高级中学

代数第二册（甲种本）

教学参考书

人民教育出版社

高级中学代数（试用）第二册

（甲种本）

教 学 参 考 书

安徽省教育科学研究所编

●

人民教育出版社出版

河北省出版公司重印

河北省新华书店发行

衡水地区印刷厂印刷

●

开本787×1092　1/32　印张8.75　字数178,000

1984年9月第1版　1991年4月第7次印刷

ISBN7-107-00316-X/G·519（课）　定价：1.38元

说　明

本书是根据高级中学课本(试用)代数(甲种本)第二册编写的．本书由教育部委托安徽省教育厅组织编写，参加编写的有合肥市第六中学朱新民、安徽省教育科学研究所薛凌、安徽省教育学院邱树德、合肥市第一中学杨贤华、安徽省教育科学研究所吴之季等，并由吴之季校订．

本书在编写过程中，曾得到安徽省教育厅的许多支持和帮助。

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程……1
I　教学要求……1
II　教材分析和教学建议……1
一　反三角函数……3
二　简单三角方程……12
III　习题的答案、提示和解答……16
IV　附录……27
一　三角函数(自变量属于每一单调区间)的反函数……27
二　三角方程不同解法所得解集的等效性问题……29
第二章　数列与数学归纳法……37
I　教学要求……37
II　教材分析和教学建议……37
一　数列……39
二　数学归纳法……47
III　习题的答案、提示和解答……51
IV　附录……86
一　数列的分类……86
二　我国古代对数列的某些研究……88
三　数学归纳法的原理……89
第三章　不等式……94
I　教学要求……94
II　教材分析和教学建议……94
III　习题的答案、提示和解答……108
IV　附录……131
一　算术平均数与几何平均数……131

二 不等式$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$……136
第四章 行列式和线性方程组……139
I 教学要求……139
II 教材分析和教学建议……140
III 习题的答案、提示和解答……165
第五章 复数……203
I 教学要求……203
II 教材分析和教学建议……203
一 复数的概念……205
二 复数的运算……210
三 复数的三角形式……215
III 习题的答案、提示和解答……222
IV 附录……270
一 虚数形成的历史……270
二 为什么复数集中不能规定大小关系……272
三 共轭复数的性质……273
四 复数的模与辐角的性质……273

第一章　反三角函数和简单三角方程

I　教学要求

1. 使学生理解反三角函数的意义，能由反三角函数的图象得出反三角函数的性质，能运用反三角函数的定义、性质解决有关问题.

2. 使学生在理解三角方程意义的基础上，牢固地掌握最简单的三角方程的解法和解集，并会解简单的三角方程.

3. 通过对反三角函数进行三角运算及解三角方程，继续提高学生灵活运用三角公式解决问题的能力.

II　教材分析和教学建议

本章内容包括两大节，第一大节研究三角函数的反函数，第二大节研究最简单的三角方程的解集，并学习简单三角方程的解法.

本章教材的一个难点是反三角函数的概念，特别是反三角函数的定义域的选定对学生来说较难接受. 学生在高一时，已经学习了一一映射、逆映射和反函数等概念，并且学习了互为反函数的指数函数与对数函数. 但是，指数函数 $y=f(x)=a^x$ 的定义域是 $A=(-\infty, +\infty)$，值域是 $B=(0, +\infty)$，$f: A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射，反函数 $y=f^{-1}(x)=\log_a x$

是对数函数，f^{-1} 就是 $B=(0, +\infty)$ 到 $A=(-\infty, +\infty)$ 上的逆映射. 在这个具体例子中，映射 f: $A \to B$ 作用下的原象集合及象集合，分别就是映射 f^{-1}: $B \to A$ 作用下的象集合及原象集合. 而三角函数的反函数情况与此不同. 例如正弦函数 $y=f(x)=\sin x$，从 $x\in(-\infty, +\infty)$ 到 $y\in[-1, +1]$ 上不是一一映射，不存在一个从象集合到原象集合的逆映射. 只有把 $(-\infty, +\infty)$ 分成满足一定条件的子区间，才能构成子区间到 $[-1, +1]$ 上的一一映射. 因而在讲授反三角函数之前，一定要通过复习，使学生清晰地掌握映射概念，明确映射应包括"原象集合 A、象集合 B 以及从 A 到 B 的对应法则 f"三个部分，一一映射必须满足"对于集合 A 中不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象"这样两个条件，以及"只有对于一一映射，才能研究它的逆映射"等.

教材中的另一难点是三角方程的增根与失根问题，以及三角方程因解法不同而得到的解集的不同表达形式的等效性问题. 教学这部分内容时，应当告诉学生，解三角方程，对方程进行变换时，要避免失根和增根，避免不了时，一定要经过检验，才能确定方程的解. 至于解的形式，不必要求统一. 关于不同表达形式的等效性问题，对于中学生，在课堂内不必作详细的补充介绍.

本章教材的重点是反三角函数的概念、最简单的三角方程的解集和简单三角方程的解法. 反三角函数的概念是全章的基础，最简单的三角方程的解集是解三角方程的基础，教学时都应予以足够的重视. 讲解最简单三角方程的解集，可以利用单位圆与三角函数的图象给予直观说明，帮助理解解集

公式，并且增强记忆．关于简单三角方程的解法，学生学习时可能有一定的困难，往往由于不能灵活运用三角公式，在解题时要花费不少时间．教学时可以详细分析教材中的例题，研究如何选用公式和方法，以提高学生运用三角公式的技能．

本章教学时间约需16课时，分配如下（仅供参考）：

1.1	反正弦函数	约4课时
1.2	反余弦函数	约2课时
1.3	反正切函数与反余切函数	约2课时
1.4	三角方程	约3课时
1.5	最简单的三角方程	
1.6	简单的三角方程	约3课时
小结和复习		约2课时

一　反三角函数

1.1　反正弦函数

1. 教学反正弦、反余弦、反正切、反余切四个函数时，应当以反正弦函数为重点，教材中对这四个反函数的研究步骤是一样的：都是先研究函数在一个子区间上能构成一一映射，然后引出反函数定义、给出符号、建立图象，再根据图象观察得出性质．最后进行计算与证题．所以只要抓住反正弦函数，讲解清楚，就基本上可以了．不必对四个函数都作同样的讲解，不必平均使用精力．

2. 在讲反正弦函数概念之前，应该复习一下高中代数第一册中关于映射、一一映射、逆映射、反函数等概念．可以举

函数 $y=x^2$ 为例，函数 $y=x^2$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$上没有反函数，因为对应法则“平方”不是一对一的（如 ±2 都和 4 对应）。当 $y=x^2$ 的定义域限制在$[0, +\infty)$时，对应法则“平方”才是一对一的，$y=x^2$ 就有反函数$x=\sqrt{y}$；或者当定义域限制在$(-\infty, 0]$时，对应法则“平方”也是一对一的，$y=x^2$ 有反函数 $x=-\sqrt{y}$。一定要使学生明确其对应法则必须是一对一的，函数 $y=f(x)$才有反函数。

教学正弦函数的反函数时，应充分利用函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$的图象（教材上的图 1-1）。从图象上能直观地看到，它的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[-1, 1]$。对于$x\in(-\infty, +\infty)$的每个值，y 都有唯一确定的值和它对应，而对于 $y\in[-1, 1]$的每一个值，x 都有无穷个值和它对应（利用平行于 y 轴、x 轴的直线与图象可能得到的交点数，给予直观解释。这样做，还可以为选择一一映射区间提供方便）。这就说明对应法则“取正弦”不是一对一的，因此，$y=\sin x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$内不存在反函数。

3. 把区间$(-\infty, +\infty)$划分为闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$及闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（其中 $k\in Z$，根据正弦函数的图象，我们知道，这些闭区间都是正弦函数的单调区间），那么，从每一个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$或闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（其中 $k\in Z$）到闭区间$[-1, 1]$上的对应法则“取正弦”都是一对一的，相应的映射就都是一一映射，因而它们都有逆映射；由其中每一个逆映射所确定的函

数，都是 $y=\sin x$ 的反函数．为了应用上(如查表)的方便，通常都是在这些单调区间中，选择包括所有锐角的那个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$(一般称它为主值区间，教材上的图 1-2)上的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$．教材中这段内容没有采取划分$(-\infty,\ +\infty)$为闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$及$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$($k\in Z$)的办法来处理，而是直接选择单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$来定义了反正弦函数，不提其他单调区间上的反函数问题．这样处理，可以避免“在每个单调区间上有反正弦函数”的提法，比较符合中学阶段对反函数概念的要求．教学时应紧紧扣住教材，不要再给学生补充过多的内容．

教材在研究选取单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$确定 $y=\sin x$ 的反函数时，突出了三点：

(1) 对于 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的每一个值，$y=\sin x$有唯一的值和它对应；

(2) 对于 x 的不同的值，y 有不同的值和 x 对应；

(3) 随着 x 由$-\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{\pi}{2}$，y 由-1 增大到$+1$，取得$[-1,1]$上的一切值．

这三点紧紧扣住了一一映射的条件，讲解时要分析清楚，从而使学生了解掌握概念的重要性．

4．给出反正弦函数的定义与符号 $\arcsin x$ 后，一定要使学生深刻理解符号 $\arcsin x$ 的准确含义．正如教材所强

调的:

(1) 这里的 x 满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(2) $\arcsin x$ 是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 里的一个角(弧度数)(分得再细点,即当 $-1\leqslant x<0$ 时,$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x<0$;当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant \arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$).

(3) 这个角(弧度数)的正弦值等于 x,即

$$\sin(\arcsin x)=x.$$

5. 由于已经学过定理"函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称",因此,教材在研究反正弦函数的图象时,先画出函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象,然后再画出它关于直线 $y=x$ 的对称图形,即得到反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图象(参看教材上的图 1-3). 教学时,可以用平板玻璃或透明纸画好图象,翻转给学生看,以增强直观效果. 由于没有反三角函数表,所以不用直接描点的方法画反三角函数图象. 如果描点,也只能转化为 $x=\sin y$,描出它在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.

6. 教材只从观察图象得出反正弦函数的两条性质,并不要求作数学论证,这样做比较符合学生的接受能力.

现在写出关于这两条性质的数学证明,供教师参考(不要给学生补充):

性质 1 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

证明：设$-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，$y_1=\arcsin x_1$, $y_2=\arcsin x_2$，那么

$$\sin y_1=x_1,\quad \sin y_2=x_2,\quad y_1,\ y_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

由于$x_1<x_2$，即$\sin y_1<\sin y_2$，而在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，正弦函数是增函数，所以$y_1<y_2$，即

$$\arcsin x_1<\arcsin x_2.$$

从而$y=\arcsin x$在区间$[-1,1]$上是增函数.

性质 2 反正弦函数$y=\arcsin x$的图象关于原点对称，这说明它是奇函数. 也就是

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\quad x\in[-1,1].$$

证明：因为$x\in[-1,1]$，

$$\sin[-\arcsin x]=-\sin(\arcsin x)=-x,$$

又$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，即$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以

$$\frac{\pi}{2}\geqslant-\arcsin x\geqslant-\frac{\pi}{2},$$

即$-\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 因此$-\arcsin x$是属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且它的正弦等于$-x$的一个值，于是

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

7. 对反三角函数值进行三角运算，是本章的重要内容之一. 在进行这类运算时，只要根据定义把反三角函数值看作主值区间内的角（弧度数），就可以按照计算三角函数值的方

法进行．这样，有关三角函数的和、差、倍、半等恒等变换公式，就都可用于反三角函数值的三角运算了．

解这类问题可按自变量的值分特殊值和非特殊值两类：

(1) 特殊值的反三角函数值的三角运算

某些特殊值的反三角函数值是特殊角，解这类问题就可先把特殊值的反三角函数值化为特殊角，把问题转化为求特殊角的三角函数值．如教材第5页上例3的第(1)小题．又如，在学生学了反余弦函数后，可举下例．

例 计算$\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$的值．

解： $\because\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4},$

$\therefore\quad \operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$

(2) 非特殊值的反三角函数值的三角运算

因为反三角函数值是一个角，所以解这类问题时，可设反三角函数值为一个辅助角，那么反三角函数值的三角运算，就转化为求辅助角的三角函数值，如教材第6页上例3的第(2),(3),(4)三个小题．又如

例 计算 $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$的值．

解： 设$\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$，则 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

$\because\qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$

$\therefore\qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}.$

设 $\arcsin\frac{8}{17}=\beta$，则 $\sin\beta=\frac{8}{17}$.

$\because$ $$0<\beta<\frac{\pi}{2},$$

$\therefore$ $$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{15}{17}.$$

于是

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{77}{85}.$$

解这类问题的一般步骤是：

(1) 用 α, β 等辅助角表示题目中的反三角函数值，根据条件写出 α, β 的范围，并写出与这个反三角函数值相应的三角函数值；

(2) 根据三角恒等变换公式，来确定应该求出哪些三角函数值；

(3) 利用已知一个角的三角函数值求这个角的其他有关三角函数值的方法，求出所需要的三角函数值，代入原式进行运算.

8. 研究 $\arcsin(\sin x)$ 是否等于 x 的问题，可进一步加深对反正弦函数意义的理解，如教材第 7 页上的例 4. 根据定义可知，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时才有 $\arcsin(\sin x)=x$，所以，当 $x\notin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，就应由诱导公式求出 $\sin x'=\sin x$，且使 $x'\in$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，从而 $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin x')=x'$. 例如教材第 7 页上例 4 的第(2)小题可以这样来做:

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\arcsin\left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

1.2 反余弦函数

1. 由于反三角函数概念难于掌握，在讲反余弦函数概念时，应该引导学生看书，对比反正弦函数的概念来理解反余弦函数的概念. 还应把反余弦函数与反正弦函数的异、同点交代清楚.

2. 将函数 $y=\cos x$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象进行对比，说明在包括所有锐角的闭区间[0, π](一般称它为主值区间)上，确定函数 $y=\cos x$ 的映射是区间[0, π]到[-1, 1]上的一一映射. 所以，我们直接定义函数 $y=\cos x$ 在[0, π]上的反函数叫做反余弦函数，记作 $y=\arccos x$. 与反正弦函数类似，这里也没有把 $y=\cos x$ 的定义域($-\infty$, $+\infty$) 划分成无穷多个单调子区间 [$2k\pi$, $(2k+1)\pi$] 及 [$(2k+1)\pi$, $2(k+1)\pi$]，避开了“在每个单调区间上有反余弦函数”的提法.

3. 关于 $y=\arccos x$ 的图象，可以让学生看教材第 10 页上的图 1-5，从图上了解 $y=\arccos x$ 的图象与余弦函数 $y=\cos x$ 在[0, π]上的一段图象关于直线 $y=x$ 对称.

4. 由教材的图 1-5 容易看出，$y=\arccos x$，$x\in[-1, 1]$ 是减函数；它既不是奇函数，也不是偶函数. 但 $x\in[-1, 1]$ 时，$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，这一性质不容易从图上看

出，需要给出证明。证明后，可以进一步告诉学生，$y=\arccos x$ 的图象关于点$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$成中心对称。

对于闭区间$[-1,1]$上的任意x值，都有

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

这个公式很重要，可直接用来计算负值的反余弦函数值，应该要求学生在理解的基础上掌握这个公式。

要向学生强调指出，证明这个反三角函数恒等式，必须证明三点：(1) $-x\in[-1,\ 1]$；(2) $\cos(\pi-\arccos x)=-x$；(3) $(\pi-\arccos x)\in[0,\ \pi]$。这三点缺一不可。如果仅仅证明了前两点，即 (1)$-x\in[-1,1]$ 和 (2) $\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x$，漏证(3) $(\pi-\arccos x)\in[0,\pi]$，就说$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，这是不正确的。

1.3　反正切函数与反余切函数

1. 教学反正切、反余切函数，可以要求学生回忆并画出 $y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$ 的图象。

2. 课本直接定义正切函数 $y=\operatorname{tg}x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做反正切函数，余切函数 $y=\operatorname{ctg}x(x\in(0,\ \pi))$的反函数叫做反余切函数。要向学生强调的是，与反正弦函数、反余弦函数不同，这两个反函数的定义域是开区间，不象前面两个反函数的定义域都是闭区间。

3. 根据互为反函数的函数图象间的关系，由正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的一段关于直线 $y=x$ 的对称图形，和余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 在$(0,\ \pi)$上的一段关于直线 $y=x$ 的对称

图形，分别得到 $y=\mathrm{arc\,tg}\,x$ 和 $y=\mathrm{arc\,ctg}\,x$ 的图象(见教材上的图 1-6 和图 1-7)后，可向学生指出，$y=\pm\frac{\pi}{2}$ 是 $y=\mathrm{arc\,tg}\,x$ 的渐近线，$y=0$ 与 $y=\pi$ 是 $y=\mathrm{arc\,ctg}\,x$ 的渐近线，画这两个图象时，可先画出它们的渐近线 $y=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=0$ 与 $y=\pi$，在两条渐近线间近似画出函数图象.

4. 教材第 15 页上给出了反正切函数、反余切函数的三条性质，其中前两条性质可以从教材上的图 1-6，1-7 直观理解. 可让学生自己去证明性质(3) $\mathrm{arc\,ctg}(-x)=\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 下面的证明供参考.

证明: 由诱导公式与反余切函数的定义，得

$$\mathrm{ctg}(\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x)=-\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}\,x)=-x.$$

已知 $0<\mathrm{arc\,ctg}\,x<\pi$，得

$$0>-\mathrm{arc\,ctg}\,x>-\pi,$$

$$0<\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x<\pi,$$

即 $(\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x)\in(0,\pi)$.

又知 $-x\in(-\infty,+\infty)$，由反余切函数定义，可知

$$\mathrm{arc\,ctg}(-x)=\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x.$$

在证明时，要强调三点：(1) $-x\in(-\infty,+\infty)$；(2) $\mathrm{ctg}(\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x)=-x$；(3) $(\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x)\in(0,\pi)$. 这样处理后，教材第 16 页上的例 2 就无需再细讲了.

二 简单的三角方程

三角方程是三角学中重要内容之一. 解三角方程时，需要用的知识比较广泛，它不仅要用到三角中的许多定理和公