GLTJXXZD

概率统计学习指导

■主编 宋作忠 蔡吉花 宋明娟
■主审 门艳春

哈尔滨工程大学出版社

高等学校教学用书

概率统计学习指导

主　编　宋作忠　蔡吉花　宋明娟
副主编　安玉伟　刘照升　张晓光
主　审　门艳春

哈尔滨工程大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求编写的。全书共九章，每章由教学基本要求、内容提要与疑难解析、典型例题、练习题、练习题解答和研究生考题精解等几部分组成。全书共收集了 141 道例题、161 道习题。

本书可作为本科生学习概率统计的指导书，也可作为电大、函授、业余大学的学生及其他工程技术人员、自学考试者的参考用书。

概率统计学习指导

主编　宋作忠　蔡吉花　宋明娟

责任编辑　朱春元

*

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行

哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼

发行部电话：(0451)2519328　邮编：150001

新 华 书 店 经 销

黑 龙 江 省 教 委 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 11 字数 260 千字

2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷

印数：1－1000 册

ISBN 7－81073－005－3

O·77　定价：15.00 元

如发现印、装质量问题，请与本厂质量科联系调换。

地址：哈尔滨市南岗区和兴路147号　邮编：150080

前　言

本书是根据高等工业学校概率论与数理统计课程基本要求,面向大学生编写的一本辅助教材,配合教学,与教材同步,力求使学生学懂、学透、学精。帮助学生解决学习过程中的疑难,巩固基本概念,加深对基本理论的理解,提高学生应用知识分析问题、解决问题的能力,期望在最短的时间内,花最小的精力,达到最大的收获。

全书内容包括概率论、数理统计两部分共九章,每章均由本章要求、内容要求与疑难解析、典型例题、练习题、练习题解答以及考研题精解等六部分组成,全书共精选了典型的例题、习题等共 302 道题,按内容先后顺序排写,并给出了练习题解答以便于自学,同时为帮助报考研究生的同学进行学习,我们还精选了从 1985 年以来列届的研究生考试题并进行了解答。

本书可与概率统计教材配合使用,也可供电大、函授、业余大学的学生学习概率统计时使用以及报考非数学专业研究生参考。

参加本书编写的同志有:蔡吉花、宋作忠、门艳春、安玉伟、刘照升、张晓光,由门艳春同志主审。

由于我们的水平有限,时间仓促,本书难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编　者

2000 年 8 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

[本章要求]

1．应深刻理解随机试验、样本空间和随机事件的概念，熟练掌握事件之间的关系与事件的运算(包含并、交、互斥、对立 ……)。

2．频率的稳定性是概率定义的基础，弄清频率与概率的关系，对正确理解随机事件的概率定义是非常重要的。并应熟练掌握概率的有关性质及概率的运算。

3．掌握古典概型的概率定义及计算。古典概型是各类概率模型中最基本的一种。它简单而直观，读者可以利用古典概型的实例来帮助对各种概念的理解。

4．掌握条件概率和与条件概率有关的三个公式：乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式。

5．理解随机事件和随机试验的独立性的概念，了解事件互斥、互逆和相互独立的三者之 间的关系及区别，要求做到概念清晰、计算正确。

在社会生活与生产活动中存在着大量的随机现象，虽然这种现象以偶然性为特征，但它确实存在一定的统计规律性，概率论就是一门以随机现象及其规律为研究对象的数学分支。

概率论的产生，还有一段名声不好的故事。17 世纪的一天，保罗与著名的赌侠梅尔赌钱，他们事先每人拿出 6 枚金币，然后玩骰子，约定谁先胜三局谁就得到 12 枚金币。比赛开始后，保罗胜了一局，梅尔胜了两局。这时一件意外的事中断了他们的赌博。于是，他们商量这 12 枚金币应怎样合理的分配。保罗认为，根据胜的局数，他应得到总数的$\frac{1}{3}$，即 4 枚金币，梅尔应得总数的$\frac{2}{3}$，即 8 枚金币。但精通赌博的梅尔认为他赢的可能性大，所以他应该得全部赌金。于是他们请求数学家帕斯卡评判。帕斯卡得到答案后，又求教于数学家费尔马。他们的一致裁决是：保罗应分 3 枚金币，梅尔应分 9 枚金币。

帕斯卡是这样解决的，如果再玩一局，或是梅尔胜，或是保罗胜。如梅尔胜，那么他可以得到全部金币(记为 1)；如果保罗胜，那么两人各胜两局，应各得金币的一半(记为$\frac{1}{2}$)。由于这一局中两人获胜的可能性相等。因此梅尔得金币的可能性应是两种可能性大小的一半，另一半为保罗所有，即梅尔为$(1+\frac{1}{2})\div 2=\frac{3}{4}$，保罗为$(0+\frac{1}{2})\div 2=\frac{1}{4}$，所以他们应各得 9 枚和 3 枚金币。

费尔马是这样考虑的：如果再玩两局，会出现四种可能的结果：(梅尔胜，保罗胜)；(保罗胜，梅尔胜)；(梅尔胜，梅尔胜)；(保罗胜，保罗胜)。其中前三种结果都使梅尔取胜，只有第四种结果才能使保罗取胜。所以梅尔取胜的概率为$\frac{3}{4}$，保罗取胜的概率为$\frac{1}{4}$。这与帕斯卡的答案一致。费尔马的做法正与古典概型的概率问题是一致的。

帕斯卡和费尔马还研究了有关这类随机事件的更一般的规律,由此开始了概率论的早期研究工作。

[内容提要与疑难解析]

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验　若试验满足条件:

(1) 试验可在相同条件下重复进行;

(2) 试验的结果具有很多种可能性;

(3) 试验前不能确切知道会出现何种结果,只知道所有可能出现的结果。

这样的试验叫做随机试验,简称试验,记为 E。

2. 样本空间、样本点

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S。

样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点,记为 e_i。

3. 随机事件　试验 E 的样本空间 S 的子集叫 E 的随机事件,简称事件。用大字母 A、B、C、D 等表示。

在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生。

4. 基本事件、必然事件、不可能事件

由一个样本点组成的单点集,称为基本事件,基本事件也叫样本点。

样本空间 S 包含所有样本点,在每次试验中总是要发生的,称为必然事件。

每次试验中一定不发生的事件,称为不可能事件,记为 $\varnothing$。

二、事件的关系及运算

1. 子事件　若事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 A 为事件 B 的子事件,记作 $A \subset B$,或 $B \supset A$。

2. 等事件　若 $A \supset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记作 $A = B$ 。

3. 和事件　事件 A 和事件 B 至少有一个发生的事件,称为 A 和 B 的和事件,记作 $A \cup B$。

用 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_1, \cdots, A_k \cdots$ 同时发生的事件。

4. 积事件　事件 A 和 B 同时发生的事件,称为 A 与 B 的积事件,记为 $A \cap B$ 或 AB.

用 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_1, \cdots, A_k \cdots$ 中至少有一个发生的事件。

5. 差事件　表示 A 发生而 B 不发生的事件,称为 A 与 B 的差事件,记作 $A - B$。

6. 互斥事件(或互不相容事件)　若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称 A 与 B 是互斥事件。反之,称 A 与 B 相容。

7. 对立事件(或逆事件)　若 $A \cup B = S$,且 $AB = \varnothing$,称 A 与 B 互为对立事件(或逆事件),记 $B = \bar{A}$。

注意:对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件。

8. 事件的运算律

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A$;$AB = BA$

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律:$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$;$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

(4) 德、摩根律:$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$;$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$

(5) 对减法运算满足　$A - B = A\overline{B}$(或 $A \cap \overline{B}$);

事件之间的关系及运算与集合论中的集合之间的及运算是完全相似,但在概率论中很重要的一点是要学会用这些关系及运算来表示各种各样的事件。

三、频率与概率

1. 频率　用 n_A 表示在 n 次试验中 A 出现的次数,比值 $\frac{n_A}{n} = f_n(A)$ 叫做在 n 次试验中 A 出现的频率。

频率的性质　(1)$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;(2)$f_n(S) = 1$;(3) 若 $AB = \varnothing$,则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$

2. 概率的定义　随机事件 A 发生的可能性大小的度量值称为事件 A 的概率,记为 $P(A)$。且集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° 对于每一个事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

2° $P(S) = 1$;

3° 若 $A_1, A_2 \cdots$ 是两两互不相容的事件,则有　$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$。

3. 概率的性质

性质 1　设有有限个两互斥的事件 A_1、A_2、$\cdots$、A_n,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$;

性质 2　设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件,则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

性质 3　设 $A \subset B$,则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$,$P(A) \leqslant P(B)$;

性质 4　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

上述可推广到几个事件情形。

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

注意　① 性质 1 与性质 4 的区别:仅当 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 是互斥事件时才可用性质 1。

② 巧妙运用性质 2,当直接计算 $P(A)$ 比较麻烦,而计算 $P(\overline{A})$ 比较方便时,就可先求 $P(\overline{A})$。一般讲,求若干事件之中"至少"出现其中一件的概率,求其对立事件的概率较为简便。

四、古典概型

1. 古典概型　随机试验 E 具有以下两个特征:

(1) 样本空间的元素(即基本事件)只有有限个;

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的。称 E 为古典概型试验。

2. 古典概率　在古典概型的情况下,事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}K}{\text{样本空间中基本事件总数}n}$$

注意:计算古典概率时,首先要弄清随机试验是什么?即判断有限性和等可能性是否满足,其次要弄清样本空间是怎样构成的,构成样本空间的每个基本事件出现一定要等可能的。忽略了这一点,就会导致错误的结果。

例 1 同时掷两颗骰子,求出现的点数之和为 7 的概率。

解 设 A 表示出现点数之和为 7 的事件。

① 用同时掷两颗骰子的点数之和构成样本空间为:

$S_1=\{2,3,4,5,6,7,\cdots,12\}$,共有 11 个样本点。

$A=\{7\}$, $P(A)=\frac{1}{11}$

② 把两颗骰子标上 1 号和 2 号,用(1,3)表示 1 号骰子出现点数 1,2 号骰子出现点 3,则试验结果构成的样本空间为:

$S_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,1),(6,2),(6,5),(6,6)\}$ 共有 36 个样本点。

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$P(A)=\frac{7}{36}$

上述两种做法中 ② 法是正确的,而 ① 法是错误的。作为古典概型问题。S_1 中各样本点出现不是等可能的,而 S_2 中各样本点的出现是等可能的。而 ① 法的错误对初学者又是很容易出现的。因此应引起足够的重视。

古典概型研究的对象大致可分为三类问题:① 摸球;② 分房;③ 随机取数(电话号码)问题。这几类问题的解决方法将在典型例题或练习题中给出。

3. 几何概率

① 设在平面上有某一区域 S,而区域 A 是它的第一部分,在区域内任意投掷一点,假设该点落在任意一点处都是等可能的,并且落在区域的任何部分 A 内的概率,只与这部分的面积成正比例,而与其位置与形状无关,则在区域内投掷一点而落在区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}\xlongequal{\triangle}\frac{G(A)}{G(S)}$$

② 如果将上述定义中的 $G(A)$ 与 $G(S)$ 分别理解为直线上区间的长度及空间的体积时,有

$$P(A)=\frac{A\text{的长度}}{S\text{的长度}}$$

及

$$P(A)=\frac{A\text{的体积}}{S\text{的体积}}$$

显然几何概率是古典概率的推广。

五、条件概率及有关公式

1. 条件概率 在事件 A 已经发生的条件下计算事件 B 发生的概率,称为事件 B 在事件 A 发生条件下的条件概率,记作 $P(B\mid A)$,有如下公式:

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad (P(A)>0)$$

注意:条件概率仍满足概率的三条公理,具有一般概率的性质。

2. 乘法公式　若 $P(A)>0$ 时则有

$$P(AB)=P(B \mid A)\cdot P(A)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_1\cdots A_{n-1})$$

注意:在解决实际问题时,不要把求 $P(AB)$ 的问题误认为是求 $P(B \mid A)$ 的问题,现介绍两者的区别如下:

① 从样本空间上是讲,计算 $P(AB)$ 的样本空间为 S,计算 $P(B \mid A)$ 的样本空间为 A。

② 凡涉及事件 A 与 B"同时" 发生,用 $P(AB)$,"有包含" 关系或主从条件关系的用 $P(B \mid A)$。

例 2　某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8,活到 25 岁的概率为 0.4,问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少?

解　$A=\{$活到20岁以上$\}$,$B=\{$活到25岁以上$\}$,显然 $B\subset A$,故该问题属于条件概率 $P(B \mid A)$。

$\because P(A)=0.8, P(B)=0.4$

又 $B\subset A$　　$AB=B$　　$P(AB)=P(B)=0.4$

$\therefore P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.8}=\dfrac{1}{2}$

例 3　某厂的产品中有 4% 的废品,在 100 件合格产品中有 75 件一等品,试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率。

解　$A=\{$任取一件是合格品$\}$,$B=\{$任取一件是一等品$\}$。

因为所求的是在某厂的产品中任取一件,即样本空间是某厂的产品 ,因此这是属于 $P(AB)$ 问题。

$\because P(A)=1-P(\bar{A})=96\%$　,　$P(B \mid A)=75\%$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B \mid A)=\dfrac{96}{100},\dfrac{75}{100}=0.72$

3. 全概率公式　如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足:

(1) $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互斥,且 $P(B_i)>0,(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_n=S$

则对任一事件 A 皆有:

$P(A)=P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A \mid B_n)$

注意:(1) 由诸多原因可引发某种结果,而该结果又不能简单地看作这诸多事件的和,这样的概率问题属于全概类型。

(2) 用全概率公式求解的概率问题关键在于寻找完备事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,如何找 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,(这是难点) 下列两点可予考虑。

① 每个 $B_1,\cdots,B_n$ 都是导致A 发生的原因之一,即用找原因的方法找 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 比较方便。

② 如果样本空间 S 能写出来,求 S 的一个划分 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是比较容易的,如果试验 E 是由几个不同的试验复合而成。即 $E=E_1\times E_2\times\cdot\cdots\times E_n$,而所求的概率是最后一个试验结果的一个概率,则可把倒数第二个试验的样本空间进行划分。

例 4　盒中有 14 个乒乓球，其中有 10 个是新的。第一次比赛时，从中任取 4 个来用，比赛后放回盒中；第二次比赛时，再从盒中任取 4 个，求第二次取的球都是新球的概率。

解　(1)　设 $A = \{$第二次取出的4个球全是新球$\}$。导致 A 发生的原因是什么？与第二次取球时剩几个新球有关，即第一次取出的4个球中有几个新球有关。于是我们找到了 A 发生的一组原因 $B_k = \{$第一次比赛用了 k 个新球$\}(k = 1,2,\cdots,4)$，

则有 $P(B_k) = \dfrac{C_{10}^{k}C_4^{4-k}}{C_{14}^4}$，$P(A \mid B_k) = \dfrac{C_{10-k}^4}{C_{14}^4}$

由全概率公式

$$P(A) = \sum_{k=0}^{4}\frac{C_{10}^{k}C_4^{4-k}C_{10-k}^4}{(C_{14}^4)^2} =$$

$$\frac{1}{(C_{14}^4)^2}[C_{10}^0\cdot C_4^4\cdot C_{10}^4 + C_{10}^1C_4^3C_9^4 + C_{10}^2\cdot C_4^2\cdot C_8^4 + C_{10}^3\cdot C_4^1C_7^4 + C_{10}^4\cdot C_4^0\cdot C_6^4] =$$

$$\frac{44100}{1002001} = 0.0440119$$

解　(2)　E_1：第一次从盒中取出 4 个球。

E_2：第一次用过的球放回盒后，第二次取 4 个球。

显然 $E = E_1 \times E_2, A = \{$第二次从盒中取出的都是新球$\}$，则 A 是最后一次试验的结果。倒数第二个试验的样本空间

$$S_1 = \{e_0, e_{1,1}, \cdots, e_{1,40}, e_{2,1}, \cdots, e_{2,270}, e_{3,1}, \cdots, e_{3,480}, e_{4,1}, \cdots, e_{4,210}\},$$

其中，$e_{k,j}$ 表示取出的4个球中含 k 个新球的结果，故可划分 S_1 为 $B_0, B_1, \cdots, B_4$，且 B_0, B_1, B_2, B_3, B_4，含基本事件数分别为1,40,270,480,210，显然 $\bigcup_{k=0}^{4}B_k = S_1, B_iB_j = \varnothing(i \neq j)$ 故由全概率公式得与(1) 相同的结果。

4. 贝叶斯公式　在全概率公式的条件下，若 $P(A) > 0$，由条件概率的定义有

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_jA)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A \mid B_i)}, \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

注意：在全概率公式和贝叶斯公式中的 B_i 是导致结果 A 的原因：概括起来，由因溯果，用全概率公式，由果溯因用贝叶斯公式。

六、独立性

1. 独立事件　如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称这两事件是相互独立的，即 $P(B \mid A) = P(B)$ 或 $P(A \mid B) = P(A)$；

另外可定义　若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称两事件 A 和 B 是相互独立的。

2. 几个事件独立　如果对于任一组 $k_1, k_2, \cdots, k_s (z \leqslant s \leqslant n)$（每组 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 取 1，2，$\cdots$，n 中 s 个不同的值)，等式

$$P(A_{k1}A_{k2}\cdots A_{ks}) = P(A_{k1})P(A_{k2})\cdots P(A_{ks})$$

总成立，则称事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是相互独立。

注意：

①$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两相互独立。

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两相互独立 $\Rightarrow A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

② 四对事件 $A, B; \bar{A}, B; A, \bar{B}; \bar{A}, \bar{B}$ 之中有一对相互独立,则另外三对也相互独立。

③ 独立与互斥的区别:两事件 A, B 相互独立指事件 A 出现的概率与事件 B 是否出现没有关系,并不是说事件 A, B 之间没有区别。相反若 A, B 独立,则常有 $AB \neq \varnothing$,即 A 与 B 非互斥。事实上,若 A 与 B 互斥,则 $P(AB) = 0$,而当 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 时,$P(A)P(B) > 0$,可知 $P(AB) \neq P(A)P(B)$。因此两事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论。

[典型例题]

例1 某地区有1000人是1925年出生的,随机试验 E:考查到2000年还有几个人活着。问

(1)E 的样本空间是什么?

(2) 设 $A = \{$只有 10 人活着$\}$,$B = \{$至少有 30 人活着$\}$ $C = \{$最多有 5 人活着$\}$。

则 A 与 B,A 与 C,B 与 C 是否互不相容?A、B、C 的对立事件是什么?

解(1)$e_0 = \{$无 1 人活到2000 年$\}$, $e_1 = \{$有 1 人活到2000 年$\}$,$e_2 = \{$有 2 人活到2000 年$\}$,$\cdots$,$e_{1000} = \{$有 1000 人活到 2000 年$\}$。

这是 E 的所有可能结果,故 E 的样本空间为:

$S = \{e_0, e_1, e_2, \cdots, e_{1000}\}$.

(2)$A = \{e_{10}\}$,$B = \{e_{30}, e_{31} \cdots, e_{1000}\}$,$C = \{e_0, e_1, \cdots, e_5\}$。

由于 $AB = \varnothing, AC = \varnothing, BC = \varnothing$,故 A 与 B,B 与 C,A 与 C 都互不相容。

$\bar{A} = \{e_0, e_1, \cdots, e_9, e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1000}\}$, $\bar{B} = \{e_0, e_1, \cdots, e_{29}\}$, $\bar{C} = \{e_0, e_7, \cdots, e_{100}\}$

注意:我们所考虑的事件的运算是对同一试验中的事件而言的。

例2 袋中有 9 个球,4 个白球,5 个黑球,现从中任取两个,求

① 两个均为白球的概率;

② 两个球中有一个是白的,另一个是黑的概率;

③ 至少有一个是黑球的概率。

解: (1) 设 $A = \{$取两个白球的事件$\}$,随机试验为从 9 个球中任取两个。

方法一,假设取球与先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,且每事件为等可能的,A 含基本事件个数为 P_4^2,故

$$P(A) = \frac{P_4^2}{P_9^2} = \frac{1}{6}.$$

方法二,假设取球与先后次序无关,则基本事件总数为 C_9^2,且每事件为等可能的,A 含基本事件个数为 C_4^2,故

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$$

(2) 设 $B = \{$取一白一黑球事件$\}$

方法一,取球与先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,事件 B 的基本事件个数为

$$P_4^1 P_5^1 + P_5^1 P_4^1 = 2P_4^1 P_5^1,$$

故
$$P(A) = \frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2} = \frac{5}{9}$$

方法二,取球与先后次序无关,则基本事件总数为 C_9^2,事件 B 的基本事件个数为 $C_4^1 \cdot C_5^1$。故

$$P(A) = \frac{C_4^1\,C_5^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}$$

(3) 设 $C = \{$至少有一个黑球$\}$,则 $\bar{C} = A$,故

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

例3 设有 n 个人,每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住($n \leqslant N$),求下列事件的概率:

(1) 指定的 n 房间里各有一人住;(2) 恰有 n 房间各有一人;(3) 某指定的房间中恰有 m 个人($m \leqslant n$)。

解: 将几个人等可能地分配到 N 间房中去,S 中有 N^n 个基本事件(每一个人分配到 N 间房中去都有 N 种分法,因为没有限制每间房住多少人)。

(1) 设 $A = \{$指定的 n 间房里各有一人住$\}$。考察 A:n 个人要分到指定的 n 间房中去,使每间房各有一人。第一个人,有 n 种分法;第二个人有 $n-1$ 种分法;…,最后一间给第 n 个人,所以共有 $n!$ 种分法。

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

(2) 设 $B = \{$恰有 n 间房各有一人$\}$,考察 B:n 个人分配到 n 间房,并且每间房有一人,有 $n!$ 种分法,而 n 间房未指定,所以可以从 N 中任意选取,故有 C_N^n 种方法。

$$P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

(3) 设 $C = \{$某指定的房间恰有 m 个人$\}$。考察 C:首先从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去,有 C_n^m 种选法,再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间去的分法有 $(N-1)^{n-m}$ 种。

$$P(C) = \frac{C_n^m \cdot (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

注意:上例是古典概型中的分房问题。人与房子都是有其特性的,处理实际问题时,要弄清什么是“人”,什么是“房”,一般不可颠倒。例如有 n 个人的生日问题;几封信装 n 个信封问题(配对问题);球在盒中的分布问题(把球看成“人”)等都是类似于分房问题。

例4 某班有 12 名大学生是 1980 年出生的,试求下列事件的概率:

(1) 至少有 2 人同日生;(2) 至少有 1 人在五月一日出生。

解 这是古典概型的概率问题。这类问题首先要弄清样本空间中有多少个样本点,其次弄清事件包含了几个样本点。

与分房问题类似,S 含有 365^{12} 个基本事件。

(1) 设 $A = \{$至少有 2 人同日生$\}$,则 $\bar{A} = \{$没有 2 人的生日是同一天$\}$,$\bar{A}$ 含有基本事件数为 P_{365}^{12},

故 $P(\bar{A})=\dfrac{P_{365}^{12}}{365^{12}}=1\times(1-\dfrac{1}{365})\times(1-\dfrac{2}{365})\times(1-\dfrac{N}{365})\approx$

$$1-\frac{1+2+\cdots+11}{365}=1-\frac{66}{365}$$

$P(A)=1-P(\bar{A})=\dfrac{66}{365}=0.18082$

(2) 设 $B=\{$至少有1人在 五月一日过生日$\}$,$\bar{B}=\{$没有一个人的生日在五月一日$\}$。$\bar{B}$ 含有 364^{12} 个基本事件,则

$P(\bar{B})=\dfrac{364^{12}}{365^{12}}=(\dfrac{364}{365})\approx 1-\dfrac{12}{365}$

$P(B)=\dfrac{12}{365}\approx 0.03287$

例 5 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只鞋,求下列事件发生的概率:

(1) 没有成对的鞋子;(2) 只有一对鞋子;(3) 恰有两对鞋子;(4) 有 r 对鞋子。

解: 此问题是古典概型问题。样本空间含基本事件总数为 C_{2n}^{2r}。

(1) 设 $A=\{$没有成对的鞋子$\}$,A 中含基本事件数:先从 n 双中取出 $2r$ 双,再从每双中取出一只,即 $C_n^{2r}\cdot(C_2^1)^{2r}$

故 $P(A)=\dfrac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$

(2) 设 $B=\{$只有一双成对的鞋子$\}$,B 中含基本事件数:先从 n 双中取出一双,其两只全取出,再从剩下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双,从其每双中取出一只,即 $C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}$

故 $P(A)=\dfrac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$

(3) 设 $C=\{$恰有两对鞋子$\}$,C 中含基本事件数:$C_n^2\,C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$,故有

$$P(C)=\frac{C_n^2\,C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r-4}C_n^2\,C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$$

(4)$P=\dfrac{C_n^r(C_2^2)^r}{C_{2n}^{2r}}=\dfrac{C_{2r}^r}{2n}$

例 6 (约会问题),两人约定于7点到8点在某地会面,试求 ① 一人要等另一人半小时以上的概率。② 先到者等半小时再离去,求两人能会面的概率。

解 设 x,y 分别表示两人到达的时刻,则

$7\leqslant x\leqslant 8,7\leqslant y\leqslant 8$,

此两人到达时间(x,y)与(图1—1)中正方形 $CDEF$ 内的点是一一对应的。

(1) 设 A 表示事件"其中一人必须等另外一人的时间$\dfrac{1}{2}$小时以上",则 A 发生意味着满足如下的不等式。

$x-y>\dfrac{1}{2}$ 或 $y-x>\dfrac{1}{2}$.

由几何概率得

$P(A)=\frac{\triangle GDH\text{ 的面积}+\triangle FMN\text{ 的面积}}{\text{正方形 }CDEF\text{ 的面积}}$

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}{1}=\frac{1}{4}$$

(2) 两人能会面的充要条件是：$|x-y|\leqslant\frac{1}{2}$

则 $P=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

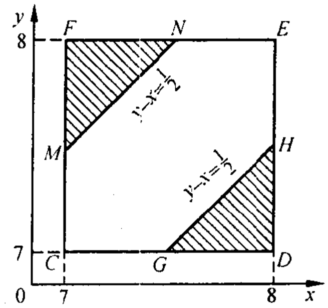

图 1－1

注意：约会问题中，一般总希望见到面的概率大一点，这就要求相互等候的时间长一点，而轮船停靠时却相反，希望不会面的概率大一点，这就要求相互等候的时间短一点（如约会问题①）。

例 7 （抽签问题）甲、乙、丙三人以抽签方式决定谁将得到唯一一张电影票，将两个黑球一个红球放入袋中，甲、乙、丙依次摸球，摸到红球者将得到电影票。

① 如果让甲先摸，结果甲摸到红球，试问乙和丙是否吃亏了？他们为何同意由甲先摸。

② 甲摸到了红球的概率是$\frac{1}{3}$，而当已知甲摸到黑球时，乙摸到红球的概率是$\frac{1}{2}$，甲是否吃亏？

解： ① 设 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙摸到红球的事件，$B_i=\{$第 i 次摸到红球$\}$ $(i=1,2,3)$. 则

$$P(A_1)=P(B_1)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_2)=P(\bar{B}_1B_2)=P(\bar{B}_1)P(B_2\mid\bar{B}_1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$P(A_3)=P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3)=P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2\mid\bar{B}_1)P(B_3\mid\bar{B}_1\bar{B}_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3},$$

故每人得到电影票的概率是一样的，这是用乘法公式再次证明抽签不必争先恐后。

(2) 乙摸到红球这一事件的发生与两个因素有关；甲摸到红球或黑球。由全概率公式：

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=$$

$$\frac{1}{3}\times0+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

由全概率公式再次证明了无论先后次序如何，抽得幸运签的概率是相等的。

例 8 设在某次世界女排赛中，中国人取得决赛权。中国队要与日本队与美国队的胜者争夺冠军，根据以往的战绩，中国队战胜日本队、美国队的概率分别为 0.9 与 0.4，而日本队战胜美国队的概率为 0.5，求中国队取得冠军的概率。

解： 由题意，未完成的日美半决赛谁胜是中国队夺冠的两大因素。

设 $A=\{$中国队夺得冠军$\}$，$B_1=\{$日本队胜美国$\}$，$B_2=\{$美国队胜日本$\}$，由全概率公式：

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=$$

$$0.5\times0.9+0.5\times0.4=0.65$$