微分拓扑新讲

张筑生 著

2

北京大学出版社

本书前身《微分拓扑讲义》曾荣获“2000年教育部科技进步奖”

微分拓扑新讲

张筑生 著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

微分拓扑新讲/张筑生著. 一北京:北京大学出版社,2002.7
ISBN 7-301-05696-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微分拓扑-高等学校-教材
Ⅳ. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 039613 号

书　　名:微分拓扑新讲
著作责任者:张筑生　著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05696-6/O·0547
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京因温特有限公司
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　11.625 印张　260 千字
2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
印　　数:0001—3000 册
定　　价:18.00 元

本书说明

本书前身《微分拓扑讲义》序言谈到：作为研究生基本课程的教材，应该有宽广的适应面，希望能兼顾"基本概念与基本技术"和"解决重要的问题"等方面. 序言还特别强调了教材的启发性. 本书对所述这些方面作了进一步的努力. 适当增加了一些重要内容；并对某些在理解上可能产生困难的内容作了更多的启发式说明.

本书增补的参考文献[Ko]，是一本 1993 年出版的书. 该书作者 Kosinski 在引言中谈到：每个数学领域在飞速发展时期之后总会留下一些空缺与不足之处，诸如"口传定理"以及某些不完整甚至不正确的证明. 对于一个有时把"容易看出"当作证明方法的学科尤其如此. 该书的作者希望能填补某些空缺. 但他深感"精确细致"与"迂腐"之间的界限往往很不容易区分. 笔者赞赏 Kosinski 的见解和所作的努力. **笔者强调指出：既要精确细致，又不要陷入迂腐，关键在于重视叙述的启发性.**

呈现在读者面前的这本《微分拓扑新讲》，与《微分拓扑讲义》相比增加了不少内容. 第一章新增加的附录，首先介绍函数芽(germ)的概念，使得有关的叙述与讨论在逻辑上更为严谨；随后较具体地介绍余切空间的概念. 本书的第一章，第二章和全书最后的附录 δ 可以作为流形论的一个简明扼要的导引. 第四章新增加较长的附注 4.4，对向量丛的抽象概念与具体体现之间的联系作启发式的说明. 第六章新增加了介绍带边流形的领圈邻域与倍流形的一节；有关 Morse 函数的一节也增加了一些内容. 其他新增加的内容还很多，这里就不再一一列举了. 除了新增加的材料而外，叙述中还随处补充了一些简明的启发性的说明与附注.

本书前身《微分拓扑讲义》曾于 2000 年荣获中华人民共和国

教育部颁发的科学技术进步奖二等奖.本书在其基础上又作了进一步的努力,希望能为读者提供一本选材更充实丰富,叙述更具有启发性的教材与参考书.

《微分拓扑讲义》序言的基本叙述完全适用于此书,因此将其稍作修改仍作为本书的序言.

张筑生

2002年1月于北京大学

序　　言

微分拓扑是 20 世纪成就和影响最大的数学分支之一.因与微分拓扑有关的研究而获得 Fields 奖殊荣的数学家就有好几位.许多国家的著名大学都将“微分拓扑”列为大学生和研究生的重要课程并且列为博士资格考试的重要科目.微分拓扑在其他学科领域也有重要的应用.1983 年诺贝尔经济学奖的得主 Gérard Debreu 在获奖演说中,对于微分拓扑的方法帮助他实现关键性的突破曾有生动的描述.(该获奖演说的译文“数学思辨模式的经济理论”载于《数学进展》杂志第 17 卷第 3 期(1988 年 7 月).)

微分拓扑的教材,较早且影响深远的有 1958 年 Milnor 在 Princeton 大学讲授微分拓扑的讲义(序言附记中所列的参考书[1]).到了 20 世纪 60 年代,先后出现了两本讲述微分拓扑的非常精彩的小册子.1963 年出版的 Munkres 的《初等微分拓扑学》(序言附记中的[2]),着重介绍某些最基本的微分拓扑技术手段(他所称的“初等”技术).1965 年出版的 Milnor 的《从微分观点看拓扑》(序言附记中的[3])更为人们所珍爱.该书侧重于用微分的技术手段解决拓扑问题,对许多经典的拓扑定理作了简单明快引人入胜的处理.稍后出版的微分拓扑教材还有序言附记中列出的[4],[5]和[6]等,其中[4]着重于用微分技术解决拓扑问题(可以看成是[3]的延伸);[6]着重于介绍基本概念与基本技术;[5]则对两方面都有所兼顾.

笔者多年来在北京大学给研究生和部分高年级大学生讲授微分拓扑课程.这本讲义就是整理积累的讲稿写成的.作为研究生基本课程的教材,应该有较宽广的适应面.笔者希望能兼顾“基本技术”与“解决重要而又有魅力的问题”等方面.序言附记中列出的参

考书[1]～[6]都可作为阅读本书的重要参考资料(书末还列有其他参考文献).学习这门课程的预备知识是有关微分流形的一些最基本的概念与事实.本书的第一章对所需的预备知识作了简单扼要的讲解(书中的第一章,第二章和最后的附录δ是流形论基础知识的一个概述).本书第三章至第六章重点讲解微分拓扑学的一些最基本的概念并重点介绍一些典型的技巧方法,这些都是学习微分拓扑所必须掌握的.第七章至第十二章一方面继续讲解某些重要概念,另一方面着重于介绍基本概念和典型技巧方法的广泛应用.各章所证明的著名定理对数学的各分支及其他许多学科的研究与应用都是非常重要的.在整理讲稿的时候,笔者曾为叙述的启发性而煞费苦心,希望能避免过分的形式化而强调问题的实质.第四章讲解向量丛与管状邻域、映射的光滑化与同伦的光滑化等非常重要的内容,却从很简单的引例开始,力图做到形象生动并且深入浅出.对初学者而言,在各章的学习过程中自己举出一些实例并且画一些适当的示意图形以帮助理解,仍然是很有必要的.笔者热诚欢迎读者们的意见和建议.笔者诚挚地感谢姜伯驹教授和李忠教授对本书出版的支持,感谢责任编辑刘勇所做的细致工作.

根据笔者的经验,本书的材料适用于每周授课3学时的一学期课程.如果希望对内容作适当的删减以开设一个较少学时的课程,那么以下一些建议或许有所帮助:

(1) 如果学生对点集拓扑和微分流形的基础知识已经有了较好的理解,那么第一章和第二章的大部分内容都不必在课堂上讲授.

(2) 第三章和第四章所介绍的嵌入与管状邻域技术是很重要的.但应强调的是 Whitney 嵌入定理与管状邻域定理的结论.可以概要介绍这些定理证明的基本思路与重要的技术手段.至于这些定理证明的细节处理,在讲课的时候却是大可省略的.

(3) 第五章§3和§4的材料亦可省略.因为在该章的§5中利用参数横截定理所作的关于横截逼近定理的证明,适用于无边

流形与带边流形这两种情况.

(4) 第六章 §4 的材料可以留给学生自己去看,不一定在课堂上详细讲述.

(5) 第八章至第十二章的材料可以根据实际情况有选择有重点地讲述其中的一部分. 例如,可以重点地讲述模 2 情形的映射度和相交数,然后通过类比简单地介绍定向情形的相应结论(省去大部分证明).

张筑生

1995 年 7 月写于北京大学

2002 年 1 月稍作修改

附记　主要参考书介绍

[1] Milnor, J., *Differential Topology*. (译文载入《从微分观点看拓扑》一书(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.)

[2] Munkres, J., *Elementary Differential Topology*, *Princeton* University Press, 1963. (李培信译,《初等微分拓扑学》,上海科学技术出版社,1966.)

[3] Milnor, J., *Topology from a Differential Viewpoint*, University of Virginia Press, 1965. (熊金城译,《从微分观点看拓扑》,上海科学技术出版社,1983.)

[4] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., 1974.

[5] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[6] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.

关于编号的说明

项目编号　在每一章里，引理、命题、定义、定理、注记和例等项目用两个数码统一编号：前一数码表示项目所在的节，后一数码表示项目在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开.

公式编号　在每一章里，公式用带有圆括弧的两个数码编号：前一数码表示公式所在的节，后一数码表示公式在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开.

项目与公式的引用　在同一章中引用时，直接写出所引项目或公式的编号. 在不同章中引用时，先要指明所引项目或公式所在的章，然后才是其编号.

图或图表的编号　在全书中，图和图表统一按顺序编号.

关于某些符号与用语的说明

常以 $\mathrm{id}: X \to X$ 表示集合 X 的恒同映射(id 将 X 的每一点映到自己).

常以 $\# E$ 表示集合 E 的基数(对于有限集合,就是该集合中的元素个数).

如无另外的说明,讲义中所谈到的"可数"均表示"至多可数",即包括"有限"的情形.

对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 的有限子集 F,常以 $\max F$ 表示 F 中的最大数,并用 $\min F$ 表示 F 中的最小数. 对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 中的更一般的(不一定有限的)子集 G,常以 $\sup G$ 表示 G 中数的上确界,并用 $\inf G$ 表示其下确界.

符号 sgn 表示这样一个实函数:

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{对于 } x > 0; \\ 0, & \text{对于 } x = 0; \\ -1, & \text{对于 } x < 0. \end{cases}$$

这里和以后许多类似的情形,我们都以符号" := "表示"定义为",即表示"右边的式子是左边记号的定义".

对于 $n \times n$ 方阵 A,常以 $\det A$ 表示其行列式. 对于 $m \times n$ 矩阵 B,约定以 $\operatorname{rank} B$ 表示它的秩.

对于拓扑空间的子集 S,常以

$$\operatorname{int} S$$

表示 S 的内部(即由 S 的全体内点组成的集合). 还约定以

$$\overline{S}$$

表示 S 的闭包(即包含 S 的最小闭集).

设 (X, d) 是距离空间. 对于 X 的非空子集 E 和 F,约定记

$$d(E,F):=\inf_{x\in E,y\in F}\{d(x,y)\}.$$

通常以 d(·,·)表示距离函数,但对于可能引起混淆的情形,也往往以 dist(·,·)表示距离函数.

常用小写的拉丁字母,例如 x,表示空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的点.这时,常以带上标(或带下标)的 x 表示 x 的各分量,例如

$$x=(x^1,\cdots,x^m)\in\boldsymbol{R}^m.$$

常以$\|x\|$表示 x 的 Euclid 范数,即

$$\|x\|:=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2}.$$

对于定义于 $D\subset\boldsymbol{R}^m$ 并且映入 $\boldsymbol{R}^n$ 的函数 f,也可用附以上标(或下标)的办法指明其分量,例如:

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x)),$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^m)\in D$.对类似这样的情形,上标的意义可以从行文中看出,不至于被误认成幂指数.

如果 D 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$$

是定义于 D 上的连续可微映射,那么该映射的 Jacobi 行列式(常简记为 $J_f(x)$)指的是

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}:=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n}\end{vmatrix}.$$

本书常用"在 p 点邻近"的说法表示"在 p 点的某个邻域中"这样的意思.例如:"f 是在 p 点邻近有定义的 C^r 函数"意指"函数 f 在 p 点的某个开邻域内有定义,并且在该邻域内是 r 阶连续可微的".

从第二章起,所提到的流形均被认为是满足第二可数公理的.

我们还约定用方框记号"□"表示:"证明完成"或者"证明较简单,不再写出了"这样的意思.

目　录

第一章 预备知识

阅读本书的预备知识是有关微分流形和可微映射的一些最基本的概念.本章将对这部分内容作一个简明扼要的介绍.

逆函数定理是微分流形概念的基石.本章§1按照我们需要的形式陈述并证明逆函数定理,着重强调该定理的拓扑意义.§2所介绍的代数基本定理的拓扑证明,是显示逆函数定理拓扑意义的一个范例.经典定理的别开生面的新证明总是能引起人们浓厚的兴趣.§3,§4和§5分别介绍微分流形,可微映射和切空间等概念.附录α介绍余切空间的概念.

§1 逆函数定理

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,$f:\ \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射($r\geqslant 1$),并设 $a\in\Omega$. 逆函数定理借助于**线性映射** $A=\mathrm{D}f(a)$**可逆**这样的条件,判断 f 在 a 点某个开邻域上的局部微分同胚性质.

引理 1.1 设 $A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 是一个可逆线性映射,则存在正实数 σ,使得

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad \forall x\in\boldsymbol{R}^n.$$

证明 因为 A 是可逆线性映射,所以

$$\xi\neq 0\Longrightarrow A\xi\neq 0.$$

易知 $\|Ax\|$ 是变元 x 的连续函数,因而它在球面

$$S=\{\xi\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\|\xi\|=1\}$$

上取得最小值

$$\inf_{\xi\in S}\{\|A\xi\|\}=\sigma>0.$$

因为对任何非零的 x 有 $\frac{x}{\|x\|}\in S$,所以

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\geqslant \sigma,$$

即

$$\|Ax\|\geqslant \sigma\|x\|.$$

上式对 $x=0$ 显然也成立. $\square$

引理 1.2 设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,

$$f: G\to \boldsymbol{R}^n$$

是 C^r 映射($r\geqslant 1$),$a\in G$. 如果 $\mathrm{D}f(a)=A$ 是可逆线性映射,那么存在 a 点的开邻域 $U\subset G$ 和实数 $\omega>0$,使得

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant \omega\|x'-x\|,\quad \forall x',x\in U.$$

因而 f 限制在 U 上是一个单映射.

证明 记 $\varphi(x)=x-A^{-1}f(x)$,则有

$$\mathrm{D}\varphi(x)=I-A^{-1}\mathrm{D}f(x),$$
$$\mathrm{D}\varphi(a)=0.$$

因而存在 a 点的开邻域 $U\subset G$,使得限制在 U 上有

$$\|\mathrm{D}\varphi(x)\|\leqslant \rho<1,$$

这里 ρ 是取定的介于 0 和 1 之间的实数,例如可取 $\rho=1/2$. 于是,对于任何 $x',x\in U$ 有

$$\|\varphi(x')-\varphi(x)\|\leqslant \rho\|x'-x\|.$$

又因为

$$f(x')=A(x'-\varphi(x')),\quad f(x)=A(x-\varphi(x)),$$

所以有

$$\begin{aligned}\|f(x')-f(x)\|&=\|A((x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant\sigma\|x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant\sigma(\|x'-x\|-\|\varphi(x')-\varphi(x)\|)\\&\geqslant\sigma(1-\rho)\|x'-x\|\end{aligned}$$