新编高等数学题解

（上）

同济高等数学(上)三版题解

是非题题解·综合题题解

警官教育出版社

新编高等数学题解

（上）

同济高等数学（上）三版题解

是非题题解 · 综合题题解

王东生　周泰文
刘后邗　俞　政　侯　宾

警官教育出版社

（京）新登字167号

新编高等数学题解

（上）

同济高等数学（上）三版题解

是非题题解·综合题题解

※

王东生　周泰文　侯　宾
刘后邦　俞　政

警官教育出版社
北京西城西绒线胡同贤孝里14号
邮政编码 100031

※

新华书店北京发行所发行
湖南印刷一厂印刷　湖南青苹果数据中心排版

※

850×1168毫米　32开本　16印张　350千字
1991年8月第1版　1991年11月第1次印刷　印数1—30000册

ISBN7—81027—074—5/G·8　定价:8.50元

前　言

“高等数学”是工科院校的一门重点基础课，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。每年有一大批新同学升入高等院校本科、专科、电大、职大、函大、夜大学习高等数学，他们渴望有一本切合实际的参考部；每年更有一批同志准备硕士学位研究生考试，他们渴望有一本针对性强的复习资料。本书作者根据自己多年来从事“高等数学”教学与辅导的经验，力图靠近这一目标。

本书每一章由四部分组成(第六章由三部分组成)：

第一部分为“内容提要”，书应该越读越薄，每一章中真正应该牢记住，并成为你解题武器的内容其实并不多，这一部分就是为这方面准备的，特别对那些过去学过高等数学，而又急于想检起这门课的同志，无疑将起到立杆见影的效果。

第二部分为：“习题题解”，学习高等数学好坏的一个重要标志是会做题，我们采用同济大学主编“高等数学”第三版，对其中几乎全部习题(一目了然的题除外)给出了详尽地分析与解答，值得强调指出的是，我们决不是为题解而题解：采用该书的习题，是因为该书是我国高等学校使用量最大的一本数学教材，该书在全国优秀教材评选中获国家教委一等奖，该书也曾被许多院校指定为研究生考试复习教材，该书的习题难易适度，联系实

际，比较客观地反映了学习高等数学应掌握的水平，我们从多年习题课教学的经验出发，在许多习题上加了“思路分析”，“注意”，我们希望读者重视这两个方面，这样就可极大地、有效地、提高自己的解题能力，如果仅仅把这部分看成是应付交作业的手段，那就使我们大大地失望了。

第三部分是“是非题题解”，在这一部分里，我们收集了几乎全部重要的是非问题，弄清这些问题，学习就深入进去了，对标准化考试中的选择题，判断就不会辣手了。

第四部分是综合题题解，教学中一个难以克服的困难是解综合题能力的培养、针对这点我们 编写了这一部分。

由于水平有限，时间仓促，不足之处一定难免，敬请同学们，同行们多多指正。

编　　者

一九九一年九月

目　录

第一章 函数与极限

一、内容提要

1. 函数

(1) **函数的概念** 设x和y是两个变量,D是一个给定的数集。如果对于每一个数$x \in D$,变量y按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称y是x的函数,记作$y=f(x)$。数集D叫做这个函数的定义域,x叫做自变量,y叫做因变量。

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数。以后凡未特别说明时,函数都是指单值函数。

(2) **反函数** 设函数$y=f(x)$的定义域、值域分别为D与W,若对于变量y在W中的每一个值,变量x在D中都有满足$f(x)=y$的确定的值和它对应,则x是y的函数,记为$x=\varphi(y)$或$x=f^{-1}(y)$,并称$x=\varphi(y)$或$x=f^{-1}(y)$是$y=f(x)$的反函数.按习惯,自变量、因变量分别用x、y表示,所以$y=\varphi(x)$或$y=f^{-1}(x)$是$y=f(x)$的反函数。

(3) **函数的几种特性**

有界性、单调性、奇偶性、周期性。

(4) **初等函数**

1° 基本初等函数是对幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称。

2° 复合函数 设 $y=f(u)$ 的定义域是 D，$u=\varphi(x)$ 的定义域是 X，值域是 U，若 $U\subseteq D$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 f 与 φ 复合而成的复合函数。

3° 初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数。

2. 极限

(1) 数列的极限

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, \exists\ \text{自然数}\ N \\ \text{只要}\ n>N, \text{就有}\ |u_n-A|<\varepsilon \end{bmatrix}$$

(2) 函数的极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, \exists\ X>0 \\ \text{只要}\ |x|>X, \text{就有}\ |f(x)-A|<\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0 \\ \text{只要}\ 0<|x-x_0|<\delta, \text{就有}\ |f(x)-A|<\varepsilon \end{bmatrix}$$

左极限 $f(x_0-0) \triangleq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0 \\ \text{只要}\ 0<x_0-x<\delta, \text{就有}\ |f(x)-A|<\varepsilon \end{bmatrix}$$

右极限 $f(x_0+0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<x-x_0<\delta,\text{就有}|f(x)-A|<\varepsilon\end{bmatrix}$$

(3) 无穷小与无穷大

1° $\alpha(x)$为某过程中的无穷小$\Leftrightarrow\lim\alpha(x)=0$;

2° $f(x)$为某过程中的无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$;

如$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}\forall\ M>0,\exists\ \delta>0\\ \text{只要 } 0<|x-x_0|<\delta,\text{就有 } f(x)<-M\end{bmatrix}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\forall\ M>0,\exists\ X>0\\ \text{只要 } x>X,\text{就有}|f(x)|>M\end{bmatrix}$$

在同一过程中;除0外的无穷小与无穷大互倒;

有界变量与无穷小之积仍为无穷小。

3° 无穷小比较 设 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0$(此处,α与β分别为$\alpha(x)$、$\beta(x)$的简写)。

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小,特别地,当$c=1$时,称$\beta$与$\alpha$是等阶无穷小,记作$\beta\sim\alpha$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$,则称$\beta$为$\alpha$的k阶无穷小$(k>0)$;

若$\beta-\alpha=o(\beta)$,则称α是β的主部。

(4) **性质**

唯一性 变量若有极限，则极限唯一；

有界性 有极限的变量必有界；

保号性 某时刻以后 $f(x)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）$\Rightarrow \lim f(x)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）；$\lim f(x)>0$（或 <0），$\Rightarrow$ 某时刻以后 $f(x)>0$（或 <0）；某时刻以后 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，$\Rightarrow \lim\varphi(x)\geqslant\lim\psi(x)$；

充要条件 1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

2° $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$（此处 $\lim\alpha=0$）

运算法则 有限个有极限的变量的和（或积）的极限等于各自极限的和（或积）；两个有极限的变量的差（或商）的极限等于各自极限的差（或商），但分母的极限为 0 时除外；

求两个无穷小之比的极限时，分子分母的因子有时可用其等价无穷小来代替。

两个准则： 夹逼准则；单调有界的变量必有极限。

两个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

3. 连续

(1) **$f(x)$ 在点 x_0 处连续**

$$\begin{cases}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0);\\ \Leftrightarrow \lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=0;\\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0 \\ \text{只要 } |x-x_0|<\delta,\text{就有 } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{bmatrix}\end{cases}$$

$f(x)$在点 x_0 处左(右)连续$\Leftrightarrow f(x_0-0)[(f(x_0+0)]=f(x_0)$；

$f(x)$在区间 I 上连续$\Leftrightarrow f(x)$区间上每一点都连续；

* $f(x)$在区间 I 上一致连续$\Leftrightarrow$[$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,对于$\forall\ x_1、x_2\in I$,只要$|x_1-x_2|<\delta$,就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$]

(2)　$f(x)$在点 x_0 处间断$\Leftrightarrow f(x)$在点 x_0 处不连续.

设 x_0 为间断点，假若 $f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$均存在，则 x_0 为第一类间断点，当它们相等时称 x_0 为第一类可去间断点；当它们不相等时称 x_0 为第一类不可去间断点。x_0 为 $f(x)$的第二类间断点$\Leftrightarrow f(x_0-0)$与 $f(x_0+0)$中至少有一个不存在。(x_0 为无穷或振荡间断点)

(3)　**连续与极限的关系**　$f(x)$在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但其逆不真.

(4)　**性质**

1°　**运算性质**

有限个在某点连续的函数之和(或积)，仍在该点连续；

两个在某点连续的函数之商(分母在该点为零的除外)，仍在该点连续。

2°　**反函数、复合函数、初等函数的连续性**

若 $f(x)$在区间 I_x 上单值、单调增加(或减少)且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$上单值、单调增加(或减少)且连续；

设函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数

$y=f(u)$在点 $u=u_0$ 处连续，那末复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 $x=x_0$ 处也连续；

初等函数在其定义区间内连续.

3° 闭区间上连续函数的性质

①在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值；

②在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界；

③设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=0$；

④设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 c，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

二、习题题解

习题 1－1

1.1.2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域.

思路分析 分段函数是一个函数，分段函数的定义域是各段自变量集合之并，分段函数的值域是各段函数值集合之并.

解 定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[-1,1]$

1.1.3 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

思路分析 如果两个函数具有:①定义域相同,②对应规则相同,则这两个函数相同,否则它们就不相同.

解 (1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不是相同函数,因为定义域不同.

解 (2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$ 不是相同函数,因为对应规则不同.

解 (3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 是相同函数,因为它们定义域与对应规则都相同。

1.1.4. 求下列函数的定义域:

(5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (6) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

思路分析 求函数的定义域,就是求使算式有意义的一切实数值,所以往往是先列出不等式组,再解不等式组.

解 (5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$. 使 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 有意义的值是 $1-x^2\neq0$,因为 $1-x^2=0$, $x=\pm1$,所以 $x\neq\pm1$.

使 $\sqrt{x+2}$ 有意义的值是 $x+2\geqslant0$,即 $x\geqslant-2$.

因此所求函数的定义域是 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ($\cup$ 是并集的符号).

解 (6) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$, $\begin{cases} x\neq0, \\ 1-x^2\geqslant0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x\neq0, \\ |x|\leqslant1, \end{cases}$ 亦即 $\begin{cases} x\neq0, \\ -1\leqslant x\leqslant1. \end{cases}$

所以定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1]$ 或 $\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1, x\neq0\}$.

1.1.8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0\quad, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4}),\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$， $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形为

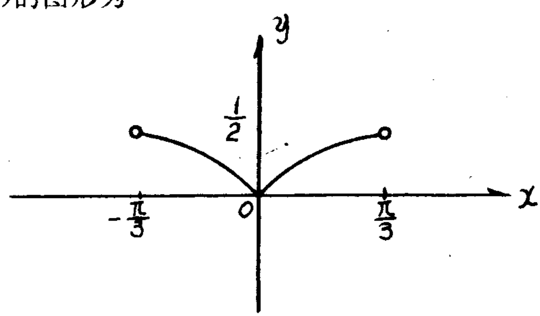

图 1—1—8

1.1.9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$； (4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$； (6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

思路分析 判断函数奇偶性方法一：根据定义，若 $f(-x)=-f(x)$ 则 $y=f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$ 则 $y=f(x)$ 为偶

函数；方法二根据图形：若 $f(x)$ 图形关于原点对称则为奇函数；若 $f(x)$ 图形关于 y 轴对称则为偶函数. 无论是奇函数还是偶函数它们的定义域都应该关于原点为对称区间. 此外一般有奇＋奇＝奇；偶＋偶＝偶；奇×奇＝偶，偶×偶＝偶；奇×偶＝奇；但奇＋偶则为非奇非偶.

解 (3) 因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1-x^2}=f(x).$$

所以此函数是偶函数.

解 (4) 因为

$$f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)$$
$$=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以此函数是奇函数.

解 (5) 因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1$$
$$=-\sin x-\cos x+1\neq\pm f(x),$$

所以此函数是非奇非偶函数.

1.1.11 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

(3) 定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，令