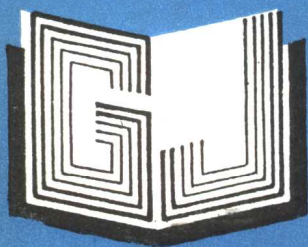


983179



高等学校教材

水电站控制理论基础

华北水利水电学院 白家骢
武汉水利电力大学 陈正初 合编



983173

高等学校教材

水电站控制理论基础

华北水利水电学院 白家骢
武汉水利电力大学 陈正初 合编

水利电力出版社

(京)新登字 115 号

高等学校教材

水电站控制理论基础

华北水利水电学院 白家骥

武汉水利电力大学 陈正初

合编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路 6 号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市朝阳区小红门印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 13.5 印张 302 千字

1995 年 8 月第一版 1995 年 8 月北京第一次印刷

印数 0001—1000 册

ISBN7-120-02185-0/TV·861

定价 7.70 元

内 容 提 要

本书是高等学校“水电站控制理论基础”课程的教材。

全书共分七章，包括：自动控制系统的基本概念；自动控制系统的数学模型；时域分析法；根轨迹法；频率分析法；自动控制系统的校正；状态空间分析法。在时域分析法、频率分析法等章中还附有数字计算机仿真程序。

本书可供从事水电站自动控制系统的设计、制造、运行等方面的技术人员参考。

前 言

本书是根据 1988 年 5 月高等学校水利水电类专业教学委员会南京会议制定的对第三轮教材建设的指导性意见, 以及 1988 年 10 月高等学校水利水电动力工程 (简称水动) 教学组洛阳会议拟定的“水电站控制理论基础”教材编审规划和大纲编写的。

全书共七章。主要内容有: 自动控制系统的基本概念; 自动控制系统的数学模型; 时域分析法; 根轨迹法; 频率分析法; 自动控制系统的校正; 状态空间分析法。

本书可作为高等学校水电动力工程专业的技术基础课教材, 也可供从事水电站自动控制系统设计、制造、运行方面的技术人员参考。

第一、五、六章由华北水利水电学院白家骢编写; 第二、三、四章由武汉水利电力学院陈正初编写; 第七章由华北水利水电学院郝澎编写。全书由白家骢统稿。河海大学沈祖诒教授主审。

由于我们水平有限, 书中错误和不当之处难免, 欢迎指正。

编者

1990 年 12 月

目 录

前 言

第一章 自动控制系统的基本概念	1
第一节 概述	1
第二节 闭环控制和开环控制	1
第三节 对自控系统性能的要求	5
第四节 自动控制系统的典型输入信号	6
习题	8
第二章 自动控制系统的数学模型	9
第一节 自动控制系统微分方程的建立	9
第二节 非线性特性的线性化	13
第三节 传递函数	15
第四节 典型环节及其传递函数	19
第五节 控制系统的方块图	26
第六节 信号流程图	30
习题	32
第三章 时域分析法	36
第一节 自动控制系统的暂态响应性能指标	36
第二节 二阶系统时域分析	37
第三节 高阶系统时域分析	44
第四节 自动控制系统的稳定性	45
第五节 自动控制系统的稳态误差	51
第六节 用数字计算机求解系统的暂态响应	56
习题	62
第四章 根轨迹法	65
第一节 自动控制系统的根轨迹	65
第二节 绘制根轨迹的基本法则	66
第三节 零度根轨迹	75
第四节 控制系统的根轨迹分析	77
习题	83
第五章 频率分析法	85
第一节 频率特性	85
第二节 典型环节的频率特性	89

第三节	开环频率特性的绘制	98
第四节	奈魁斯特稳定判据	102
第五节	用开环对数频率特性判断闭环系统的稳定性	111
第六节	开环频率特性与时域响应的关系	120
	习题	124
第六章	自动控制系统的校正	127
第一节	系统校正的基本概念	127
第二节	串联超前校正	133
第三节	串联滞后校正	139
第四节	串联滞后——超前校正	145
第五节	反馈校正	151
	习题	154
第七章	状态空间分析法	156
第一节	状态空间表达式	156
第二节	状态空间表达式的解	172
第三节	能控性和能观性	180
第四节	状态反馈控制	192
	习题	206
参考文献		208

第一章 自动控制系统的基本概念

第一节 概 述

自动控制是指在生产过程中，对某些被控制的物理量（如转速、电压、温度、水位等），通过机械或电气装置代替人的控制，使之维持预期的水平或按一定规律变化。被控制的设备或环节叫被控制对象（如水轮机、发电机、锅炉）；实现控制作用的装置叫控制器；由被控制对象和控制器组合的整体，称自动控制系统。

在水电站中，除水轮发电机的频率（转速）控制器外，还有电压控制器等，它们都是典型的自动控制的例子。无论在工厂，还是在农村，在工农业生产的各个领域，例如交通、运输，特别是在航天技术方面，自动控制起着越来越重要的作用。

自动控制理论是用数学方法研究自动控制系统的性能或根据对系统提出的性能要求，确定一个控制器的数学模型。显然，无论实际存在的物理系统其结构和被控制量是多么不同，表达这些系统动态特性的数学表达式却可能是同一类型，都能归入自动控制理论研究的范畴。自动控制理论是水动专业工程师必备的基础知识。

第二节 闭环控制和开环控制

一、定义

图 1-1 (a) 是水轮机频率人工调节控制简图。假定机组处于单机带负荷工作状态，由

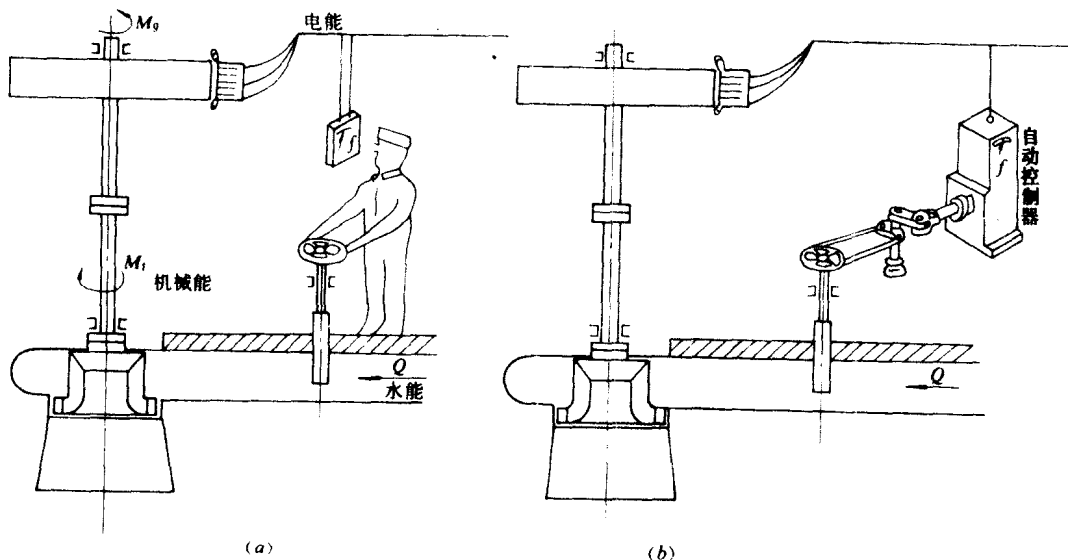


图 1-1 水轮机调节简图

(a) 人工反馈控制；(b) 自动反馈控制

人来控制机组的转速，在人的头脑中先有一个给定值，即额定频率（如 50Hz）。系统的实际输出值，即实际频率，由频率表进行监视。机组和所带负荷是被控制对象，双手和阀门是控制器。当用户的负荷发生变化时，会对输出值产生影响，这通常称为外扰；当系统中的某些环节，如水轮机、发电机、阀门自身参数发生变化时，也会影响输出值，这通常称为内扰。内扰和外扰通称为扰动。由于扰动的作用，使输出值的实际频率发生变化，偏离了给定值。由人的眼睛反馈给大脑，大脑做出判断，动手改变阀门的开度，通过增加或减少流量的方法，保持机组的实际频率（即系统的输出值）与额定频率（即给定值）相等或在允许的误差范围内。这种控制系统叫人工反馈控制系统，可用方框图表示，如图 1-2 所示。

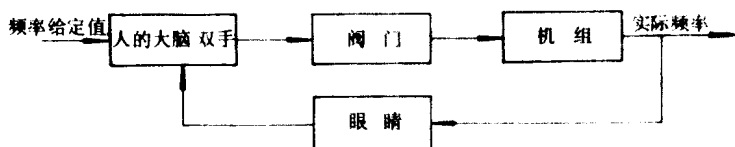


图 1-2 人工反馈控制方框图

从图 1-2 中可以看出，控制是受给定值和输出值双重作用的，称为闭环控制。闭环控制系统即是反馈控制系统。

图 1-1(b) 是水轮机频率调节自动控制系统简图。系统的额定频率为给定值，实际输出值由测定元件监视，由自动控制器代替了人的大脑和双手。当系统在扰动作用下，实际频率偏离额定频率时，自动控制器通过比较、放大，命令执行元件去增加或减小阀门的开度，以维持被控制对象——机组和所带负荷的频率等于给定的额定频率，或者其误差在允许范围内。其方框图如图 1-3 所示。

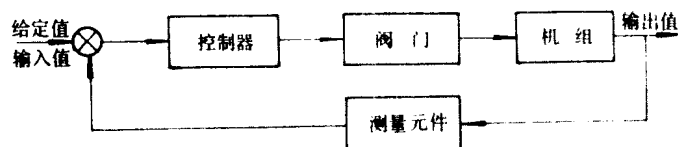


图 1-3 自动反馈控制系统方框图

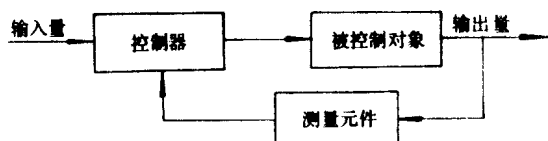


图 1-4 闭环控制系统方框图

从上述两例中可以看出，闭环控制系统是由某些功能相似的环节组成的，其方框图如图 1-4 所示。

控制器的输入信号是系统的输入量和测量元件信号两者的误差。输入量是给定值，即是期望值，测量元件信号是

输出信号本身或是它的函数。当输出信号发生误差时，控制器就改变被控制对象的工作参数，以维持输出量为期望值，最终消除误差。可见闭环控制系统具有发现误差、消除误差的功能。此外，闭环控制可以减少由于系统各环节自身参数变化对输出的影响，使元件的制造成本降低；由于采用了自动反馈控制，不仅减轻了人的劳动强度，更重要的是提高了

控制精度和可靠性，促进了生产的发展。由于反馈可能使系统振荡性加剧，因而也使分析系统的工作复杂了。

若控制只受给定值的作用而与系统的输出无关，叫开环控制。溢流闸门和冲沙闸门的控制都是开环控制的例子。只要有给定信号，即闸门开启（或关闭），而无需对输出信号（即流量）进行测量，也不用检验误差和消除误差。图 1-5 为开环控制的框图。其信号为单方向传递，形成开环。



图 1-5 开环控制系统

由于开环控制系统的输出不起反馈作用，对于每一个给定值或输入量，系统就有一个输出量与之对应，在没有内部和外部干扰（即扰动）的作用下，这种系统还是可以工作的。如果发生了扰动，则破坏了开环控制系统输出与输入的对应关系。这时必须事先知道扰动的变化规律，在输入量实现顺馈控制才行。

二、闭环控制系统的组成

尽管实际上众多反馈自动控制系统的控制器和被控制对象存在着差异，但从闭环控制的基本原理来看，它们都遵守同一规律，即出现误差，使控制器输出指令，改变被控制对象或过程的工作参数，导致输出量与给定值的差值变小或为零。这种检测误差至纠正误差的过程都是一致的。可见各种闭环控制系统在结构上具有共性。它是由几个部分组成的，每个部分或环节起着特定的作用。图 1-6 是负反馈控制系统的结构框图。从图中可以看出，该系统由以下几部分组成。

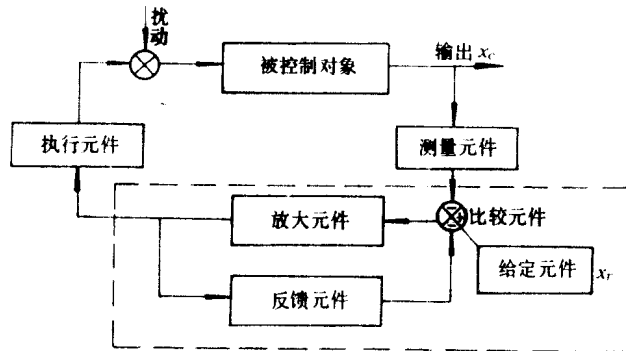


图 1-6 负反馈控制系统结构图

1. 被控对象

它是要求实现自动控制的设备或过程，其被控制的物理量，即系统的输出 x_c 。

2. 控制器

它由下述几个元件组成：

- 1) 测量元件，将被控制量通过转换成与给定信号 x_r 相同的物理量，起负反馈的作用。
- 2) 给定元件，由人工设定或自动装置给定信号的机构，产生预期的给定输入值。
- 3) 比较元件，将输出信号与给定信号的差值作为误差信号去控制放大元件，在工作过程中又综合了反馈信号。

4) 放大元件，将误差信号放大为控制信号，以便操纵执行机构，同时提供反馈信号给比较元件。

5) 反馈元件，将控制信号转换为反馈信号，送至比较元件。由于它是负反馈，起抵消误差信号的作用。由负反馈信号的函数形式，还能使执行元件按某一规律工作，从而使被控制量过调节现象变弱，波动幅值和波动次数减少，因此反馈元件对控制器起着重要的作用。

用。

3. 执行元件

执行元件按照控制信号操纵控制机构, 改变被控对象的工作参数, 以纠正输出信号与给定值之间的误差。

三、闭环控制系统的分类

根据某些特点, 可对各种工业自动控制系统分类。

(一) 按系统的数学模型分类

1. 线性控制系统

如果控制系统的数学模型是线性的, 则称这个系统为线性控制系统。这种系统的微分方程中各项系数是常数或是时间 t 的函数。例如

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = A \frac{du}{dt} + Bu$$

$$4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 7y = 0$$

等都是线性定常系统, 其各项系数均为常数。线性系统的特征是输出对输入的关系满足叠加原理。例如

$$y(t) = y(t, u(t)) \quad (1-1)$$

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

则
$$y(t) = \alpha y(t, u_1(t)) + \beta y(t, u_2(t)) \quad (1-2)$$

2. 非线性系统

用非线性方程表示的系统称非线性系统。如

$$y = \sin x$$

$$y = x^2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = A \sin t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (y^2 - 1) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

非线性系统不能用叠加原理, 各项系数中含有变量或其函数且各项导数也非一次型。

线性系统是自动控制系统中最重要、最多见的一种。即使有些实际上的非线性元件, 在具有稳定工作点的条件下, 也可以作线性化处理。目前对线性系统的理论分析很完善, 并有普遍运用的解析方法。对于非线性系统若不能线性化处理, 则要采用专门的非线性分析。

(二) 按给定输入特性分类

1. 恒定系统

系统的输入给定值是常数或变化很缓慢的量, 在发生扰动时, 系统的被控制量保持在给定值或按一定的精度接近给定值。水轮机调节系统、自动电压调节系统, 还有一些恒温、恒压系统均属此类。

2. 随动系统

系统的给定输入是一个随机变化的时间函数, 控制系统就是要以一定的精度使输出跟

随输入的变化,如双重调节的轮叶控制系统。

3. 程序控制系统

系统的给定值是按一定时间函数变化的。如程序控制机床、机组的启动等。

(三) 按控制系统的信号分类

1. 连续系统

系统中各元件传递的信号均是模拟量,它们是时间的连续函数。如前所述的调速、调压系统。

2. 离散系统

系统中至少有一个元件的信号是离散的,即是脉动信号或数码信号。计算机控制系统即属此类。

上述的分类方法不尽完善,有些系统本身可能是同时具备上述几个类型的特征。

第三节 对自控系统性能的要求

由于实际存在的各种自动控制系统中都有惯性元件或贮能元件,当有外界扰动或改变输入给定值时,系统的输出量往往会有一个过渡过程。历经一段时间后,才能趋近给定值。所谓静态特性是指系统的输出量和输入量(扰动或给定值)在稳定状态下的相对关系,它不随时间而变化,只表明系统的输入和输出在平衡状态下的关系。图1-7为水轮机调节系统的静态特性。其输入为负荷 N ,输出为发电机转速 n 。曲线①、③属于有差调节,曲线②是无差调节。

动态特性是指系统在平衡状态,受到某一输入量(给定输入或扰动)作用时,其输出量(被控制量)在扰动发生后到新的平衡状态间的响应,这是系统的暂态或动态。过渡过程就是从暂态到稳态的过程。

图1-8是水轮机调节系统在负荷阶跃扰动下的动态特性。 t_0 时刻负荷由 N_0 下降至 N_1 后保持不变。 t_0 时刻

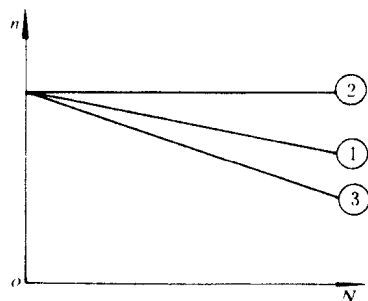


图 1-7 水轮机调节系统的静态特性

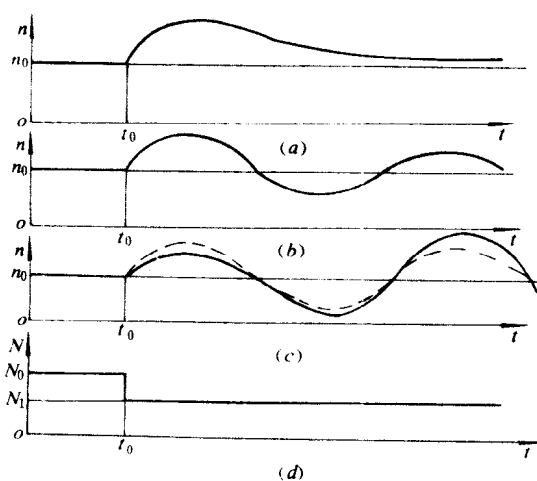


图 1-8 水轮机调节系统动态特性 $n=f(t)$

(a) 非周期衰减过程; (b) 振荡衰减过程; (c) 等幅振荡
(虚线) 扩散振荡 (实线) 过程; (d) 负荷扰动

以前机组转速为 n_0 。当 $t > t_0$ 时，机组转速 n 呈现出随时间变化的暂态过程，由曲线 $n = f(t)$ 表示。图中：(a) 表示非周期衰减过程；(b) 表示振荡衰减过程；(c) 实线表示扩散振荡过程；虚线表示等幅振荡过程。(a) 和 (b) 所示的两种瞬态过程是可以稳定下来的，而 (c) 中的两种瞬态过程是无法达到稳定的。可见对自动控制系统，有下列几方面的要求：

1) 系统应具有稳定性，而且具备一定的稳定裕量。不稳定的系统是无法工作的，更不能讨论它的工作性能。

2) 系统的暂态性能，即系统的瞬态质量应符合要求。如：输出量在过渡过程中的最大偏差、超调量、波动次数等特性指标，应符合设计要求。

3) 系统的稳态性能，即稳态精度，主要指对系统输出量与给定值之间的误差，应符合规定。

系统的暂态性能和稳态性能，具体地表现出它的稳定性、准确性、速动性和抗干扰性等综合指标。

第四节 自动控制系统的典型输入信号

从图 1-8 中可知，水轮机调节系统发生了负荷扰动之后，作为系统的输出或控制量（转速），也是随时间而变化的函数。输入函数 $N(t)$ 与输出函数 $n(t)$ 是因果关系。由于电力系统中负荷扰动是随机的，扰动方程是多样的，为了清楚地分析系统输出函数的动态特性，一般将输入函数分为几个典型的函数。

1. 阶跃函数

阶跃函数的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ x_0 & (t \geq t_0) \end{cases} \quad (1-3)$$

图 1-9 表明系统在 t_0 时刻之后输入一个保持为常量的阶跃信号。电力系统中突然增加或减少负荷，引水系统中突然打开或关闭阀门，电路中信号电压或电流的突然跳跃变化，都属于阶跃函数。这里假设阶跃变化是无穷大的速度瞬时动作。这是在测试动态特性时应用最多的一个输入函数。幅值 $x_0 = 1$ 的函数叫单位阶跃函数，用 $1(t)$ 表示。于是 $x(t)$ 也可写成 $x(t) = x_0 \cdot 1(t)$ 。

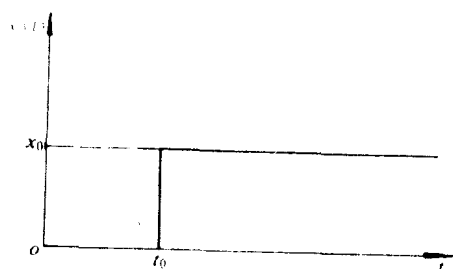


图 1-9 阶跃输入函数

2. 斜坡函数

斜坡函数的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ vt & (t \geq t_0) \end{cases} \quad (1-4)$$

从图 1-10 可以看出，从 t_0 时刻开始， $x(t)$ 以恒定速度 v 变化，这种扰动量随时间按等

速度变化。 $v=1$ 的斜坡函数 $x(t)=t$ 叫单位斜坡函数。

3. 脉冲函数

脉冲函数的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \text{ 和 } t > \epsilon) \\ \frac{A}{\epsilon} & (0 < t < \epsilon) (\epsilon \rightarrow 0) \end{cases} \quad (1-5)$$

其图形如图 1-11 所示。

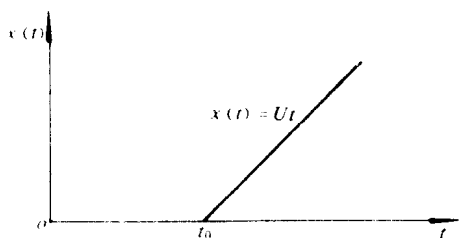


图 1-10 斜坡输入函数

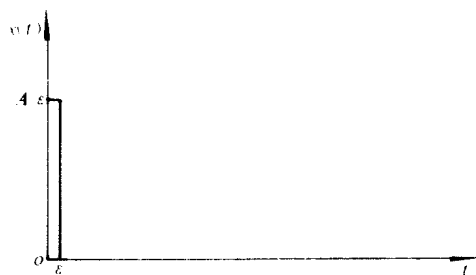


图 1-11 脉冲函数

理论上,脉冲函数是脉宽时间 ϵ 趋近于 0,其幅值趋向于 ∞ 的脉冲,这是纯数学概念,实际上并不存在。但我们可以把它看作是时间极短的扰动。例如电源电压突然承受一个扰动而产生的效果。当 $A=1$ 时,即面积为 1 的脉冲函数称为单位脉冲函数,记作 $\delta(t)$ 。其表达式为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases} \quad (1-6)$$

如单位脉冲发生在 $t=t_0$ 处,则对应的表达式为

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t \neq t_0) \\ \infty & (t = t_0) \end{cases}$$

4. 抛物线函数

抛物线函数的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ At^2 & (t > 0) \end{cases} \quad (1-7)$$

抛物线函数又被称之为加速度函数,其图形如图 1-12 所示。它相当于对系统输入一个随时间作等加速度变化的信号。

如果 $A = \frac{1}{2}$, 其拉氏变换

$$x(s) = L[x(t)] = L\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{1}{s^3}$$

称单位抛物线函数。

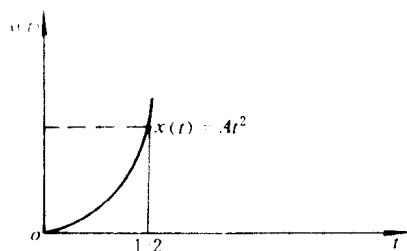


图 1-12 抛物线函数

上述四种典型输入函数之间,从数学关系上看

$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}t^2\right] = t, \frac{d(t)}{dt} = 1(t)$, 而 $\int \delta(t)dt = 1(t)$ 。因此在线性系统中,已知上述任一种输入函

数的输出响应，就可利用求导或积分的方法来确定另一种输入函数的输出响应。

5. 正弦函数

正弦函数的数学表达式为

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1-8)$$

它是振幅为 A ，角速度为 ω 的周期性函数。当 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，可以得到系统在各种频率下稳态的正弦输出，其幅值和相角都是 ω 的函数，故称为频率特性或频率分析。而上述前四种输入函数所得到的输出响应为时间特性或时域分析，显然，适用上述典型输入函数对系统进行分析有如下好处：

- 1) 典型输入函数的数学表达式简单，便于理论计算。
- 2) 当输入函数较复杂时，可以将其分解为几个典型输入函数，然后利用叠加原理求得系统的输出。
- 3) 在实验室中很容易产生典型输入信号，以便通过实验方法观察系统的输出响应。

习 题

1-1 在日常生活中，洗衣机、电冰箱是属于开环控制还是闭环控制？试画出其方框图。

1-2 一个水位自动控制装置如图

1-13 所示。用方框图说明其工作原理。

1-3 图 1-14 给出了两个汽轮发电机的调速系统，其输出值是机组的实际转速，其输入值是给定转速，分别用方框图说明两个控制系统的工作原理。

1-4 自动控制系统的典型输入函数有哪些？最常用的输入函数是什么？

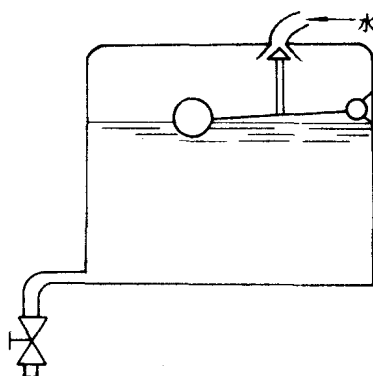
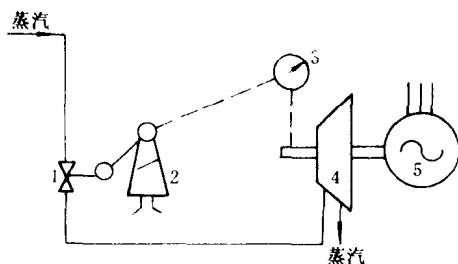
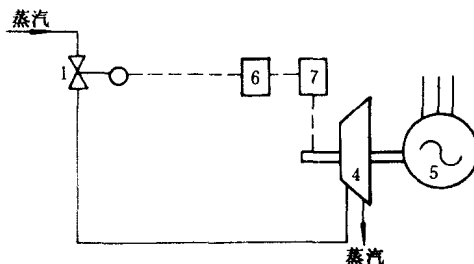


图 1-13 自动控制水箱



(a)



(b)

图 1-14 汽轮发电机组调速系统

第二章 自动控制系统的数学模型

第一节 自动控制系统微分方程的建立

为了使所设计的自动控制系统的满足暂态性能要求,必须对系统的动态过程进行分析,掌握其内在规律。动态中,每个元件的输入、输出量都随时间变化,而每个量对时间的导数表示了它们随时间变化的特性,因此它们的微分方程表示了系统的动态过程。如果写出了系统的微分方程,就能从理论上分析系统的动态品质了,所以编写微分方程就成为分析和设计系统的首要工作。

对于不同的控制系统,无论是机械的、电气的、液压的,或几者合成的,若它们有相似的动态特性,则可以用相同的微分方程来描述,这种描述系统动态特性的微分方程式称为系统的数学模型。

分析系统时,将系统中的每个元件或几个元件看成系统的一个组成部分,称为环节。每个环节都能写出独立的运动微分方程式,即环节的数学模型。经典控制论中,将所有环节的数学模型综合,消去中间变量,留下系统的输出和输入量,就成为系统的数学模型。

工程中大多数系统,在一定条件下都可以用线性微分方程描述,而线性微分方程求解比较容易,因此研究线性系统具有很大的实际意义。

现举例说明系统微分方程的列写方法。

【例 2-1】 列写图 2-1 所示比例积分调节器的微分方程。

解: 调节器输入电压 u_r , 输出电压 u_c 。

(1) 列写微分方程 由于运算放大器输入阻抗和放大倍数都很大,因此电路输入端 a 电位近似为零,即 a 点的总电流为零。根据基尔霍夫定律可列方程为

$$i_1 + i_2 = 0 \quad (2-1)$$

$$i_1 = \frac{u_r}{R_1} \quad (2-2)$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_2 dt + R_2 i_2 \quad (2-3)$$

(2) 消去中间变量 电流 i_1 和 i_2 是中间变量。由式 (2-1)、(2-2) 得

$$i_2 = -\frac{u_r}{R_1}$$

代入式 (2-3) 得

$$-u_c = \frac{1}{R_1 C} \int u_r dt + \frac{R_2}{R_1} u_r \quad (2-4)$$

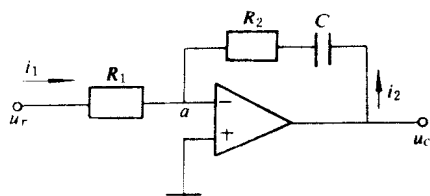


图 2-1 比例积分调节器

可见, 输出 u_c 与输入 u_r 成比例并和它的积分有关, 所以称该电路为比例积分调节器。式 (2-4) 两边对时间 t 求导, 写成一般形式为

$$-R_1 C \frac{du_c}{dt} = R_2 C \frac{du_r}{dt} + u_r \quad (2-5)$$

式 (2-5) 是比例积分调节器的微分方程。

【例 2-2】 图 2-2 所示为一齿轮传动机构, 在控制系统中, 它用来传递运动, 以实现减低转速和增大力矩的目的。如果输入量为电动机输出力矩 M , 输出量为从动轴角速度 ω_2 , 求系统的微分方程。

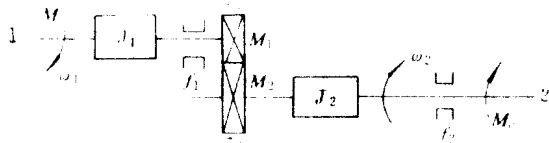


图 2-2 齿轮传动

解: 该齿轮传动机构微分方程编写步骤为:

(1) 列写微分方程 按力矩平衡关系写出主动轴 1 的力矩方程为

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + f_1 \omega_1 + M_1 = M \quad (2-6)$$

从动轴 2 的力矩方程为

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + f_2 \omega_2 + M_c = M_2 \quad (2-7)$$

式中: M 为电动机输出力矩; M_1 为齿轮 2 对于齿轮 1 的阻力矩; M_2 为齿轮 2 的力矩; M_c 为负载力矩; J_1, J_2 为轴 1 和轴 2 上的转动惯量; f_1, f_2 为轴 1 和轴 2 的摩擦系数; ω_1, ω_2 为轴 1 和轴 2 的角速度。

齿轮传动比为

$$i = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

式中: Z_1, Z_2 为齿轮 1 和 2 的齿数。因此有

$$\omega_1 = i \omega_2 \quad (2-8)$$

由于在单位时间内, 轮 1 和轮 2 力矩所作的功一样, 即力矩的功率相同, 所以

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \quad (2-9)$$

(2) 消去中间变量 将式 (2-7)、(2-8) 代入式 (2-9) 得

$$M_1 = \frac{1}{i} \left(J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + f_2 \omega_2 + M_c \right) \quad (2-10)$$

将式 (2-8)、(2-10) 代入式 (2-6) 得

$$J \frac{d\omega_2}{dt} + f \omega_2 + M_c \frac{1}{i^2} = \frac{1}{i} M \quad (2-11)$$

式中: J 为等效转动惯量, $J = J_1 + J_2 \frac{1}{i^2}$; f 为等效摩擦系数, $f = f_1 + f_2 \frac{1}{i^2}$ 。

式 (2-11) 是以 ω_2 为输出量的齿轮系微分方程。