北京大学数学丛书

模形式与迹公式

叶扬波　著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

模形式与迹公式/叶扬波著. 一北京：北京大学出版社，2001. 9
(北京大学数学丛书)
ISBN 7-301-04586-7

Ⅰ. 模… Ⅱ. 叶… Ⅲ. ①模形式-研究 ②迹-公式-研究
Ⅳ. 0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041345 号

书　　名：模形式与迹公式
著作责任者：叶扬波　著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-04586-7/O・0473
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　8.375 印张　200 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：0001－4000 册
定　　价：15.00 元

第一章 Maass 波动形式

§1 引 言

提起模形式的理论大家首先想到的是解析模形式，即作为 z 的一个函数，其定义在上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in \boldsymbol{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ 上，在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 或其某一个算术子群的作用下不变或满足某种“模”的性质，并且在 $\mathfrak{H}$ 上包括无穷远点处都全纯. 对于解析模形式的参考书籍可见参考文献[21]，[91]. 在本章之中，我们不考虑这种解析模形式. 我们要讨论的是 20 世纪 40 年代末由 Maass[1]所引进的非解析模形式理论. 在以后的几章中我们再进一步介绍 Selberg[22]在 Maass 工作的基础上所建立的迹公式，Kuznetsov 的公式以及近年来发展起来的相对迹公式. 通过这几章的讨论，读者可以看出非解析模形式对于各种不同类型的迹公式发展中所起的基础性的作用，并对模形式理论近代的发展及其在数论中的应用有一个总体的概念.

非解析模形式又常被叫做 **Maass 波动形式**，我们或简称其为 Maass 形式. 这里“波动”二字来源于非解析模形式 $f(z)$ 作为上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的函数，是非欧 Laplace 算子的一个特征函数. 在欧氏几何中这对应于振动膜的特征值问题. $f(z)$ 对于 $z\in\mathfrak{H}$ 来说不是一个解析函数，而仅仅是 z 的实部与虚部的实解析函数. $f(z)$ 所满足的另一个重要条件是其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的一个算术子群 Γ 的作用下不变，或更一般的，其在 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 的某一个不连续子群 Γ 的作用下不变. 在后一种情况下，我们主要考虑 Γ 为第一类 Fuchs 群的情况，这时，根据定义，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 有有限面积.

对于 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 来说有两种情况：一是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 为紧致，则其相当于一

个紧致 Riemann 曲面，其上的模形式理论，也就是说其上的 Laplace 算子特征函数理论，与微分几何有着密切的联系. 若要回到数论上，则我们可取一个四元数代数的单位子群作为不连续群 Γ，有关的工作可参阅参考文献[23]或[24].

另一种情况是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 非紧致，我们说 Γ 有**尖点**. 最简单的例子就是 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$，其基本区域非紧致，有一尖点 ∞. 其他的例子包括下面的几种算术子群：

主同余子群

$$\Gamma(n)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})\,\middle|\,\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\ n)\right\};$$

Hecke 同余子群

$$\Gamma_0(n)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})\,\middle|\,c\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)\right\};$$

同余子群，定义为：$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的任意一个子群，其包含某一个 $\Gamma(n)$.

关于非解析模形式与 Selberg 迹公式的著作浩如烟海，本书不准备作简单的重复. 例如参考文献[88]与[90]都是非常好的著作. 但另一方面，现行的文献大都力求完美，尽量包容了 Γ 的各种情况，至少也都考虑了 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的同余子群的情况，其结果固然很好，但一个副作用却是内容深奥，初次阅读者不易把握主要思路. 本章所采取的方针是主要只考虑 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$的最简单的情况，力求在这个情况下以最短的篇幅把非解析模形式理论的主要思路与证明介绍清楚，同时点出对于其他一般的不连续子群 Γ 推广的难点所在，并指出有关参考书籍与论文，使有兴趣的读者可以作进一步的探讨. 非解析模形式理论中有许多没有完成的工作，亦有许多结果尚待改进. 本章对此亦尽可能指出，为有意从事这方面研究的读者提供一个出发点.

读者在本章中可以看到，非解析模形式理论要用到 Hilbert 空间谱分解的理论. 在以后章节中泛函分析的工具对于迹公式的

建立亦起着根本的作用. 从第四章起, Kloosterman 和在迹公式的发展中起了一个核心的作用. 这些都能说明 Maass 波动形式的理论与迹公式理论都是解析数论范畴里面的分支.

§ 2 Maass 波动形式

在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的 Laplace 算子为

$$\Delta^{c} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的非欧 Laplace 算子则为

$$\Delta = - y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

这个非欧 Laplace 算子在群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 的作用下不变, 即

$$\Delta\left(f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = (\Delta f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

若要对此进行验证, 我们只要证明上式对 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})/\{\pm I\}$ 的生成元 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 成立即可:

$$\Delta(f(z+b)) = (\Delta f)(z+b),$$

$$\Delta\left(f\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = (\Delta f)\left(-\frac{1}{z}\right).$$

以下, 像通常一样, 对 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R})$ 及 $z \in \mathfrak{H}$, 记

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}.$$

定义 1 在上半平面 $\mathfrak{H}$ 上定义的一个非零实解析函数 $f(z)$ 被称为群 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 或 $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})/\{\pm I\}$ 的一个 **Maass 波动形式**, 如果下列条件成立:

(1) 对所有的 $g \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 成立 $f(gz) = f(z)$;

(2) $f(z)$ 是非欧 Laplace 算子的一个特征函数

$$\Delta f = \lambda f,$$

这里 λ 是 Δ 的一个特征值；

(3) 对于某一个正整数 N，

$$f(z) = O(y^N)$$

当 $y \to +\infty$ 时成立.

如果我们仅考虑在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中的 **Maass 波动形式**，则

(4) $f(z)$ 又应满足

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} |f(z)|^2 \mathrm{d}z < +\infty,$$

其中 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的一个在 Γ 作用下不变的测度. 在这积分中我们可以用群 Γ 的基本区域 D 来代替 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$，以下我们取

$$D = \left\{ z = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, y > 0, |z| > 1, -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2} \right\}$$

$$\cup \left\{ z = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, |z| = 1, -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 0 \right\}.$$

定义 2 一个 Maass 波动形式 $f(z)$ 被称为一个 **Maass 尖点形式**，如果

$$\int_0^1 f\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) \mathrm{d}b = \int_0^1 f(z+b)\mathrm{d}b = 0$$

对所有 z 都成立.

以上的定义自然可以推广到 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 的其他算术子群上去.

作为 Maass 波动形式的一个例子，我们来看一下非解析 Eisenstein 级数，其定义由下式给出

$$E^*(z,s) = \frac{\pi^{-s}}{2}\Gamma(s) \sum_{\substack{m,n\in\mathbf{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{y^s}{|mz+n|^{2s}},$$

这里 $z = x + \mathrm{i}y$ 仍是上半平面 $\mathfrak{H}$ 上的点，右边的级数在半平面 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 中绝对收敛. 故 $E^*(z,s)$ 是 s 在半平面 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 中的一个解析函数，但不是 z 的解析函数，而仅仅是 z 的实解析函数. 可以看出以上这个 Eisenstein 级数又可以写成

$$E(z,s) = y^s + \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c\neq 0}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

乘上 s 的一个函数

$$\xi(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s).$$

以下我们称 $E(z,s)$ 为 Eisenstein 级数，而称 $E^*(z,s)$ 为修正 Eisenstein 级数，或亦简称其为 Eisenstein 级数. 由于 $y/|cz+d|^2$ 即为 $\mathrm{Im}(gz)$，其中 $g=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$，我们得到

$$E(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(gz))^s,$$

其中 Γ_∞是 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$中由$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$生成的子群. 从非解析 Eisenstein 级数的这个新的表达式可以看出 $E(z,s)$（以及 $E^*(z,s)$）在群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的作用下不变.

要证明当 $\mathrm{Re}\ s>1$ 时 $E(z,s)$是非欧 Laplace 算子的特征函数，我们对 Eisenstein 级数的每一项进行验证. 首先

$$\Delta y^s = s(1-s)y^s,$$

故 y^s 是一特征函数. 由于 Δ 在群 Γ 作用下不变，故

$$(\mathrm{Im}\ gz)^s = \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

也是 Δ 的一个特征函数，特征值仍为 $s(1-s)$，其中 $g=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. 因此

$$\Delta E^*(z,s) = s(1-s)E^*(z,s).$$

如果要考虑 $E^*(z,s)$在半平面 $\mathrm{Re}\ s>1$ 以外的性质，我们需要将 $E^*(z,s)$解析延拓到整个 s 平面上. 这个解析延拓要用到非解析 Eisenstein 级数的函数方程. 这些工作我们将在下面介绍了 Maass 形式的 Fourier 展开后进行. 注意我们已经对 $E^*(z,s)$在半平面 $\mathrm{Re}\ s>1$ 上验证了定义 1 的(1)，(2)两个条件. 最后一个条件(3)也要等我们得到了 $E^*(z,s)$的解析延拓与函数方程后才能进行验证.

§ 3 波动形式的 Fourier 级数

设 $f(z)$是任意一个 Maass 波动形式. 由于 $f(z)$在$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的作用下不变，我们得出 $f(z+1)=f(z)$对所有 $z\in\mathfrak{H}$ 成立. 从这个周期性质我们导出 $f(z)$有一个 Fourier 展开

$$f(z) = \sum_{n\in Z} c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi inx}.$$

我们以下要确定这些 Fourier 系数 $c_n(y)$.

由于 $f(z)$是非欧 Laplace 算子的特征函数，

$$\Delta f = -y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \lambda f,$$

我们可在上式两端乘以 $\mathrm{e}^{-2\pi inx}$然后从 0 到 1 对 x 积分，从而得到

$$-y^2 c_n'' + 4\pi^2 n^2 y^2 c_n = \lambda c_n.$$

在 n 不等于 0 时，这个常微分方程是一个变形了的 Bessel 方程，其通解为

$$c_n(y) = a_n\sqrt{y}\,K_{i\nu}(2\pi|n|y) + b_n\sqrt{y}\,I_{i\nu}(2\pi|n|y),$$

其中 $\nu=\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}$，$K_{i\nu}$是修正第三类 Bessel 函数，$I_{i\nu}$是修正第一类 Bessel 函数(参阅参考文献[2]). 注意这里 $K_{i\nu}$当 y 趋于∞时是一速降函数，而 $I_{i\nu}$是一按指数增长函数. 故从 Maass 波动形式定义中的条件(3)我们知道 b_n 必须都为零($n\neq0$). 在 $n=0$ 时，以上 Bessel 方程的解变成 $c_0(y)=y^{\frac{1}{2}+i\nu}$，其中 $\nu=\pm\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}$. 如果 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$，则不可能存在

$$\int_1^\infty |c_0(y)|^2\frac{\mathrm{d}y}{y^2} < \infty.$$

故当 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$时，在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Maass 波动形式有以下 Fourier 级数

展开

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} c_n \sqrt{y} K_{i\nu}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x},$$

其中 $\nu = \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$. 从 §2 定义 2 可知此时 $\left(\lambda \geqslant \frac{1}{4}\right)$ $f(z)$ 为尖点形式. 又当 $f(z)$ 为尖点形式时, $c_0(y)$ 自然等于零, 故我们仍然得到上面的 Fourier 展开.

§4 非欧 Laplace 算子的谱分解——泛函分析

我们要考虑在 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中非欧 Laplace 算子的谱分解问题, 这个谱分解是模形式理论在数论中应用的一个重要基石. 注意 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 是 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 也就是 Γ 的基本域 D 上平方可积的可测函数所构成的空间, 由于这个空间里并非所有函数都可以微分, Laplace 算子在其上作用的确切意义需要进一步说明.

记 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 为上半平面 $\mathfrak{H}$ 上、在群 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ 作用下不变的无穷可微函数构成的空间, 则 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个稠密子空间. 在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的 Laplace 算子 Δ 将被理解为从 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 到 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的一个线性变换. 这样定义的任意一个算子 T 可被叫做 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上**稠密定义的线性算子**. 这个算子被称为**非有界的**, 如果当 $C^\infty(\Gamma/\mathfrak{H}) \cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 取 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 子空间拓扑时该算子不连续. 这个算子被称为一个**闭算子**, 如果集合 $\{(f, Tf) \mid f \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \times L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个闭子空间. 这个算子被称为**对称**算子, 如果 $(Tf, g) = (f, Tg)$ 对 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中所有无穷次可微函数成立. 这里, 像通常一样, $(\ ,\ )$ 表示 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的内积.

设 T 为一个 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上稠密定义的线性算子. 记 V 为一个由所有满足下列条件的 $g \in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 构成的一个子空间: $f \mapsto (Tf, g)$ 是一个 $C^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) \cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的线性有界泛函. 对于 $g \in V$, 线

性有界泛函 $f\mapsto(Tf,g)$ 可以延拓到全空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上. 根据 Riesz 线性连续泛函的表示定理，我们可在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中惟一地找到一个元素 h，使得这个线性连续泛函可由 $f\mapsto(f,h)$ 给出. 映射 $g\mapsto h$ 定义了一个从稠密子空间 V 到 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的一个线性算子，我们将其记作 T^* 并称其为稠密定义的线性算子 T 的**共轭算子**.

稠密定义的线性算子 T 被称为**自共轭的**，如果 $T=T^*$. 这里要注意自共轭算子与对称算子的区别. 一个自共轭算子一定是对称算子，并且是一个闭算子，但一个对称算子不一定是自共轭的. 有关的详细论证可参阅有关泛函分析的书籍.

$L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的非欧 Laplace 算子 Δ 是一个稠密定义的非有界自共轭算子，其证明我们这里不引述，读者可见参考文献[8]或者[6]. 作为一个自共轭算子，Δ 在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上有谱分解，而这正是模形式理论中的重要一点. 如果一个算子仅仅是对称的，则我们不能推出其具备谱分解，但是我们至少可以得到以下的结论：如果 f 是一个对称算子 T 的特征函数，其所对应的特征值必为实数. 事实上从 $Tf=\lambda f$ 可知 $\lambda(f,f)=(Tf,f)=(f,Tf)=\bar{\lambda}(f,f)$. 由于对于 f 有 $(f,f)\neq 0$ 我们推出 $\lambda=\bar{\lambda}$ 为一实数. 下面我们要证明非欧 Laplace 算子是一个在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上对称的且正定的算子. 由这个结论出发，我们从而可以确定非欧 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的特征值都是非负的实数，这是我们以后进行谱分解分析所需要用到的.

定理 1 非欧 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上是对称的且正定的.

证明 我们先证对称性，所用方法可见参考文献[6]. 设 $f,g\in C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 为任意两个光滑、平方可积并在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上有紧支集的函数. 这里函数在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上有紧支集意味着函数在尖点的一个邻域为零. 由于 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 也是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中一个稠密子空间，我们只要对这个子空间证明我们的结论.

首先根据 Green 公式，我们有

$$\int_{\Omega}(\bar{g}\Delta^e f - f\Delta^e \bar{g})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\partial\Omega}\left(\bar{g}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right) - f\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}\mathrm{d}x\right)\right),$$

这里 Ω 是 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 的基本域 D 除掉尖点 ∞ 的一个邻域而得到的区域，使得函数 f 与 g 的支集都包含在 Ω 中. 由于 f 与 g 在 D 中 Ω 外等于零. 我们可将上式左右两边的积分分别取在 D 与 ∂D 上. 基本域的边界 ∂D 可分解为两个垂直半直线与两段单位圆弧，而函数 f 与 g 均在两个垂直半直线上取同样的值，也在两段单位圆弧上取同样的值. 由此可推出上式右端的积分等于零，因此

$$\int_D f\Delta^e \bar{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \bar{g}\Delta^e f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $\Delta=-y^2\Delta^e$, $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y/y^2$，我们得出 $(\Delta f,g)=(f,\Delta g)$.

为证 Δ 在 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上是正定的，我们考虑 $(\Delta f,f)$. 根据 Green 公式我们得到

$$\int_{\partial\Omega}\bar{f}\,\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - \bar{f}\,\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\left(\bar{f}\,\Delta^e f + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如上所述我们可将两边积分分别取于 ∂D 与 D 上，并可推出等式左边积分为零. 因此

$$-\int_D \bar{f}\,\Delta^e f\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里左边等于 $(\Delta f,f)$，而右边为一非负实数. 又因为函数 $f\in C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，右边积分等于零当且仅当 f 恒为零. 故在 $C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\cap L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上非欧 Laplace 算子 Δ 为正定算子.

§5 不完全 θ 级数

在这一节里，我们要对 Laplace 算子在 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上进行第一步的谱分解. 为此我们首先引进不完全 θ 级数的概念. 设 $\psi(y)$ 是一个在 $(0,\infty)$ 上有紧支集的光滑函数，ψ 所对应的**不完全 θ 级数**

定义为

$$\theta_\psi(z)=\sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\psi(\mathrm{Im}(gz)),$$

其中与前面一样 $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbf{Z}\right\}$. 显然 $\theta_\psi(z)$ 在群 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的作用下不变. 由于 ψ 有紧支集,我们看出 $\theta_\psi(z)$属于空间 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 我们记 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中由所有 θ_ψ 张成的闭子空间.

取 f 为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中任意一个函数,则由于 $f(z)$在 Γ 作用下不变,

$$(\theta_\psi,f)=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\theta_\psi(z)\,\bar{f}(z)\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}}\psi(y)\,\bar{f}(z)\mathrm{d}z.$$

从 $\Gamma_\infty\backslash\mathfrak{H}\cong\{x+\mathrm{i}y\mid 0<x\leqslant 1,y>0\}$,我们得出

$$(\theta_\psi,f)=\int_0^\infty\psi(y)\left(\int_0^1\bar{f}(z)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

根据此式我们得出 $f\in L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$与 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$正交当且仅当

$$\int_0^1 f(z)\mathrm{d}x=0$$

对所有 $y>0$ 都成立. 这最后的一个条件等价于 $f(z)$的 Fourier 级数

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

中的常数项 $c_0(y)$恒等于零. 因此以上所证明的结果可以表述为:

引理 1 设 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中所有不完全 θ 级数所张成的闭子空间,又设 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Fourier 级数常数项为零的函数所构成的子空间,则 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以正交分解为

$$L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})=L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})\oplus\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H}).$$

我们需要另一个引理.

引理 2 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$为 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$中 Maass 尖点形式所张成的闭子空间.

证明 我们考虑 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中光滑函数所生成的子空间，其在 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中稠密. 将 Laplace 算子作用在 $f(z)$ 的 Fourier 级数上，由于 $c_0(y)=0$，我们知道 $(\Delta f)(z)$ 亦有常数项为零的 Fourier 级数，即 Δf 属于 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 因此 $\Delta(L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H}))\subset L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$. 我们已知 Laplace 算子是一个自共轭算子，故由自共轭算子的谱分解定理，$L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 可由 Laplace 算子的特征函数张成，即 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 等于 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 中尖点形式所生成的闭子空间.

以下我们记 $L_0^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})=L_{\text{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$，则从上面两个引理我们得到

定理 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 可以正交分解为不完全 θ 级数所张成的闭子空间 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 与 Maass 尖点形式所张成的闭子空间 $L_{\text{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 的直和.

§ 6 子空间 $L_{\text{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的特征值

子空间 $\Theta(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的 Δ 的谱分解需要用到 Eisenstein 级数的理论，我们 § 8 再进一步讨论，在本节中我们仅介绍关于子空间 $L_{\text{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上非欧 Laplace 算子的谱分解的一些结果，其证明可见参考文献[6]等书籍.

首先我们指出 $L_{\text{cusp}}^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上的谱分解是离散的，有关证明可参看参考文献[36]，由于 Δ 是 $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$ 上稠密定义的对称且正定算子，其特征值 λ 大于或等于 0. 从 § 3 我们已知当 $\lambda\geqslant 1/4$ 时所有 Maass 波动形式都是尖点形式. 对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征函数为常数函数. 在区间 $(0,1/4)$ 之中的特征值被称为**例外特征值**. 在 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的情况下，Maass[3] 与 Roelcke[12] 曾证明例外特征值不存在. 下面我们看 Roelcke 的一个命题（见参考文献[18]，第 50 页，又见参考文献[19]，第 511，512 页）.

定理 1 设 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$，则任意 Maass 尖点形式的特征值均

$>3\pi^2/2.$

证明 设 $f(z)$为一个以 λ 为特征值的 Maass 尖点形式,满足

$$\Delta f=\lambda f,\quad (f,f)=1,$$

则

$$\lambda=(\lambda f,f)=(\Delta f,f)=\int_D \bar{f}(z)\Delta f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 D 为 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的基本域. 根据 § 4 最后的计算,上面的积分可以表示为

$$-\int_D \bar{f}(z)\Delta^e f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将基本域 D 在映射 $z\mapsto -1/z$ 下的映像记作 D_1,则有

$$2\lambda=\int_{D\cup D_1}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\int_I\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$I=\{z=x+\mathrm{i}y\mid -1/2\leqslant x\leqslant 1/2,\ y\geqslant\sqrt{3}/2\}.$$

由 $f(z)$的 Fourier 级数

$$f(z)=\sum_{n\neq 0}c_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$$

出发,我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{n\neq 0}2\pi\mathrm{i}nc_n(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2=\sum_{\substack{n\neq 0\\ m\neq 0}}(2\pi)^2nmc_n(y)\,\overline{c_m(y)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-m)x},$$

及

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x=\sum_{n\neq 0}(2\pi n)^2|c_n(y)|^2.$$

因此

$$2\lambda\geqslant\int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}(2\pi n)^2|c_n(y)|^2\mathrm{d}y>(2\pi)^2\int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|c_n(y)|^2\mathrm{d}y$$

$$\geqslant 3\pi^2\int_{3^{1/2}/2}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|c_n(y)|^2\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

这里最后的积分等于

$$\int_I |f(z)|^2 \mathrm{d}z \geqslant \int_D |f(z)|^2 \mathrm{d}z = 1,$$

故我们推出 $2\lambda > 3\pi^2$. 命题得证.

设 Γ 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的 Hecke 同余子群

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ N) \right\}.$$

当 $N \leqslant 17$ 时类似的命题由 Huxley[13]证明. 由此我们知道对于 $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $N \leqslant 17$, 不存在例外特征值. 对于一般的同余子群 Selberg 猜想例外特征值亦不存在,即 $\lambda \geqslant 1/4$. 这方面的第一个主要结果是 Selberg 本人得出的,他证明了:

定理 2 设 Γ 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$的任意一个同余子群,则其上任意 Maass 尖点形式的特征值均$\geqslant 3/16$.

我们指出,这个命题被 Jacquet 与 Gelbart[10]改进为 $\lambda > 3/16$,即取等号的情况不存在. 罗文治、Rudnick、Sarnak[85]将此结果改进为 $\lambda \geqslant 21/100$. 又见参考文献[92]. Kim 与 Shahidi 最近又对此作了更进一步的改进.

可以证明子空间 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以由正交的、平方可积的、$\Delta$ 的特征函数(即 Maass 尖点形式)张成. 该证明除依赖于 Hilbert 空间理论外,主要根据下面的结果:

定理 3 对于任意一个正数 ν 可以找到一个正整数 N,使得任意一个 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$的 N 维子空间中都包含一个尖点形式 f 满足

$$\iint_D \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \nu \iint_D |f(z)|^2 \mathrm{d}z.$$

关于这个命题的证明可见参考文献[13]. 在此我们要指出由这个不等式可推出非欧 Laplace 算子在 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$上是一个紧致自共轭算子的逆算子,于是 $L^2_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})$可以由尖点形式组成的一个正交系张成. 我们又可以进而证明这个正交系所对应的特征值

是离散的，以下记作

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,$$

其中 λ_1 到 λ_2 及以后可能取等号是因为可能出现多重特征值.

以上我们曾证明对于 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$，$\lambda_1>3\pi^2/2$. Cartier[4]等人曾作计算 $\lambda_1=91.1413\cdots$（见参考文献[19]，第 651 页）. 注意他们的计算实际上是对 ν 进行的，而 $\lambda=\nu^2+1/4$. 对于 λ_1 以后的特征值的分布有 Weyl 的渐近定律.

定理 4 对于 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的任意同余子群 Γ（包括 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的情况），不大于 λ 的非欧 Laplace 算子的特征值的个数 $N_\Gamma(\lambda)$ 等于

$$N_\Gamma(\lambda)=\frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})}{4\pi}\lambda+O(\lambda^{1/2}\log\lambda).$$

由此渐近定律我们可确知 Maass 尖点形式存在，且 λ_j 趋向于无穷大.

特别对于 $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$，由于 $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathfrak{H})=\pi/3$，有

$$N_{\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})}(\lambda)=\frac{\lambda}{12}+O(\lambda^{1/2}\log\lambda).$$

Weyl 渐近定律的证明需要用到 Selberg 迹公式，我们下一章介绍了 Selberg 迹公式后还会再回到这个问题上. 有关 Weyl 渐近定律误差项的改进，可参见参考文献[9]及[20].

Weyl 的渐近定律最终解决了 Maass 尖点形式存在性的证明. 虽然对 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ 的同余子群来说有无穷多个 Maass 尖点形式，迄今为止尚无人能切实构造出一个尖点形式. 这个情形与解析模形式理论有鲜明的对比. 对于解析模形式，其尖点形式的构造是熟知的，其中最著名的自然要算权为 12 的 Ramanujan 尖点形式

$$\Delta(z)=(2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24},$$

其中 $q=\mathrm{e}^{2\pi iz}$（见参考文献[21]）. 关于非解析尖点形式的构造问题，近年的进展是由 Andrew Wiles 等作出的，其工具为代数几何.

与非欧 Laplace 算子相关的另一个问题是其相邻特征值的差

$\lambda_j-\lambda_{j-1}$满足什么样的统计规律. 通过计算机作出的大量运算表明,在某些情形下,相邻特征值的差服从量子物理学中发现的大原子能量谱的特殊统计分布. 而另一方面,数论中与素数相关的量一般均满足统计学中的一般的随机分布. 非欧 Laplace 算子相邻特征值的差所满足的特殊分布于是成为非解析模形式理论中的一个重要课题. 有关这方面的猜想与进展,可见参考文献[86].

§7 Eisenstein 级数的 Fourier 展开

由于 Eisenstein 级数在矩阵$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$的作用下不变,即$E(z,s)=E(z+1,s)$,故有 Fourier 级数展开式

$$E^*(z,s)=\sum_{r\in\mathbf{Z}}a_r(y,s)\mathrm{e}^{2\pi irx},$$

其中 Fourier 系数由下式给出

$$a_r(y,s)=\int_0^1E^*(x+\mathrm{i}y,s)\mathrm{e}^{-2\pi irx}\mathrm{d}x.$$

我们回到 $E^*(z,s)$在 §2 定义中的表达式. 如 $m=0$,则我们得到下面的级数

$$\frac{\pi^{-s}}{2}\Gamma(s)\sum_{n\neq 0}\frac{y^s}{n^{2s}}.$$

由于它的项与 x 无关,故他们只出现在 $a_0(y,s)$的计算之中. 上面的级数显然等于

$$\xi(s)y^s,$$

其中 $\xi(s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$. 设 $m\neq 0$,我们可把对应项的积分写成

$$\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-2\pi irx}}{((mx+n)^2+m^2y^2)^s}\mathrm{d}x$$

$$=\pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{n(\mathrm{mod}\ m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi irx}}{((mx+n)^2+m^2y^2)^s}\mathrm{d}x.$$

作变量替换 $x\mapsto x-\dfrac{n}{m}$,上式右端变为