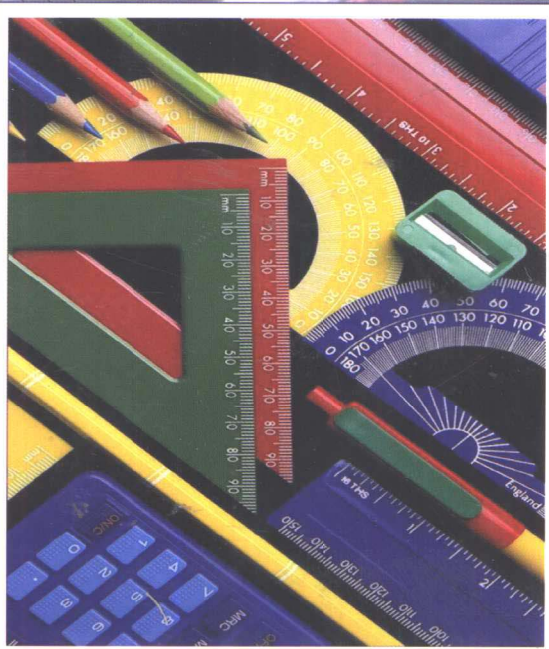
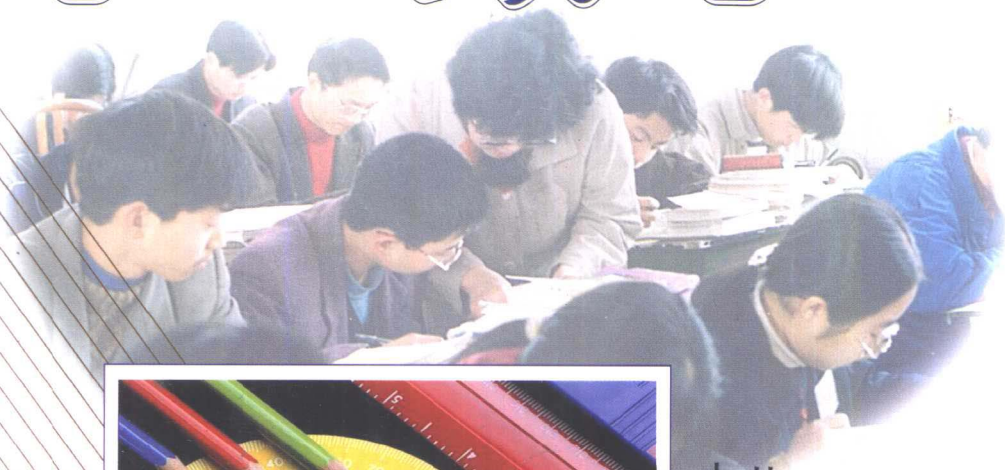


高中自学辅导实验教材

高三数学



丛书主编 王兴华等
本书主编 刘文武等

科学出版社

高中自学辅导实验教材

高三数学

丛书主编 王兴华等

本书主编 刘文武等

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是根据国家教育部现行的教学大纲并参照有关版本的内容,用心理学理论原则编写的以学生自学为主的实验教材。书中主要通过“复习要求”、“要点回顾”、“要点点拨”、“例题分析”和“强化训练”等栏目,对高中数学全部知识进行了综合性的回顾、总结和提炼。本书还附有极具参考价值的专题讲座和综合练习,对于高三数学复习来说是一本非常实用的教材。本书可供高中三年级学生、有关教师及其他感兴趣的读者阅读、参考。

高中自学辅导实验教材

高三数学

丛书主编 王兴华等

本书主编 刘文武等

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2002年9月第一次印刷 印张: 31 3/4

印数: 1—5 800 字数: 753 000

ISBN 7-03-010775-6/G·1132

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈兰各〉)

高中自学辅导实验教材

《高三数学》编委会

顾问	王文湛	国家教育部副总督学 原国家教育部基础教育司司长				
	匡培梓	原中国科学院心理所所长 全国政协委员				
	林崇德	原北师大发展心理所所长 全国心理学会副理事长				
主任	林仲贤	张宝富	张景	张永明	谭永兴	王兴华
副主任	王少波	王洪奎	张学甫	纪永峰	邱德辉	刘诚信
	刘克均	吴童玲	张维杨	张世先	兰宏	秦福利
	秦爱国	秦平	崔永根	韦田丁	魏民	
	王兴华	李娟				
丛书主编	刘文武	贺家杰	蒋志敏	秦爱国		
本书主编	袁效敏	吕彦修	秦平	王少波	韦志规	高云波
副主编	(以姓氏笔画为序)					
	王丽新	卞文杰	白洁华	包健民	刘文武	刘任国
	行伟	朱建荣	吕彦修	吴凤金	张小英	单淑丽
	赵玉霞	赵静芳	贺家杰	袁效敏	高锴	耿建霞
审稿	刘文武	张小英				

序 言

王兴华老师是中国科学院心理研究所一位研究人员，多年来一直从事教育心理学的研究工作，尤其是在自学辅导教学方面，积累了许多经验。她曾主编中学自学辅导教学实验教材多种，其中有数学、物理、化学等。这些教学实验教材很有特色，是运用教育心理学的一些基本原理、原则，结合学生心理发展的规律特点进行编写的。这些教材在全国一些中学进行了10年的实验，均取得了很好的效果，深受教师和学生的欢迎。

在教学改革中，如何加强对青少年全面素质的培养是大家关心的问题。近年来，对青少年素质的培养问题，从中央领导直到有关教育部门都十分重视。在传统的教育中，多由教师按部就班地传授知识，强调升学率，进行“满堂灌”，学生和教师都负担很重，这种“应试教育”已明显不符合当前“素质教育”的要求。要大力提高青少年的全面素质，就必须在教学改革中，通过各种有效途径提高教学质量。要提高教学质量就必须进行教材的改革。王兴华老师与富有教学经验的老师共同编写的自学辅导教材是为适应当前的教学改革需要而编写的。她先后主编出版的数学、物理、化学等自学辅导教材，相继在全国一些学校进行了教学实验。实验证明：这种自学辅导教材可以明显提高学生的学习兴趣，增强他们的学习信心，培养良好的学习习惯和自学能力，学习成绩明显提高，与此同时也大大减轻了学生和教师的负担。

中学自学辅导教材的编写最先是在一些理科课程上进行的，是否也可以适用于其他学科呢？我国著名心理学家，中国科学院心理研究所原所长潘菽教授曾这样说过：从原理上来看，应该是可以的，但要进行大量的研究工作。王兴华老师与一些中学富有教学经验的教师相结合，在以往长期实验工作的基础上，对原有的自学辅导教学教材做了进一步的改进，使其更完善，同时对一些文科的自学辅导教材（语文、外语、历史、地理）也做了探索性的编写。由于这些教材的编写密切结合了学生的心理特点，运用教育心理学的理论、原则，内容深入浅出，循序渐进，重点突出，易于学习与掌握，因此，我相信这些实验教材将会进一步开出绚丽的花朵。

林仲贤

原中国心理学会理事长

2002年4月于北京

前 言

党和国家领导人曾多次提出要深化教育改革,全面推进素质教育,减轻学生负担,提高教学质量,使学生的身心得到健康的发展。

原国家教委副主任柳斌认为,根据教材编写大纲第33条中的规定,教材在统一基本要求的前提下,可以实行多样化;要提倡鼓励编写有特色的教材,不一定成套,单科也可以。他还认为,课程教材对学习能力的要求是不容忽视的。教学要重视个性培养,发展特长,强调因材施教原则。教材结构要多考虑学生的心理因素,不能只考虑知识的逻辑关系,要以学生活动为中心来安排教学。

英国心理学家戴维·刘易斯说过,每一个正常的孩子都具有足够的聪明才智和成功的潜力,问题只在于如何有效地挖掘并将其引入正确的发展轨道。教育学和心理学家认为:成功的教育主要不在于传授知识,而在于提供获取这些知识的途径和方法,并同时激发和培养个人对学习的自然渴望。美国心理学家斯金纳主张不是对儿童讲授,而是编写“程序教材”让学生自己去学。中国科学院心理研究所原所长潘菽在1980年提出“自学辅导教学实验”,他说:“为了四化的需要,我们的教育必须进行一番实质性的改革,而中小学阶段的教学改革更是一个重要的问题。我们所需要的教学改革很可能就是自学辅导教学这样的教学方式。”

根据以上的精神,我们从心理学的角度考虑,对传统课堂教学形式进行改革。为了提高学生素质,培养新一代建设人才和接班人,我们自1989年开始组织编写了《高中数学》实验教材,1990年正式在湖北、湖南、河南、河北、江西、江苏、广东、广西、吉林、辽宁、黑龙江、四川等省区的一些学校进行教学实验。数学教学实验成功后,在师生、家长的呼吁下,1995年又编写了《高中物理》、《高中化学》自学实验教材。10多年来,使用数学、物理、化学实验教材的班级无论在平时考试还是在期中、期末考试,以及竞赛、高考时成绩都比本校同年级对照班高出10分左右,自学能力、学习积极性也都比对照班有所提高。因此,这套教材受到社会上各界人士的好评,也得到教育部有关领导的支持和承认。此课题在1993年曾被列入国家自然科学基金项目,充分说明了这一教改实验是成功的、有生命力的,同时也是可行的。

为什么课堂自学辅导教学实验深受大家的肯定和欢迎呢?这与本教材和教学法的如下特点有关。

1. 本教材编写时运用了心理学的理论、原则与方法,教材适合学生的认知规律、年龄特点和个别差异。

2. 自学教材编写上遵循了心理学的“小步子”原则。教材被分成小的模块,保证学生能够由浅入深地自学。这种教材减少了学习的挫折感,增强了自信心,提高了学习自觉性。

3. 运用及时强化原则(各章节备有练习及练习答案),学生自学时可以及时了解自学的效果,从而激发学习兴趣,调动学习的积极性和主动性。

4. 教材中提出了学习方法与学习思路,以及启发式、产生式规则,解决了学生自学的困难,从而减少了学生的认知负荷。

5. 我们提出了与教材配套使用的课堂教学模式(回忆、自学、辅导、讲解),概括了整个课堂教学过程中“教与学”的任务。回忆,指教师在课堂上学习新课前提问与新知识有关的旧知识,为引入新知识做好铺垫,通过回忆、再认识,让学生摆脱头脑中紊乱的思维,集中注意力,引入新课(用时3分钟左右)。自学,指学生在课堂上积极主动地去看书、划重点、做眉批、做例题与习题、对答案。对答案有三个效应:①做对了学生划对号,是强化;②做错了,学生划叉号,是纠正;③不会做时,答案是提示。学生可以依据自己的水平调整学习进度。自学用时30分钟左右(根据课堂上教学内容的多少、难易程度,确定自学时间。一般自学时,老师不要让学生停止自学而去听他讲解。学生只有通过自学解决了难题,才能培养出自学能力、独立思考能力、创造思维能力,才能发展个性)。辅导,指老师在学生自学时主动积极地去指导优生、辅导差生、鼓励中等生,抽查学生作业,检查学生读书是否读懂,解决学习中碰到的各类疑难问题,使各类学生都能及时得到老师的关心和帮助。讲解,指老师针对学生自学时难点、重点问题,及典型的共性问题,予以讲解,包括纠正格式、强化概念、分析归纳知识等。通过辅导和讲解,起到弥补漏洞,使学生掌握本节课的新知识的作用。此环节用时10分钟左右。

6. 自学辅导教学的心理学原则是:①自定步调与群定步调相结合;②刺激、反应、强化相结合;③知道结果与不知道结果相结合;④外显反应、内隐反应和暗含反应相结合;⑤自然强化与人工强化相结合;⑥自学、辅导、指导、讲解相结合。

7. 自学为主的方法培养了学生的独立思考能力、观察分析能力和动手动脑能力。

8. 课堂教学以学生活动为中心,学生可以自定学习进度,基础好的可以多学、快学,基础差的可以慢学、少学(练习题分A、B,以供选择),学生都可以学会教学大纲上规定的内容,并使学生有所提高,这避免了老师讲课不照顾个别差异、一刀切、满堂灌、学生被动听的情况,可有效实施因材施教。

9. 由于课堂上给学生 $\frac{2}{3}$ 的自学时间(看书、做练习、对答案),同时老师能巡视课堂予以辅导,及时检查批改作业,这就减轻了课下学生做作业、老师改作业的负担。

10. 使用本教材,学生不但学会了知识,而且学会了学习方法,培养了学习意志、学习兴趣、良好的学习习惯与学习品质。

总之,自学教材及自学方法,改变了课堂上教与学的形式,变被动学习为主动学习,也解决了传统讲授法不能解决的面向全体学生、因材施教、发展学生个性等问题。

本教材在编写过程中,得到有关领导和许多同志的指导、鼓励和帮助。

尽管编者为本教材的编写做了极大的努力,然而限于时间和水平,错误和不当之处在所难免,衷心希望参加实验的师生和广大热心的读者提出批评和指正,以便今后改进。

王兴华

2002年于北京

目 录

序 言

前 言

第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 集合的概念	(2)
1.2 集合的运算	(6)
1.3 简单不等式的解法	(9)
1.4 逻辑联结词	(11)
1.5 四种命题	(13)
1.6 充分条件与必要条件	(15)
第二章 函数	(18)
2.1 映射与函数	(18)
2.2 函数的定义域	(22)
2.3 函数的单调性	(24)
2.4 函数的奇偶性	(27)
2.5 反函数	(30)
2.6 函数的值域与最值	(34)
2.7 函数的图象	(38)
2.8 二次函数	(42)
2.9 指数和指数函数	(46)
2.10 对数和对数函数	(49)
2.11 指数方程和对数方程	(52)
2.12 函数的综合应用	(55)
第三章 数列	(61)
3.1 数列的概念	(61)
3.2 等差、等比数列的概念及运算	(64)
3.3 等差、等比数列的性质及其应用	(68)
3.4 数列求和	(71)
3.5 等差、等比数列应用问题	(74)
第四章 三角函数	(79)
4.1 角的概念的推广、弧度制	(79)
4.2 任意角的三角函数	(82)
4.3 同角三角函数的基本关系式	(84)
4.4 诱导公式	(86)
4.5 两角和与差的三角函数	(88)
4.6 三角函数的图象和性质	(92)
4.7 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质	(96)

4.8 已知三角函数值求角	(101)
第五章 平面向量	(104)
5.1 向量	(105)
5.2 向量的加法与减法	(107)
5.3 实数与向量的积	(109)
5.4 平面向量的坐标运算及线段的定比分点	(111)
5.5 平面向量的数量积	(114)
5.6 平移	(117)
5.7 正弦定理、余弦定理、解斜三角形	(118)
专题选讲	(124)
第一讲 向量及其运算	(124)
第二讲 解斜三角形	(126)
第六章 不等式	(130)
6.1 不等式的性质	(130)
6.2 算术平均数与几何平均数	(133)
6.3 不等式的证明(比较法、分析法、综合法)	(138)
6.4 不等式的解法举例	(141)
6.5 含有绝对值的不等式	(145)
6.6 不等式的应用	(148)
第七章 直线和圆的方程	(152)
7.1 直线的方程	(152)
7.2 两条直线的位置关系	(155)
7.3 线性规划	(158)
7.4 圆的方程	(162)
专题选讲	(166)
直线与圆、圆与圆的位置关系	(166)
第八章 圆锥曲线	(169)
8.1 椭圆及其标准方程	(169)
8.2 椭圆的几何性质	(172)
8.3 双曲线及其标准方程	(175)
8.4 双曲线的几何性质	(178)
8.5 抛物线及其标准方程	(181)
8.6 抛物线的几何性质	(183)
8.7 直线与圆锥曲线的位置关系	(185)
8.8 轨迹问题	(188)
8.9 圆锥曲线中的最值问题	(191)
第九章 正方体“联想”	(194)
联想: 00 正方体的基本知识	(196)
联想: 01 正方体与空间线线、线面、面面位置关系	(197)

联想: 02 正方体与立体几何公理	(197)
联想: 03 正方体与立体几何定理	(198)
联想: 04 正方体与异面直线	(203)
联想: 05 正方体与角和距离	(205)
联想: 06 正方体与四面体——切割与补形	(208)
联想: 07 正方体与等边圆柱和球	(212)
联想: 08 正方体与圆锥	(214)
联想: 09 正方体与折、转、展	(216)
联想: 10 正方体与平行六面体	(219)
联想: 11 正方体与截面	(220)
联想: 12 正方体与排列组合	(220)
联想: 13 正方体与立体几何最值	(221)
联想: 14 正方体与等积变换	(221)
第十章 排列、组合、二项式定理	(222)
10.1 分类计数原理与分步计数原理	(222)
10.2 排列、组合	(225)
10.3 排列、组合的混合问题	(228)
10.4 二项式定理及二项展开式的通项	(231)
10.5 二项式定理的应用	(234)
第十一章 极限与连续	(238)
11.1 数列的极限及其四则运算 (一)	(238)
11.2 数列的极限及其四则运算 (二)	(243)
11.3 函数的极限及其四则运算 (一)	(247)
11.4 函数的极限及其四则运算 (二)	(251)
11.5 函数的连续性	(254)
第十二章 导数与微分	(259)
12.1 导数的概念与几种常见函数的导数	(259)
12.2 函数的和、差、积、商的导数与复合函数的导数	(262)
12.3 对数函数与指数函数的导数及微分的概念与运算	(264)
12.4 函数的单调性及可微函数的极值	(266)
12.5 函数的最大值与最小值	(269)
第十三章 积分	(273)
13.1 不定积分	(273)
13.2 定积分的概念和计算	(277)
13.3 定积分的应用	(281)
第十四章 复数	(286)
14.1 复数的概念	(286)
14.2 复数的几何意义及其应用	(289)
14.3 复数的代数形式及其运算	(292)

14.4	复数的三角形式	(295)
14.5	复数的三角形式运算	(297)
14.6	复数模的有关问题	(300)
14.7	复数集上的方程	(303)

第一章 集合与简易逻辑

【本章考试内容】

本章主要内容是集合的初步知识、简单不等式的解法和简单逻辑知识. 集合的初步知识包括集合的有关概念, 集合的表示及集合间集合的关系.

(一) 集合

1. 集合的基本概念.

(1) 集合的元素, 元素的特征;

(2) 空集的概念及表示方法;

(3) 集合的分类: 有限集和无限集;

(4) 集合的表示方法: 列举法, 描述法以及图示法;

(5) 常见数集: $\mathbf{N}$ (自然数集)、 $\mathbf{Z}$ (整数集)、 $\mathbf{Q}$ (有理数)、 $\mathbf{R}$ (实数集)、 $\mathbf{C}$ (复数集)、 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ (正整数集).

2. 集合与集合的关系.

(1) 子集: 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 就称集合 A 是集合 B 的子集.

如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 就说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;

(2) 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

(3) 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

(4) 补集: $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$, 其中, A 是 U 的子集.

(二) 简单不等式的解法

1. 含绝对值的不等式.

$|x| < a (a > 0)$ 的解集是 $\{x | -a < x < a\}$, $|x| > a (a > 0)$ 的解集是 $\{x | x < -a, \text{ 或 } x > a\}$.

2. 一元二次不等式.

一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0$ 的解法. 要求必须熟练掌握.

3. 简单高次不等式与分式不等式的解法.

解法思路: 通过移项把不等式一边化为零, 而另一边化为因式之积 (或商), 然后用“根轴法”求解.

(三) 简易逻辑

1. 命题.

简单命题, 复合命题.

2. 复合命题真假的判断.

一般复合命题由或、且、非构成, 利用其值数可判断其真假.

3. 命题的四种形式.

原命题、逆命题、否命题、逆否命题;一个命题与它的逆否命题是等价的.

4. 如果已知 $p \Rightarrow q$, 那么我们说, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件. 如果已知 $p \Leftrightarrow q$, 那么我们说, p 是 q 的充要条件.

(四) 学习时注意的问题

(1) 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 用符号表示就是 $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \subsetneq A$ (A 非空);

(2) 注意 $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别: $\in$ 表示元素与集合之间的关系, $\subseteq$ 表示集合与集合的关系;

(3) 常用结论:

$$1) A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A;$$

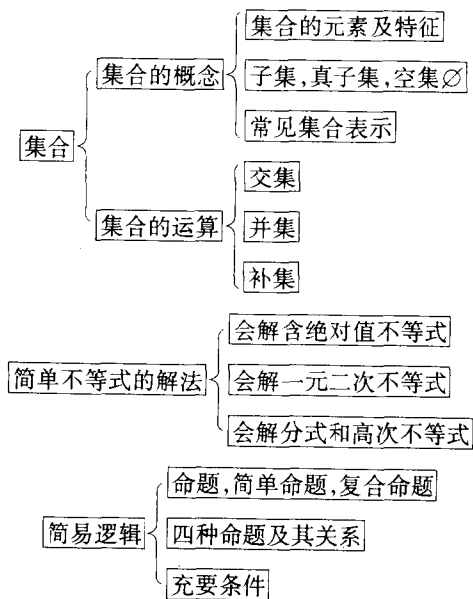
$$2) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B;$$

$$3) \complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B);$$

$$4) \complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B);$$

$$5) A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cup (\complement_U A) = U, A \cap (\complement_U A) = \emptyset.$$

【本章知识结构】



1.1 集合的概念

(一) 复习要求

1. 理解集合的概念, 掌握集合的表示方法.

2. 了解集合中元素的性质: 确定性、互异性、无序性.

3. 了解空集和全集的意义以及空集的性质 $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \subsetneq A$ (A 非空).

4. 了解属于、包含、相等关系的意义,会用 $\in, \notin, \subseteq, \supsetneq, \subsetneq$ 等符号表示元素与集合,集合与集合的关系.

5. 掌握常见数集的表示:自然数集 $\mathbf{N}$ 、正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 、整数集 $\mathbf{Z}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 、实数集 $\mathbf{R}$ 、复数集 $\mathbf{C}$.

(二) 要点回顾

1. (1) 集合的表示方法有_____;

(2) 若 a, b, c 为非零实数, 则代数式 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 值的集合是_____;

(3) 不等式 $|x| < -x$ 的解集是_____;

(4) 用文氏图表示复数集、实数集、虚数集和纯虚数集之间的关系;

(5) 设集合 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N = (\quad)$

(A) $\{x | 0 \leq x < 1\}$

(B) $\{x | 0 \leq x < 2\}$

(C) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$

(D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ (97 高考题)

(6) 设 I 是全集, 集合 P, Q 满足 $P \subsetneq Q$ 则下列的结论中错误的是()

(A) $P \cup Q = Q$

(B) $(\complement_I P) \cup Q = I$

(C) $P \cap (\complement_I Q) = \emptyset$

(D) $(\complement_I P) \cap (\complement_I Q) = (\complement_I P)$ (94 上海题)

2. 选用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supsetneq, =, \subsetneq$)填空.

3. $14 \quad \mathbf{Q}, \{0\} \quad \emptyset, \emptyset \quad \{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}, \{0\} \quad \{0, 1, 2\}, \{x | x \in \mathbf{R}, x \geq 1\} \quad \{x | x \geq 2, x \in \mathbf{R}\}, \{x | x \neq 3, x \in \mathbf{R}\} \quad \{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 1 \text{ 且 } x \neq 2\}.$

3. 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集个数是_____, 真子集个数是_____.

(三) 要点点拨

1. 本节重点是区分 $\in, \subseteq$ 两种符号用法. $\in$ 是表示元素与集合的关系, $\subseteq$ 表示集合与集合的关系. 符号 $\subsetneq$ 是表示真子集关系.

2. 在解有关问题时, 要注意利用 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 两个等价关系.

3. 空集是个特殊集合, 在解有关问题时, 要注意空集这种特殊情况. 即若 $A \subseteq B$, 要考虑 $A = \emptyset$ 这种情况.

(四) 例题分析

例 1 设 $A = \{x | \sqrt{x-1} \leq 3-x\}, B = \{x | x^2 - (a+1)x + a < 0\}$, (1) 若 $A \supsetneq B$, 求实数 a 的取值范围; (2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

分析: (1) $A \supsetneq B$, 说明 B 是 A 的真子集, 解题时, 首先求出不等式 $\sqrt{x-1} \leq 3-x$, $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 的解集, 再利用数轴求出 a 的取值范围;

(2) $A \cap B = \emptyset$, 说明 A, B 没有公共元素. 但无论是 $A \supsetneq B$, 还是 $A \cap B = \emptyset$, 都要考虑 $B = \emptyset$ 的情况.

解: (1) $A = \{x | \sqrt{x-1} \leq 3-x\} = \{x | 1 \leq x \leq 2\}.$

当 $a > 1$ 时, $B = \{x | 1 < x < a\}$, 所以 $1 < a \leq 2$;

当 $a < 1$ 时, $B = \{x | a < x < 1\}$, 不合题意;

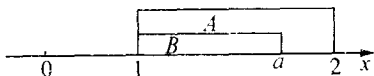


图 1-1

当 $a=1$ 时, $B=\emptyset$, 满足 $B\subseteq A$ 条件.

故所求 a 的取值范围是 $1\leq a\leq 2$;

(2) 当 $a>1$ 时, 不合题意;

当 $a\leq 1$ 时, 满足条件.

故所求 a 的取值范围是 $a\leq 1$.

例 2 已知 $A=\{1, 1+d, 1+2d\}$, $B=\{1, r, r^2\}$ (其中 $d\neq 0, r\neq 1$), 当 d, r 满足什么条件时, $A=B$, 并求 A .

解: 两个集合相等, 即要求它们的元素相同. 所以只要使

$1+d=r, 1+2d=r^2$, 或 $1+d=r^2, 1+2d=r$.

当 $\begin{cases} 1+d=r \\ 1+2d=r^2 \end{cases}$ 时, 求得 $r=1$, 与条件 $r\neq 1$ 矛盾, 因此在此情况下, $A=B$ 不能成立.

当 $\begin{cases} 1+d=r^2 \\ 1+2d=r \end{cases}$ 时, 可得方程 $2r^2-r-1=0$,

即 $(2r+1)(r-1)=0$, 再由条件 $r\neq 1$ 知 $r=-\frac{1}{2}$, 以 $r=-\frac{1}{2}$ 代入求得 $d=-\frac{3}{4}$.

所以当 $r=-\frac{1}{2}, d=-\frac{3}{4}$ 时, $A=B=\left\{1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right\}$.

例 3 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合:

(1) S 内不含 1; (2) 若 $a\in S$, 则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

解答下列问题:

(1) 若 $2\in S$, 则 S 中必有其他数, 试求之;

(2) 求证: 若 $a\in S$, 则 $1-\frac{1}{a}\in S$;

(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个? 为什么?

分析: 解答此题的关键是抓住已知 $a\in S$, 则 $\frac{1}{1-a}\in S$ 这个条件.

解: (1) 由已知 $2\in S$, 有 $\frac{1}{1-2}\in S$ 即 $-1\in S$, 又有 $\frac{1}{1-(-1)}\in S$, 即 $\frac{1}{2}\in S$, 又有 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in S$, 即 $2\in S$. 所以, S 中还有两数 -1 和 $\frac{1}{2}$;

(2) 由 $a\in S$ 则有 $\frac{1}{1-a}\in S$, 再根据已知条件有 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in S$, 即 $1-\frac{1}{a}\in S$,

所以, 若 $a\in S$, 则 $1-\frac{1}{a}\in S$ 成立;

(3) 假设只有一个元素在 S 中, 即 $a\in S, \frac{1}{1-a}\in S$ 且 $a=\frac{1}{1-a}$,

所以有 $a^2-a+1=0$ (*)

因为 $a\in\mathbf{R}$, 所以方程 (*) 无实根. 所以, S 中元素的个数不能只有一个.

例 4 已知 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 且 M, N 均为三元素集合, 试求集合 $C = \{x + y | M = N\}$.

分析: 本题集合 C 的代表元素为 $x + y$, 解决问题的思路是, 先在 $M = N$ 的条件下, 求出 x, y 的值.

解: 由题意有 x, xy 均不为 0, 所以只能 $\lg(xy) = 0$, 即 $xy = 1$.

所以 $|x| = 1$ 或 $y = 1$, 若 $y = 1$, M 中出现重复元素. 所以 $y \neq 1$. 所以只能 $|x| = 1, x = \pm 1$. 若 $x = 1$, M 中仍有重复元素.

所以 $x = -1, y = -1$, 所以 $x + y = -2$. 所以集合 $C = \{-2\}$.

评注: 此题先讨论 $\lg(xy)$ 的值, 然后分别对 x, y 进行讨论. 考虑问题要有层次性, 要全面. 讨论的依据就是根据集合元素的确定性、互异性和无序性.

(五) 强化训练

1. 选择题.

(1) 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中有且只有一个奇数, 则这样的集合 A 共有()

(A) 2 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 6 个

(2) 设集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | \log_2(x^2 - x) > 1\}$, 则有()

(A) $A = B$ (B) $A \subseteq B$ (C) $B \subseteq A$ (D) $A \cap B = \emptyset$

(3) 设 P, Q, M 是三个集合, 则“ $P \subseteq Q$ ”是“ $(P \cap M) \subseteq (Q \cap M)$ ”的()

(A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

(4) 已知 U 为全集, 集合 M, N 是 U 的子集, 若 $M \cup N = N$, 则()

(A) $(\complement_U M) \subseteq (\complement_U N)$ (B) $(\complement_U M) \supseteq (\complement_U N)$
(C) $M \subseteq (\complement_U M)$ (D) $M \supseteq (\complement_U N)$

(5) 设全集 $I = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $P = \{x | |x - 5| < a\}$ (a 为常数), 如果 $-1 \in P$, 那么()

(A) $(\complement_I M) \cup P = I$ (B) $M \cup (\complement_I P) = I$
(C) $(\complement_I M) \cup (\complement_I P) = I$ (D) $M \cup P = I$

2. 填空题.

(1) 设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | x \subseteq A\}$, 用列举法表示 $B =$ _____;

(2) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, 从 A 中选 3 个元素, B 中选 2 个元素, 共 5 个元素组成集合 C , 这样的集合 C 共有 _____ 个;

(3) 如果集合 $A = \{x | x^2 + (b + 2)x + b + 1 = 0, b \in \mathbb{R}\}$, 则 A 中所有元素的和为 _____;

(4) 满足关系式 $\{1\} \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 B 有 _____ 个;

(5) 以自然数为元素的集合 S , 满足命题“若 $x \in S$, 则 $8 - x \in S$ ”, 写出元素个数为 2 的集合 S _____.

3. 解答题.

(1) 已知 $A = \{x | \sqrt{x - 2} \leq 4 - x, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x^2 - (a + 3)x + 3a \leq 0\}$, $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. 若 $A = B$, 求实数 a 的值;

(2) 设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 2\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x-1}{x+2} < 1\right\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知三个集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + (a-1) = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 - bx + 2 = 0\}$, 问同时满足 $B \subseteq A, C \subseteq A$ 的实数 a, b 是否存在? 若存在, 求出 a, b 所有值的集合; 若不存在, 请说明理由.

1.2 集合的运算

(一) 复习要求

理解并掌握集合的交、并、补的运算法则, 能用集合语言和集合的运算法则解决有关问题.

(二) 要点回顾

- $A \cap B =$ _____.
- $A \cup B =$ _____.
- $A \subseteq S$, 则 $\complement_S A =$ _____.
- (1) 设集合 $M = \{x \mid x > 3\}$, $P = \{x \mid x < 3\}$, 那么“ $x \in M$ 或 $x \in P$ ”是“ $x \in M \cap P$ ”的()
 (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不是充分条件也不是必要条件
- (2) 设全集 $I = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, 则 $\complement_I M \cap N =$ ()
 (A) $\{0\}$ (B) $\{-3, -4\}$ (C) $\{-1, -2\}$ (D) $\emptyset$ (95 高考文)
- (3) 设集合 $M = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, 集合 $N = \{x \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N =$ ()
 (A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$
 (C) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ (97 高考理)
- (4) 设全集 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{y-2} = 1\right\}$, $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$, 那么 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N) =$ ()
 (A) $\emptyset$ (B) $\{(2, 3)\}$
 (C) $(2, 3)$ (D) $\{(x, y) \mid y = x+1\}$ (90 高考题)

(三) 要点点拨

- 本节重点要求理解三种运算的实质, 学会用文氏图、数轴等方法进行集合运算.
- 在计算 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N)$ 或 $(\complement_I M) \cup (\complement_I N)$ 的结果时, 可以利用等式 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N) = \complement_I (M \cup N)$ 和 $(\complement_I M) \cup (\complement_I N) = \complement_I (M \cap N)$.
- 在计算有关问题时, 如果要进行分类讨论, 讨论时首先要确定好讨论标准, 看是否有空集及根的大小的比较等情况.