7. 掌握极限四则运算法则.
8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则) 会用两个重要极限求极限.
9. 了解无穷大、无穷小的概念,掌握无穷小的比较.
10. 理解函数在一点连续的概念,会判断间断点的类型.
11. 了解初等函数的连续性,知道在闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大值最小值定理).

注:基本要求的高低用不同词汇加以区分,对概念、理论从高到低用“理解”、“了解”、“知道”三级区分,对运算、方法从高到低用“熟练掌握”、“掌握”、“会”或“能”三级区分.“熟悉”一词相当于“理解”并“熟练掌握”.

第一单元

一、知识要点

1. 函数的概念;
2. 单调函数、有界函数、奇、偶函数、周期函数;
3. 基本初等函数;
4. 反函数;
5. 复合函数;
6. 初等函数(含双曲函数与反双曲函数);
7. 分段函数;
8. 建立函数关系.

二、重点

1. 函数概念;
2. 复合函数;
3. 初等函数.

三、目标要求

1. 识记

- (1) 记住函数、函数定义域、函数值及函数值域的定义;
- (2) 记住单调函数的定义及其几何意义;
- (3) 记住有界函数的定义;
- (4) 记住奇、偶函数和周期函数的定义以及它们的图形特点;
- (5) 记住基本初等函数的分析式、定义域、值域、图形及其奇偶性、单调性、有界性等主要性质;
- (6) 记住反函数的定义;
- (7) 记住复合函数的定义;
- (8) 记住初等函数的定义;
- (9) 记住分段函数的定义;
- (10) 记住双曲函数和反双曲函数的定义、表达式、定义域、值域及其简单性质;
- (11) 记住 $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$ 的定义及其图形.

2. 领会

- (1) 领会邻域的概念;
- (2) 领会函数的概念,领会自变量与因变量的对应关系及函数的定义域是函数的两个最基本的要素;
- (3) 领会两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等,是指它们有相同的定义域 D ,且对任何 $x \in D$,有 $f(x) = g(x)$;
- (4) 领会函数符号的意义;
- (5) 领会分段函数是自变量在不同范围内有不同表示式的一个函数,它的定义域就是不同表示式所限自变量取值范围的全体;
- (6) 领会单调函数、有界函数、奇、偶函数和周期函数的特性;

- (7) 领会直接函数与其反函数的概念及反函数的表示法;
 (8) 领会复合函数的概念,弄清中间变量与自变量的关系,注意并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数;

(9) 领会什么是基本初等函数和初等函数,知道双曲函数是初等函数.

3. 运用

- (1) 能列出简单实际问题的函数关系;
 (2) 会求函数的定义域(包括分段函数的定义域);
 (3) 会求函数值和函数的值域;
 (4) 会用定义验证函数是否为单调函数、有界函数、奇、偶函数和周期函数等;
 (5) 会求一些用解析式表示的函数的反函数,并会确定反函数的定义域;
 (6) 能将几个函数复合成一个复合函数,也会将一个复合函数表示成几个简单函数的复合;
 (7) 会利用函数的单调性证明一些不等式;
 (8) 会利用奇、偶函数和周期函数的图形特点以及图形迭加、平移等方法作出一些简单函数的图形.

4. 分析与综合

- (1) 能综合运用复合函数的定义及定义域的求法,求抽象函数的复合函数及分段函数的复合函数,并确定它们的定义域;
 (2) 能综合运用奇、偶函数和周期函数的性质和复合函数的概念,讨论复合函数的奇、偶性和周期性等.

四、目标检测题

目标检测题(1)

0111201 领会 函数的概念

下列各组中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数的组是 ()

A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$

B. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

C. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln |x|$

D. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

0111202 领会 函数的复合

设 $f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < x < 1 \\ x & 1 \leq x < e \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] =$ ()

A. $\begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < x < 1 \\ e^x & 1 \leq x < e \end{cases}$

B. $\begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ e^x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} e^x & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ e^x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

0111303 运用 函数的定义域

函数 $f(x) = \frac{1}{\lg(2-x)} + \sqrt{100-x^2}$ 的定义域是 ()

A. $[-10, 10]$ B. $[-10, 1) \cup (1, 10]$

C. $[-10, 1) \cup (1, 2)$ D. $[-10, 2)$

0111304 运用 求函数值

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ x+9 & -2 < x < 2 \\ 2^x & x \geq 2 \end{cases}$ 则下列等式中不成立的是 ()

A. $f(-2) = f(2)$ B. $f(1) = f(4)$

C. $f(-1) = f(3)$ D. $f(0) = f(-3)$

0111305 运用 函数性质

函数 $f(x) = 10^{-x} \sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 内是 ()

A. 偶函数 B. 单调函数 C. 有界函数 D. 奇函数

0111306 运用 反函数

设函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 2 \\ x^2 - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ 则其反函数 $y = f^{-1}(x) =$ ()

A. $\begin{cases} 1-x & x < 3 \\ (x+1)^2 & x \geq 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-1 & x < 3 \\ \sqrt{x+1} & x \geq 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 1-x & x < 2 \\ (x+1)^2 & x \geq 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-1 & x < 2 \\ \sqrt{x+1} & x \geq 2 \end{cases}$

0111307 运用 函数图形

在直角坐标系中, 参数方程 $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 2\cos t \end{cases}$ 的图形是 ()

A. 双曲线的一支 B. 抛物线的一部分

C. 椭圆的一部分 D. 正弦曲线的一个周期

目标检测题(2)

0112201 领会 函数记号

设 $f(x-1) = x^2 + 2x + 1$, 则 $f(x) =$ ()

A. $(x+2)^2$ B. x^2 C. $x^2 + 4x + 2$ D. $(x+1)^2$

0112202 领会 函数的复合

设 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 2x + 1$, 则复合函数 $f[g(x)] =$ ()

A. $4x^2 + 4x + 3$ B. $4x^2 + 4x - 1$

C. $2x^2 - 3$ D. $x^2 + 2x + 1$

0112303 运用 函数的定义域

函数 $y = \frac{1}{x} \lg \frac{1-x}{1+x}$ 的定义域是 ()

- A. $x \neq 0$ 及 $x \neq -1$ 的一切实数 B. $(0, +\infty)$
C. 满足不等式 $0 < |x| < 1$ 的一切实数 D. $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

0112304 运用 求函数值

设 $f(x) = p \sin x + 2q x \cos x + x^2$, 其中 p, q 为常数, 已知 $f(2) = 3$, 则 $f(-2) =$ ()

- A. 3 B. 5 C. $p \sin 2 - 4q \cos 2 + 4$ D. $8q \cos 2 + 5$

0112305 运用 函数性质

下列函数中为奇函数的是 ()

A. $f(x) = \begin{cases} x & |x| > 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$

B. $\psi(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ x & |x| \geq 1 \end{cases}$

C. $g(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ -\frac{1}{e^x} & x < 0 \end{cases}$

D. $h(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{e^x} & x < 0 \end{cases}$

0112306 运用 反函数

函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数是 ()

- A. $y = 1 + \lg(x+2)$ B. $y = 1 + \lg(x-2)$
C. $y = 1 + \ln(x+2)$ D. $y = 1 - \lg(x+2)$

0112307 运用 建立函数关系

已知 $f(x)$ 是线性函数, 且 $f(-1) = 2, f(1) = -2$, 则 $f(x) =$ ()

- A. $-2x$ B. $2x$ C. $x-3$ D. $x+3$

第二单元

一、知识要点

1. 数列极限的概念;
2. 收敛数列的性质;
3. 函数极限的概念与性质;
4. 左、右极限及其与极限的关系;
5. 无穷小与无穷大的概念及它们之间的关系;
6. 无穷小的性质(有限个无穷小之和是无穷小, 有界函数与无穷小的乘积是无穷小, 无穷小与极限的关系);
7. 无穷小的比较;
8. 极限的运算法则;
9. 两个重要极限;

10. 极限存在的准则(夹逼准则,单调有界准则,*柯西准则);

11. 数列极限与函数极限的关系.

二、重点

1. 极限的概念;

2. 无穷小;

3. 极限的四则运算;

4. 两个重要极限.

三、目标要求

1. 识记

(1) 记住数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义;

(2) 记住收敛数列的性质(极限的唯一性与收敛数列的有界性);

(3) 记住函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 和 $\varepsilon-X$ 定义;

(4) 记住左、右极限的定义及左、右极限存在且相等是极限存在的充分必要条件;

(5) 记住函数极限的性质;

(6) 记住无穷小、无穷大的定义及高阶、低阶、同阶和等价无穷小的定义;

(7) 记住一些简单的等价无穷小,例如 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ 等;

(8) 记住无穷小与极限之间的关系;

(9) 记住有限个无穷小之和为无穷小,有界函数与无穷小的乘积为无穷小;

(10) 记住极限的四则运算法则;

(11) 记住极限存在的夹逼准则和单调有界准则;

(12) 记住两个重要极限.

2. 领会

(1) 领会数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义中正数 ε 的任意性、 N 的存在性以及 $n > N$ 与 $|x_n - A| < \varepsilon$ 之间的关系;

(2) 领会用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义验证数列极限时,只关心 N 的存在(一般情形下 N 与 ε 有关),只要找到符合定义要求的一个 N 就行,不一定要找最小的 N ,也就是说 N 不是唯一的;

(3) 领会函数极限的 $\varepsilon-\delta$ (或 $\varepsilon-X$) 定义中正数 ε 的任意性、 δ (或 X) 的存在性以及 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 与 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 之间的关系;

(4) 领会用函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义验证函数极限时,只关心 δ 的存在(一般情形下 δ 与 ε 有关),只要找到符合定义要求的一个 δ 就行,也就是说 δ 不是唯一的;

(5) 领会函数在 x_0 处的极限存在与否,仅与函数在 x_0 附近的变化趋势有关,而与函数在 x_0 点是否有定义无关;

(6) 领会函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限的定义分别为

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

并领会 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x_0 - 0)$ 、 $f(x_0 + 0)$ 存在且 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

(7) 领会无穷小和无穷大的概念,搞清楚它们之间的关系;

(8) 领会无穷小、无穷大与绝对值很小的数、绝对值很大的数的区别;

(9) 领会无穷小与极限的关系;领会函数在点 x_0 的邻域无界与函数当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大的区别;

(10) 领会在使用极限的运算法则时,要求参加运算的函数的极限都存在,对于商的运算法则,还要注意分母的极限不能为零;

(11) 领会用极限存在的单调有界准则求极限时,要先证明极限存在,再求极限;

(12) 领会数列极限与函数极限的区别与联系.

3. 运用

(1) 会用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义验证一些简单的极限,如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 等;

(2) 会用收敛数列的有界性和极限的唯一性判定某些数列发散;

(3) 会用函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 和 $\varepsilon - X$ 定义验证某些简单的极限式,如验证

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3;$$

(4) 会用极限的运算法则求极限;

(5) 会用两个重要极限求极限;

(6) 会用左、右极限存在且相等是极限存在的充要条件来求极限或证明极限不存在;

(7) 会用极限存在的单调有界准则证明极限存在并求极限;

(8) 会用夹逼准则证明极限存在并求极限;

(9) 会用等价无穷小代换法简化极限运算,但必须注意,应该用分子或分母的整体或部分因式的等价无穷小进行代换;

(10) 会比较无穷小的阶并利用无穷小的性质求极限;

(11) 会利用求函数极限的方法来求数列的极限.

4. 分析与综合

能综合运用函数与极限的知识,解决一些与极限有关的问题.例如求函数 $f(x)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{ix}}{1 + xe^{ix}}$ 的分段表达式;设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$, (n 为正整数), 试确定 a, b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 都存在且相等. 等等

四、目标检测题

目标检测题(1)

0121201 领会 函数极限的概念

当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 3x + 1 \rightarrow 7$. 欲使 $|y - 7| < 0.001$, 则 δ 应不大于 ()

- A. 0.001 B. 0.003 C. 0.0003 D. 0.01

0121202 领会 函数极限存在的充要条件

设 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在的原因是 ()

- A. $f(0)$ 无意义 B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在
C. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 不存在 D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 都不存在

0121203 领会 极限、无穷大量、有界变量

函数 $f(x) = x \sin x$ ()

- A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
C. 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在

0121204 领会 无穷小的性质

设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 一定是无穷小量的变量是 ()

- A. $xf(x)$ B. $f(x) - x$ C. $\frac{x}{f(x)} - x$ D. $f(x) - \frac{1}{x}$

0121305 运用 数列极限的运算

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] =$ ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. ∞

0121306 运用 函数极限的运算

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(3x)} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$ ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

0121307 运用 极限运算法则

下列运算过程正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)} = \infty$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$