全国25省市著名考研辅导班首选教材

常考知识点系列

RENDA

2002年人大版考研

2002 NIAN REN DA BAN KAO YAN

考研数学

常考知识点(经济类)

主编 严守权

中国人民大学出版社

- 完全点击考试大纲
- 名师诠释历年真题
- 结合实战定制训练
- 权威规范精当实用

最具实力考研辅导名家 点拨考研常考知识点

考研数学常考知识点

（经济类）

主　编　严守权
撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考知识点(经济类)/严守权主编－3版

北京:中国人民大学出版社,2001

ISBN 7-300-03109-9/G·579

Ⅰ.考…

Ⅱ.严…

Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第10394号

考研数学常考知识点(经济类)

主　编　严守权

撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

出版发行:中国人民大学出版社

(北京中关村大街31号　邮编100080)

邮购部:62515351　门市部:62514148

总编室:62511242　出版部:62511239

E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经　　销:新华书店

印　　刷:北京市鑫鑫印刷厂

开本:787×1092毫米 1/16　印张:34

1999年4月第1版

2001年3月第3版　2001年3月第1次印刷

字数:778 000

定价:43.00元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

《考研数学常考知识点（经济类）》是在实行统考以来国内出版最早并具有一定影响的考研辅导书之一——《经济类考研数学复习指南》的基础上，邀请作者结合2001年考研情况改编而成的。为广大经济类考生提供一本最好的数学辅导书，一直是我们不断追求的目标。多年来，我们十分注意对考研大纲和命题的研究，跟踪变化趋势，力求准确把握定位；始终保持与广大考生的联系，反馈读者信息，不断改进我们的工作；积极参与研究生入学考试的辅导和阅卷工作，及时总结经验，主动融入和吸纳新的体验和成果。我们先后对本书做了八次较大的修订再版，本次修改，主要在每个章节增加了考研试题的重点难点说明，并按内容对例题作必要的归纳，使内容更为充实，结构更为完善。值得欣慰的是，我们的努力得到了广大考生的认同和回报，本书已经成为受历届考生欢迎的考研必备参考书和许多考研辅导班的首选教材，借此，对于广大读者给予我们的厚爱，表示衷心的感谢。

本书的特色如下：

一是在全书的结构安排上尽可能地适应考生系统复习考研数学的需要，书中不仅原原本本地介绍了考研大纲划定的内容及题型和必备公式、重点难点，还提供了近五年统考试题及其解析，使考生具体地了解考研命题的特点。书中通过精选大量具有代表性的例题和练习题，帮助考生系统复习并掌握所需知识，提高解题能力。为了帮助考生对所做练习结果进行检验，我们对每道练习题提供了题解简答或详细的提示说明。

二是在内容上能准确体现出经济学硕士研究生数学入学考试的要求、重点、难点。本书十分注重对大纲划定的基本概念、基本定理和基本公式的理解和掌握，且作者认为这是考生必须具备的基础。以往考生往往花费很大精力去抠超出大纲的技巧性过强的偏题怪题，而忽视大纲的基本要求，以致遇到一些基本题时，似懂非懂，似会非会，该得分的未能得分，这是应该尽量避免的。同时，我们还十分注意对考试的难点、重点和考生较为普遍存在的弱点进行讲解，并侧重于对基本概念、基本定理和基本公式的扩展和延伸，以及它们之间的交叉和综合应用，适度加大了相关题型的覆盖面和难度，其中标准化试题、综合性试题、经济应用题和论证题占有较大比重。

三是全书构想最终落脚于提高考生的应试能力，也就是贴近考试，强调实战训练。主要体现在：例题讲解时，强调的是解题的思路，而不是最终的结果；在行文表述符号引用时，力求规范严谨；加强了习题的选配，使之更具代表性、多样性。

为了给广大考生更多的综合训练和实战的机会，我们这次修改将原书中的模拟试题从10套增至15套，并附有详细解答，在此基础上加强了对考试试卷的综合分析。考虑到更多考生的需要和本书篇幅限制，这部分内容单独成册，书名为《考研数学模拟考场（经济类）》，欢迎大家选购。

根据往届考生提供的复习经验，要使本书在考研中发挥更大的作用，应将全书读两遍，第一遍主要是了解和掌握考研数学的内容和一般方法；第二遍要在此基础上温故而知新，对书中例题和练习题举一反三，总结归纳出规律和思路，提高解题速度和准确性、规范性。以上经验可供广大考生参考。

本书中加“*”内容，对数学四考生不作要求。

由于数学考试大纲的基本内容与国家教委审定的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲基本相同，因此，本书不失为高等院校财经类专业本科生学习“经济数学基础”课的一本较好的参考书。本书部分内容与 MBA 工商管理硕士数学入学考试高等数学部分内容相似，也可作为该类考生复习参考书。

曾经多年从事经济类考研数学命题工作的龚德恩教授自始至终指导和帮助这本书的出版，并仔细审阅了全部书稿；张南岳教授、王新民教授、莫颂清副教授帮助审阅了部分书稿；李赛时、刘力、蔡明、王建生老师参加了部分初稿的编写；中国人民大学出版社的有关同志为本书的出版做了大量工作，在此，我们表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，若有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 2 月

目　　录

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第二篇　统考试题分类解析

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第一章　微 积 分

一、函数、极限、连续

(一) 内容提要

1. 函数概念.

函数的几何特性:

有界性:设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在一个正常数 M,使得对任意 $x \in D$,恒有 $|f(x)| < M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

单调性:设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义,如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少). 单调增加与单调减少函数统称单调函数.

周期性:设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在正常数 T,使得对任意 $x \in D$,恒有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的周期.

奇偶性:设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,且 D 关于原点对称;若对任意 $x \in D$,恒有 $f(x) = f(-x)$(或 $f(x) = -f(-x)$),则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略). 由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为$C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$. 一般地说,$C(x) =$ 固定成本 $+$ 可变成本;$R(x) = px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为销量;$L(x) = R(x) - C(x)$. 商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念.

设有数列$\{u_n\}$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列$\{u_n\}$的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 或 $u_n \to A$ $(n \to \infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在正数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧（或左侧）趋向 x_0 时，$f(x) \to A$，则称 A 为 $x \to x_0^+$（或 $x \to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 的右极限（或左极限）．记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$）．类似地可定义 $x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$ 时，$f(x) \to A$ 的极限概念．

函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+(+\infty)} f(x) = \lim_{x \to x_0^-(-\infty)} f(x) = A$$

无穷小与无穷大：极限为零的变量称为无穷小量．在自变量的某个变化趋势下，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为无穷大量．有限个无穷小量的和仍为无穷小量．有限个无穷小量的积仍为无穷小量．无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量．无穷小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量．若 α, β 为同一变化趋势下的无穷小量，且 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \rho$，则当 $\rho = 0$ 时，称 β 为比 α 高阶的无穷小量，当 $\rho = \infty$ 时，称 β 为比 α 低阶的无穷小量，当 $\rho = c \neq 0$ 时，称 β 为与 α 同阶的无穷小量，特别地当 $\rho = 1$ 时，称 β 为与 α 等价的无穷小量，记作 $\alpha \sim \beta$.

$\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和．

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有运算法则：

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

两个重要的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{\varphi(x) \to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x = e, \lim\limits_{n \to \infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n = e$

罗必塔法则：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

(1) $x \to a$（或 $x \to \infty$）时，

$f(x) \to 0$（或 ∞），

$g(x) \to 0$（或 ∞）；

(2) 在点 a 某空心邻域内（或存在正数 M，当 $|x| > M$ 时），$f(x), g(x)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0$；

(3) 极限 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞）或 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞），

则有 $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty)$$

3. 函数的连续性.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点；如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值（最值定理）；

(2) $f(a)\neq f(b)$ 时，对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c，必存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$（介值定理）.

（二）重点难点

1. 函数概念.

(1) 函数概念中，定义域和对应法则是两个基本要素. 两个函数只有在定义域和对应法则都相等的情况下相等. 虽然考研试题中极少出现单一求函数定义域的问题，但必须养成在定义域内考虑问题的习惯.

(2) 函数关系中最常见的复合函数关系. 对于复合函数形式：$f(\varphi(x))=\Psi(x)$，通常要考虑的基本问题是：

已知 $f(x)$，$\Psi(x)$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域；

已知 $f(x)$，$\varphi(x)$，求 $\Psi(x)$ 及其定义域；

已知 $\varphi(x)$，$\Psi(x)$，求 $f(x)$ 及其定义域.

以上函数关系的转换，是考研解题时一种基本技法，应熟练掌握.

(3) 初等函数、分段函数、变上限函数和经济函数是经济类考生应重点掌握的函数类型. 其中，初等函数是基础，应熟练掌握基本初等函数的性质和图形特征. 对分段函数，处理相关问题时，要注意分段开区间分段处理，分段点处要利用左、右极限为工具，单独处理. 对变上限函数，首先要分清自变量、积分变量，其原则是看积分式中“d”后变量，若为 dx，则积分号“$\int$”内所有变量 x，均属积分变量. 在经济函数中，应主要掌握成本函数 $C(x)$，收益函数 $R(x)$，需求和供给函数 $X_d(p)$，$X_s(p)$，利润函数 $L(x)$ 的结构和经济含义.

2. 函数的单调性与对称性.

函数性质中应重点掌握函数的单调性和对称性.

(1) 函数的单调性是考研试题中常见题型. 一是若干单调函数复合后单调性的讨论；二是单调性的判别和证明，其主要工具是导数，最终归结为 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）的证明和判断.

(2) 函数的对称性在微分和积分中都有广泛的应用.

函数对称性主要有三种形式：若 $y=f(x)$ 是偶函数，则函数曲线关于 Y 轴对称；若 $y=f(x)$ 是奇函数，则函数曲线关于原点对称；若 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数，则两曲线关于直线 $y=x$ 对称.

在微分学中，经常用几何直观来讨论函数的性质. 如，对于奇（偶函数），可以由函数在 $x>0$ 时的单调性、凸性等反推 $x<0$ 时的单调性和凸性，在 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数的情况下，可以由 $y=f(x)$ 的单调性和凸性来推导 $y=g(x)$ 的单调性和凸性等. 讨论时只要利用几何图形的翻转即可作出判断.

在积分学中，通常可利用对称性简化积分运算.

3. 函数极限概念.

（1）函数极限是自变量的一个特定变化过程中，函数取值的变化趋势，即当自变量变化足够大时，函数的所以取值都与定常数之差任意小. 函数极限的存在，与趋向点 x_0 处函数取值无关，在极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 下，$x\neq x_0$；且自变量趋向方式是任意的，不能加以限定.

（2）函数极限存在，有惟一性、有界性和保号性，其中保号性是指函数极限值符号与变化邻域内函数取值符号的一致性. 即：

若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A>0$（或 <0），则必存在 x_0 的某空心邻域（或区域 $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$），在该区域内，$f(x)>0$（或 <0）.

若函数 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）.

保号性在判断极值问题时有应用.

4. 极限的收敛性.

（1）极限的收敛性通常出现在未定式的定值问题中，最终取决于无穷小量趋于零的速度问题. 或无穷大量趋于无穷大的速度问题，即阶的概念. 就无穷大量而言，大体有五个不同的速度层次：

$$\ln n, n^{\alpha}(\alpha>0), a^{n}(a>1), n!, n^{n}$$

（2）在作极限运算时，先考虑阶的问题，即速度问题，在能区分高低阶的情况下，应有所取舍，对多项式而言，当 $x\to\infty$ 时，其速度取决于最高幂次，$x\to 0$ 时，取决于最低幂次. 例如 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{2}}$，$x\to 0^{+}$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}$.

（3）在同阶情况下未定式定值，在连乘或连除时可以用等价代换，使问题化简，常用的等价无穷小关系式在 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$，$e^{x}-1\sim x$.

（4）确定未定式，基本方法是罗必塔法则. 注意法则只适用“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其他类型未定式均要化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其中必有一种形式最为简便. 要注意选择，如果结合无穷小等价代换，化简后再用，更为简便.

5. 函数的连续性.

（1）函数的连续性是从定义点的连续并推广到区间连续的. 讨论函数的连续性，即证

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限值等于函数 $f(x_0)$，在解题时应完整表述，缺一不可.

(2) 函数的间断点中涉及较多的是可去间断点，即函数在点 x_0 极限存在，但 $f(x)$ 在 x_0 无定义或有定义但不等于函数值；无穷间断点，即 x 至少在一侧趋向 x_0 时，极限为无穷大. 前者通常涉及的是：通过求极限重新定义 $f(x_0)$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 后者是涉及铅直渐近线的问题，即若 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点，则 $x = x_0$ 必为其铅直渐近线.

(3) 必须强调的是，在运用导数讨论函数单调性和凸性时，只适用于区间上. 例如一般情况下，在定义域内有 $f'(x) > 0$，并不能推出 $f(x)$ 单调增. 因此，在讨论相关问题时，首先找出函数 $f(x)$ 的连续区间，然后再在每个区间，一一判别其单调性和凸性.

(4) 闭区间上连续函数的性质. 常用的是零值定理. 即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0(\leqslant 0)$，则必存在一点 $x_0 \in (a,b)([a,b])$，使得 $f(x_0) = 0$. 通常用于方程 $f(x) = 0$ 的解的讨论. 应注意是 x_0 的取值范围，主要取决于乘积 $f(a)f(b)$ 是否严格地小于零.

(三) 例题解析

1. 函数概念.

[例 1] 填空.

(1) 已知 $f(e^x - 1) = x^2 + 1$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

(2) 与函数曲线 $y = \sin[\arcsin(x+1)]$ 关于直线 $y = x$ 对称的曲线方程为______.

(3) 设 $f(\frac{x+1}{2x-1}) = 2f(x) + x$，则 $f(x) =$ ______.

(4) 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x$ 在区间 $(0,1]$ 内为正，则 a 的取值范围为______.

解析：(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域时，一般应先求出 $f(x)$ 的解析式. 为此，令 $u = e^x - 1$，或 $x = \ln(1+u)$，可得 $f(x) = \ln^2(x+1) + 1$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(2) 与 $y = \sin[\arcsin(x+1)]$ 关于直线 $y = x$ 对称的函数为该函数的反函数，反解可得 $y = \sin[\arcsin x] - 1$，本题注意不能写作 $y = x - 1$，两者代表两个不同的函数.

(3) 设法找出 $f(x)$ 与 $f(\frac{x+1}{2x-1})$ 之间转换关系，设 $\frac{x+1}{2x-1} = t$，反解得 $x = \frac{t+1}{2t-1}$，于是有

$$\begin{cases} f(\frac{x+1}{2x-1}) - 2f(x) = x \\ 2f(\frac{x+1}{2x-1}) - f(x) = -\frac{x+1}{2x-1} \end{cases}$$

解得 $$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{3(1-2x)}$$

(4) 本题可借助几何直观图形. 如图 1.1. 当 $a = 0$ 时 $y = 4x$，显然满足要求；当 $a > 0$ 时，要使 $f(x) > 0$，交点 $x^* = \frac{2(a-4)}{3a}$

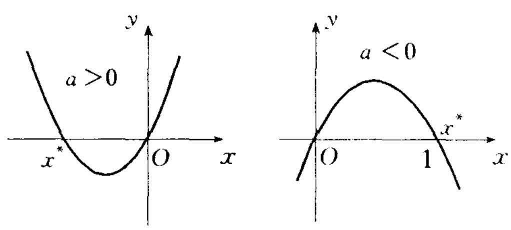

图 1.1

必在原点左侧，即$\frac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0$，解得$0<a\leqslant 4$；当$a<0$时，要使$f(x)>0$，交点$x^*$必在$x=1$右侧，即$\frac{2(a-4)}{3a}>1$，即$-8<a<0$，综上讨论$-8<a\leqslant 4$，即$(-8,4]$.

[例 2] 单项选择题.

(1) 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x, & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$，则$x\leqslant 0$时，$f[g(x)]=$(　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(2) 对于任何$x\in(1,a)$，设$f(x)=\log_a x$，则(　　)正确.

A. $f(f(x))<f(x^2)<[f(x)]^2$　　B. $f(f(x)]<[f(x)]^2<f(x^2)$

C. $f(x^2)<f(f(x))<[f(x)]^2$　　D. $[f(x)]^2<f(f(x)]<f(x^2)$

解：(1)C　(2)B

解析：(1) 处理分段函数的一般方法是，先处理各分段开区间，然后再单独讨论分段点. 在本题中，当$x<0$时，$g(x)=-2x>0$，故对应于$f(x)=x^2$，有$f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$，又$g(0)=0$，$f[g(0)]=0^2=0$，综上所述，当$x\leqslant 0$时，$f[g(x)]=4x^2$.

(2) 由已知$0<f(x)<1<x^2$，则有$f(x^2)=2f(x)>f^2(x)>0$及$f(f(x))<0$，故取 B.

[例 3] 求$y=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$在$|x|\geqslant 1$时反函数.

解：求解方程，反解得

$$x=y\pm\sqrt{y^2-1}\quad(y^2\geqslant 1)$$

由单值对应关系，当$y\geqslant 1$时，$x=y+\sqrt{y^2-1}$；当$y\leqslant -1$时，$x=y-\sqrt{y^2-1}$，从而得到反函数为

$$y=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\\ x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\end{cases}$$

2. 函数性质.

[例 1] 单项选择题.

(1) 设$f(x)$，$g(x)$均为实数域上单调增函数，则(　　)也必单调增.

A. $f(\varphi(-x))$　　B. $f(x)\varphi(x)$

C. $f^3(x)$　　D. $\frac{1}{f(-x)}$

(2) 设函数$y=f(x)$与$y=\varphi(x)$互为反函数，则有(　　).

A. $f(x)$，$\varphi(x)$均为单调函数

B. 若$f(x)$单调增，则$\varphi(x)$也必单调增

C. 若$f(x)$单调增，则$\varphi(x)$必单调减少

D. 若$f(x)$单调，$\varphi(x)$未必单调

答：(1)C　(2)B

解析：(1) 两单调增(或单调减)的函数的复合必单调增，$f^3(x)$是由两个单调增函数

x^3，$f(x)$ 复合而成，故单调增，A 为单调减函数，B 单调性不能确定，D 仅在 $f(-x)\neq 0$ 时成立，故选 C.

(2) 存在反函数的函数关系是一一对应关系而不一定单调. $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 关于 $y=x$ 对称，由直观容易看出 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有相同的单调性，故取 B.

[例 2] 给出函数 $y=\arccos(x^2+3x+2)$ 的单调增区间.

解：由函数 $y=\arccos x$ 单调减，知所求区间应由抛物线的单调减区间复合得到. 由直观图 1.2，$y=x^2+3x+2$ 的单调减区间为 $(-\infty,-\frac{3}{2})$，又因 $|x^2+3x+2|\leqslant 1$，求解方程 $x^2+3x+2=1$，得 $x^*=\dfrac{-3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{2}$，从而知所求函数单调增区间为 $(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{3}{2})$.

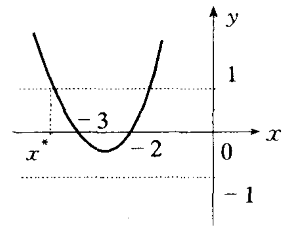

图 1.2

3. 函数的极限.

[例 1] 填空.

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=1$，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\ln(1+x)}=100$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan x\sin t^2\mathrm{d}t}{x^K}=C\neq 0$，则 $K=$ ______，$C=$ ______.

(4) 设极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=$ ______.

解析：(1) 由 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}+a+bx^2\right)=0$ 得 $a+3=0$ 即 $a=-3$，进一步有 $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}+1=\frac{11}{2}$.

(2) 因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+f(x)\tan x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\cdot\tan x$，所以由已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}f(x)=100$. 即得 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 200$.

(3) 先看阶再定值，由 $\tan x\sim x$，$\sin t^2\sim t^2$，因此，$\int_0^x\tan x\sin t^2\mathrm{d}t=\tan x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t\sim x\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^4$，从而知 $K=4$，$C=\frac{1}{3}$.

(4) 由已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$ 存在，从而知 $\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)$ 存在，并进一步知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，因此，

$$\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}(4f(x)+5)=\frac{5}{3}$$

[例 2] 单项选择题.

(1) 设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内有定义，如果条件(　　)成立，

则 $f(x)$ 在 $x=a$ 极限存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$,($A\neq\infty$,$x$ 为有理数)

B. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 有定义

C. $\lim\limits_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n})=f(a)$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}$ (A 为常数)

(2) 设 $f(x)$ 处处可导,则(　　).

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1]}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则有(　　).

A. $a+4c-2d=0$(b 为任意实数)

B. $a+4c=0$(b,d 为任意实数)

C. $b-2d=0$(a,c 为任意实数)

D. $2a+b+8c-d=0$

(4) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (　　).

A. 存在且一定等于 0　　　　B. 存在但不一定为 0

C. 一定不存在　　　　D. 不一定存在

答:(1)D　(2)D　(3)B　(4)D

解析:(1)A,C 是 $x\to a$ 的子过程,不能说明 $x\to a$ 的极限存在性,B 未明确左右极限是否相等,故仅 D 正确.

(2) 由反例:$x\to-\infty$ 时,$x^3\to-\infty$,但 $(x^3)'=3x^2\to+\infty$;$x\to-\infty$ 时,$(x^2)'=2x\to-\infty$,但 $x^2\to+\infty$;及 $x\to+\infty$ 时,$x\to+\infty$ 时,$x\to+\infty$,但 $(x)'=1\to 1$. 可知 A,B,C 均不成立,由排除法可得 D 正确. 事实上,由 $x\to+\infty$ 时,$f'(x)\to+\infty$ 知,总存在一个 $x_0>0$,使 $x>x_0$ 时,有 $f'(x)>M$. 于是当 $x\to+\infty$ 时,总有 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)x>f(x_0)+Mx\to+\infty$.

(3) 由于 $\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\ln(1-2x)\sim-2x$,$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2$,知原极限最终取决于 $a\tan x$ 与 $c\ln(1-2x)$ 比值的变化趋势,即有原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\dfrac{a}{-2c}=2$,也即 $a+4c=0$(b,d 为任意常数),故取 B.

(4) 由已知,$0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant g(x)-\varphi(x)$,又当 $x\to\infty$ 时,$g(x)-\varphi(x)\to 0$,所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$,但由此推不出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在,故取 D.

[例 3] 计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{(1+2+\cdots+n)-1})$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-\sin x)}{\sec x-\cos x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}, a>0, b>0$

(8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln(1-\dfrac{2}{x})}$

解：(1) 原极限整理为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$ 由 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x, e^{\sin x}\to e^{\sin 0}$，所以

原极限 $=1$

(2)"$\infty-\infty$"型极限，进行合并整理，可化为重要极限形式，即有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{x+2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\ln(1\cdot e\cdot\frac{1}{e})=0$$

(3)"$\infty-\infty$"型极限，先变换化为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型，即有

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+n-1}}=0$$

(4)"$\dfrac{0}{0}$"型，但直接用法则十分烦琐．若先整理后计算，则十分简便．即

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x-\sin x-x\sin x)}{\sin^2 x\cdot\sec x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x-x\sin x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\sin x-x\cos x}{2x}=-1\end{aligned}$$

(5)"$\infty-\infty$"型，先通分化为"$\dfrac{0}{0}$"型，即

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{x\to 0}\frac{\pi(e^{\pi x}+1)-2\pi}{4x(e^{\pi x}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\pi(e^{\pi x}-1)}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\pi x}+1}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2 e^{\pi x}}{4}=\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

(6)"$0\cdot\infty$"型，可设 $t=\dfrac{1}{x}$，化为"$\dfrac{0}{0}$"型，即

$$\text{原极限} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2t}} - \frac{1}{\sqrt{1+t}}}{2t}$$

$$\overset{\text{整理}}{=\!=} \lim_{t \to 0} \frac{-1}{2\sqrt{1+t}\sqrt{1+2t}(\sqrt{1+2t}+\sqrt{1+t})}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

(7)"1^{∞}"型,因数列极限不能直接用法则,可先考虑 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln f(x)$,即由

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \overset{t = \frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim_{t \to 0} \frac{\ln(a^t + b^t) - \ln 2}{t}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{a^t \ln a + b^t \ln b}{a^t + b^t} = \frac{\ln ab}{2}$$

得到 $\quad \text{原极限} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$

(8)式中 $\sin x$ 为有界变量,不能直接用罗必塔法则.分项,其中

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 + x)\ln(1 - \frac{2}{x})} \overset{\text{等价代换}}{=\!=\!=\!=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x^2 \cdot (-\frac{2}{x})} = \frac{1}{2}$$

又 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x^2 + x)\ln(1 - \frac{2}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2(-\frac{2}{x})} = 0 \quad (|\sin x| \leqslant 1)$$

从而有 $\quad \text{原极限} = \frac{1}{2}$

以上例子说明,求极限时,首先要分析极限的类型特征,并作必要整理.一般地说,若函数 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 在定义域内,则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.若极限式中含有有界变量,则应该考虑设法利用无穷小量与有界变量乘积仍为无穷小量的性质.若极限为未定式,一般用罗必塔法则对未定式定值.在用罗必塔法则对未定式定值时,首先要判断极限是否为"$\frac{\infty}{\infty}$"或"$\frac{0}{0}$"型,运算过程中还要及时对极限形式作简化整理.简化有时关系到能否有效地利用法则定值.如果出现使用法则无效的情况,原极限也不一定不存在,应考虑改用其他方法.对于数列形式的未定式极限,可通过 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 的极限确定,即由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$,可推得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$,反之不然.

[例 4] 检查下列运算是否正确,写出正确运算过程.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = 0 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{4x}{1 - x^2} - \frac{1 + x}{1 - x}) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{4x}{1 - x^2} - \lim\limits_{x \to 1} \frac{1 + x}{1 - x} = \infty - \infty = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 3)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 2)} = \frac{11}{0} = \infty$