416

职工高等工业专科
学校教学参考书

黄午阳 编

概率论解题指南

高等教育出版社

职工高等工业专科学校教学参考书

概率论解题指南

黄午阳　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书的取材符合职工高等工业专科学校概率论课程的基本要求，内容为排列与组合、随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理。每章分为内容提要、范例分析、练习与思考三部分，着重讲清解题思路，可供职工大学师生参考，也可供成年人自学概率论时参考。

职工高等工业专科学校数学参考书

概率论解题指南

黄午阳 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行

开本850×1168 1/32 印张2.375 字数58 000
1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷
印数 00 001—10 100

书号 13010·01368 定价0.53元

前　言

当前，许多人正在学习概率论方面的知识．对于初学这门课程的同志来说，往往感到习题演算相当困难．由于概率论的解题方法与其他数学学科相比有独特之处，因此初学者感到困难并不奇怪，问题在于如何才能帮助初学者较快地度过这一关．针对某种教材编一本题解似乎对学这种教材的读者有所帮助，但这会增加读者的依赖性，不利于读者掌握概率论的基本概念和基本方法．我们认为，通过对一些典型的问题进行分析，以指导读者解题是有效的途径之一．

基于上述原因编写了《概率论解题指南》这本小册子．考虑到这本小册子的主要阅读对象是成人高校的师生，因此对于超出职工大学教学大纲要求的问题均未选入．

本书由哈尔滨工业大学曹彬教授与中国农业银行黑龙江省干部学校徐文培副教授审阅．他们对本书提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢．

由于编者水平有限，敬请广大读者对书中所存在的缺点和问题加以批评、指正。

编者　86.6

目　　录

预备知识　排列与组合

内 容 提 要

一、基本概念

1．从 n 个不同的元素中，每次取出 m（$m\leqslant n$）个按照一定的顺序排成一排，叫做从 n 个元素中每次取 m 个的排列，所作出的不同排列种数记作 A_n^m.

2．从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个(元素可以重复出现，m 也不一定小于或等于 n)按照一定的顺序排成一排，叫做从 n 个元素中每次取 m 个的可重复排列.

3．从 n 个不同的元素中，每次取出 m($m\leqslant n$)个(不考虑顺序)组成一组，叫做从 n 个元素中每次取 m 个的组合，所作出的不同组合种数记作 C_n^m.

注意，排列与组合的差别在于：前者与顺序有关，而后者则与顺序无关.

4．设完成一件事有 k 类办法，在第一类办法中有 n_1 种方法，在第二类办法中有 n_2 种方法，……，在第 k 类办法中有 n_k 种方法，则完成这件事共 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法．这就是加法原理.

5．设完成一件事有 k 个步骤，第一步有 n_1 种方法，第二步有 n_2 种方法，……，第 k 步有 n_k 种方法，且必须通过 k 个步骤才算完成这件事，则完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种方法．这就是乘法原理.

二、基本公式

$$A_n^m=\begin{cases}n(n-1)\cdots(n-m+1), & m<n\\ n!\ , & m=n\end{cases}\tag{1}$$

从 n 个不同元素中每次取出 m 个的可重复排列的不同排列种数为

$$n\times n\times\cdots\times n=n^m\tag{2}$$

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\tag{3}$$

范 例 分 析

例 1 4 个人每两人交换一张照片，共需交换多少张照片？如果这 4 个人每两人握一次手，共需握手多少次？

分析 交换照片与顺序有关，因为两人交换照片时，甲给乙的照片与乙给甲的照片是不同的两张照片．握手与顺序无关，因为两人握手时，前者与后者握手就相当于后者也在与前者握手．

解 4 个人两两交换照片，共需交换 $A_4^2=12$ 张照片．

4 个人两两握手，共需握 $C_4^2=A_4^2/2!=6$ 次手．

例 2 将 3 个球放到 7 只盒子中去，共有多少种不同的放法？

分析 我们分三个步骤(即每个步骤放一个球到盒子中去)来完成放球任务．对于第一个球来说，有 7 种放法；对于第二个球来说，也有 7 种放法；对于第三个球来说，仍有 7 种放法．这种问题相当于从 7 个不同元素中每次取 3 个的可重复排列问题．

解 将 3 个球放到 7 只盒子中去，共有 $7^3=343$ 种不同的放法．

例 3 由 0，1，2，…，9 可组成多少个不能被 10 整除的没

有重复数字的三位数？

分析 本例是一个不允许重复的排列问题，但符合要求的三位数的个数不是A_{10}^3. 因为0出现在首位时并不构成三位数；0出现在末位时又能被10整除，也不符合要求. 只有当0既不出现在首位也不出现在末位时才符合要求.

解 设：0出现在首位的排列数为n_1；0出现在末位的排列数为n_2；0既不出现在首位也不出现在末位的排列数为n_3. 由加法原理可知

$$A_{10}^3=n_1+n_2+n_3$$

因为

$$n_1=A_9^2,\ n_2=A_9^2$$

所以

$$n_3=A_{10}^3-(n_1+n_2)=A_{10}^3-2A_9^2=576$$

例 4 由0，1，2，3可组成多少个末位不是2的没有重复数字的三位数？

分析 如果按例3的做法得出，末位不是2的三位数共有$A_4^3-2A_3^2=12$个，那就错了. 因为$A_4^3-2A_3^2$意味着，从总的排列数中减去以0为首位的排列数和以2为末位的排列数. 但012与032既以0为首位又以2为末位，它们被重复减了两次，从而造成了上述错误.

解 设：以0为首位的排列数为n_1；以2为末位的排列数为n_2；既以0为首位又以2为末位的排列数为n_3. 由于

$$n_1=A_3^2,\ n_2=A_3^2,\ n_3=A_2^1$$

故末位不是2的三位数共有$A_4^3-2A_3^2+A_2^1=14$个.

例 5 将5名男运动员和6名女运动员编组进行混合双打比赛，共有多少种搭配方式？

分析 因为每场混合双打比赛需有两名男运动员和两名女运动员参加，而对于选出的4名运动员又有两种搭配方式. 因此，我

们可分三个步骤来完成编组任务．第一步，从5名男运动员中任选两名；第二步，从6名女运动员中选任两名；第三步，对选出的4名运动员进行搭配．

解 从5名男运动员中任选两名，共有C_5^2种选法；从6名女运动员中任选两名，共有C_6^2种选法；对选出的4名运动员共有两种搭配方式．由乘法原理可知，搭配方式共有$C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot 2 = 300$种．

例6 在11本书中有两套书，一套4本，另一套3本．将这11本书排列在书架上，试问：(1)两套书必须各自排在一起，共有多少种排法？(2)两套书必须按各自的顺序排好，共有多少种排法？

(1) **分析** 因为两套书必须各自排在一起，故不能将问题处理为从11个不同元素中每次取11个的排列问题，而应按下列三个步骤来处理：第一步，将两套书及另外4本书看作6个不同的元素进行排列；第二步，将一套书中的4本书进行排列；第三步，将另一套书中的3本书进行排列．

解 将两套书及另外4本书进行排列的排列数为A_6^6，将一套书中的4本书进行排列的排列数为A_4^4；将另一套书中的3本书进行排列的排列数为A_3^3．于是，由乘法原理可知，两套书各自排在一起时，共有$A_6^6 A_4^4 A_3^3 = 6!4!3! = 103680$种排法．

(2) **分析** 两套书按自各的顺序排好时的排列数不是4！和3!．因为对成套的书来说，按顺序排列的方式只有两种，即从左向右排或从右向左排．

解 两套书按自各的顺序排好时，共有$6! \times 2 \times 2 = 2880$种排法．

例7 将6个人分成甲、乙、丙三个小组，每组两人，共有多少种分法？如果只要求将6个人分成三个小组，共有多少种分法．

分析 第一步，从 6 个人中任选两人组成甲组；第二步，从余下的 4 个人中任选两人组成乙组；第三步，将最后剩下的两人组成丙组.

对于甲、乙、丙三个小组来说，下面列出的 $3!=6$ 种分法显然是不同的.

甲	乙	丙
(a,b)	(c,d)	(e,f)
(a,b)	(e,f)	(c,d)
(c,d)	(a,b)	(e,f)
(c,d)	(e,f)	(a,b)
(e,f)	(a,b)	(c,d)
(e,f)	(c,d)	(a,b)

其中 a,b,c,d,e,f 表示 6 个人.

然而，对于只要求将 6 个人分成三个小组来说，上面列出的 6 种分法只能算是同一种分法.

解 将 6 个人分成甲、乙、丙三个小组，共有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种分法.

将 6 个人分成三个小组，共有 $C_6^2C_4^2C_2^2/3!=15$ 种分法.

例 8 将 6 条颜色不同的毛巾奖给三个工人，试问：一人得 1 条，一人得 2 条，一人得 3 条的奖法共有多少种？

分析 第一步，从 6 条毛巾中任选 1 条奖给某一个人；第二步，从余下的 5 条毛巾中任选 2 条奖给剩下的两人中的某一个人；第三步，将余下的 3 条毛巾奖给最后剩下的一个人.

解 一人得 1 条，一人得 2 条，一人得 3 条的奖法共有$(C_6^1C_3^1)(C_5^2C_2^1)(C_3^3C_1^1)=360$ 种.

对于上述问题也可这样来求解：先将 6 条毛巾按 1 条、2 条和 3 条分成三组，然后将分好的三组毛巾奖给三个工人. 由此可得，共有 $C_6^1C_5^2C_3^3\cdot 3!=360$ 种奖法.

练习与思考

1．证明下列等式：

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

2．12 个人去图书馆借 10 本不同的书，每人至多借一本并借回家看，现已知这 10 本书全部借出，问共有多少种不同的借法？

答案：239500800.

3．某小组有成员 4 人，每人在一星期内要参加劳动一天．如要求 4 个人安排在不同的 4 天参加劳动，共有多少种安排法？如果要求 4 个人中有两个人在同一天劳动，另外两个人在不同的两天劳动，共有多少种安排法？

答案：840，1260.

4．6 名学生排成一排，其中一名既不站在排头也不站在排尾，共有多少种排法？

答案：480.

5．有 4 组球队，每组 5 队，组内先举行单循环赛(每两队赛一次)，然后各组同名次的队再举行单循环赛，共赛几场？

答案：70.

6．在第 3 题中，如果要求两个人在同一天劳动，另外两个人也在不同的另一天劳动，共有多少种安排法？

答案：126.

7．从 5 双不同的鞋中任取 4 只，若要求取出的 4 只鞋均不配对，问共有多少种取法？

答案：80.

8．从 5 双不同的鞋中连续取 4 次，每次任取一只鞋(取出的鞋不再放回)，若仍要求取出的 4 只鞋均不配对，问共有多少种取法？

答案：1920.

第一章　随机事件与概率

内容提要

一、基本概念

1. 在一定条件下,可能发生也可能不发生的事件称为随机事件;必然发生的事件称为必然事件;不可能发生的事件称为不可能事件. 刻划事件发生的可能性大小的量称为事件的概率，概率的值在 0 与 1 之间.

2. 事件的运算

(1) 事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和,记作 $A\cup B$.

(2) 事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$ 或 AB.

3. 事件的关系

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 B 包含 A,记作 $B\supset A$.

(2) 若 $B\supset A$, $A\supset B$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 若 $A\cap B=\phi$, 其中 ϕ 为不可能事件,则称 A 与 B 互不相容.

(4) 若 $A\cap B=\phi$, $A\cup B=\Omega$, 其中 ϕ 为不可能事件，Ω 为必然事件,则称 A 与 B 互逆或互为对立事件,记作 $B=\bar{A}$ 或 $A=\bar{B}$.

二、基本公式

1．古典概型的计算公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个等可能完备事件组（所谓等可能完备事件组是指：$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 出现的可能性相等，而在任一次试验中，它们之中至少有一个发生且至多有一个发生），其中任一事件 $A_i, i=1,2,\cdots,n$，称为基本事件．如果事件 A 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之中的 m 个事件所组成，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

其中 n 是基本事件的总数，m 是 A 所包含的基本事件数（或者说 m 是 A 的有利事件数）．

2．加法公式

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2}$$

若 $AB=\phi$，则有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B) \tag{1.3}$$

若 $B=\bar{A}$，则有

$$P(A)=1-P(\bar{A}) \tag{1.4}$$

3．乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{1.5}$$

其中，$P(B|A)$ 表示事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率，$P(A|B)$ 表示事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率．

若 A 与 B 相互独立，则有

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.6}$$

(1.6)式可作为 A 与 B 相互独立的定义，即可利用 (1.6) 式来判断 A 与 B 是否独立．但当已知 A 与 B 相互独立时，我们也常用(1.6)式来计算事件乘积的概率．

4．全概率公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组(所谓完备事件组是指：在任一次试验中，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之中至少有一个发生且至多有一个发生)，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \tag{1.7}$$

利用全概率公式(1.7)可导出计算条件概率的贝叶斯公式：

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{1.8}$$

5．伯努里公式

设在单次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立试验中，事件 A 发生 k 次的概率为：

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1.9}$$

其中，$q=1-p=P(\bar{A})$. 上述问题称为伯努里概型的问题.

当 n 相当大 p 又很小时，

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{1.10}$$

其中，$\lambda=np$，而

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

的值可由泊松分布表查得.

注意：伯努里公式只适用于伯努里概型，凡属伯努里概型的问题可直接用(1.9)式或(1.10)式求解.

对于不属于伯努里概型的问题，求解事件的概率一般可按下列步骤进行：

(1) 试用古典概型的计算公式求解.

(2) 如果遇到的事件比较复杂，可设法将其用较为简单的事件来表示，然后利用加法公式和乘法公式求解；也可通过其对立事

件的概率算出原事件的概率.

(3) 当上述两种方法失效时，可试用全概率公式求解. 利用全概率公式解题的关键在于寻找一个完备事件组. 至于如何寻找完备事件组则应结合具体问题加以分析.

范 例 分 析

例 1 两袋中分别装有写着 0,1,2,3,4,5 六个数字的六张卡片,从每袋中各取一张,求所得卡片上两数之和等于 6 的概率.

分析 对于这问题，如果把两数之和的 11 种不同结果 0, 1, 2,···,10 作为 11 个基本事件，进而得出所求的概率为 1/11 就错了,因为上述 11 种不同结果出现的可能性是不相等的. 实际上，本题基本事件的总数为 $C_6^1C_6^1$. 由于两数之和等于 6 共有(1,5)，(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)五种情况,故有利事件数是 5.

解 设 A =“所得卡片上两数之和等于 6”

因为

$$n=C_6^1C_6^1=36$$

$$m=5$$

所以

$$P(A)=\frac{5}{36}$$

例 2 某小组有成员 3 人,每人在一星期内参加劳动一天,如果劳动日期可随机地安排,求 3 人在不同的 3 天参加劳动的概率.

分析 我们把 3 个人看作“3 个球”，而把一个星期的 7 天看作“7 只盒子”. 于是，将 3 个球放入 7 只盒子的所有可能的放法种数即为基本事件的总数 n，而将 3 个球放入不同的 3 只盒子的放法种数即为有利事件数 m.

解 设 A =“3 个人在不同的 3 天参加劳动”

因为

$$n = 7^3$$

$$m = A_7^3$$

所以

$$P(A) = \frac{A_7^3}{7^3} = \frac{30}{49}$$

例 3 随机地将 12 名新生平均分配到甲、乙、丙三个班级中去，这 12 名新生中有 3 名是优秀生. 问(1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率是多少？(2) 3 名优秀生分配在同一个班级的概率是多少？

分析 将 12 名新生平均分配到三个班级的分法总数为 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$，即基本事件的总数是 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$.

(1) 为了使每个班级都有一名优秀生，可先将 3 名优秀生分别分配到三个班级中去，然后再将其余 9 名新生平均分配到三个班级中去. 每个班级都有一名优秀生的分法共有 3! 种. 对于上述的每种分法，其余 9 名新生平均分配到三个班级中去，共有 $C_9^3 C_6^3 C_3^3$ 种分法. 由乘法原理可得有利事件数为 $3!C_9^3 C_6^3 C_3^3$.

(2) 为了使 3 名优秀生在同一个班级内，可先将他们分配在同一班级内，然后再将其余 9 名新生按 1, 4, 4 的比例进行分配. 3 名优秀生在同一班级内的分法共有 3 种. 对于上述的每种分法，其余 9 名新生的分法共有 $C_9^1 C_8^4 C_4^4$ 种. 由乘法原理可得有利事件数为 $3\,C_9^1 C_8^4 C_4^4$.

解 (1) 设 A ="每个班级各分配到一名优秀生".

因为

$$n = C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$$

$$m = 3!C_9^3 C_6^3 C_3^3$$

所以

$$P(A) = \frac{3!C_9^3 C_6^3 C_3^3}{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4} = \frac{16}{55}$$

(2) 设$B=$“3名优秀生分配在同一个班级”.

因为

$$n=C_{12}^4C_8^4C_4^4$$

$$m=3\ C_9^1C_8^4C_4^4$$

所以

$$P(B)=\frac{3\ C_9^1C_8^4C_4^4}{C_{12}^4C_8^4C_4^4}=\frac{3}{55}$$

例 4 在1,2,···,100中任取一数，问(1)取到的数既能被4整除又能被6整除的概率是多少？(2) 取到的数能被4或6整除的概率是多少？

分析 因为4与6的最小公倍数是12，故既能被4整除又能被6整除相当于能被12整除.

直接求能被4或6整除的概率较困难. 为此，可引进能被4整除和能被6整除两个较为简单的事件，并用它们的和来表示能被4或6整除这一事件.

解 (1) 设$A=$“能被12整除”=“既能被4整除又能被6整除”.

因为1至100中能被12整除的数有8个，所以

$$P(A)=\frac{8}{100}=0.08$$

(2) 设$A=$“能被4整除”，$B=$“能被6整除”，则$A\cup B=$“能被4或6整除”. 由(1.2)式可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

式中AB表示既能被4整除又能被6整除，也即表示能被12整除. 因为1至100中能被4整除的数有25个，能被6整除的数有16个，故

$$P(A\cup B)=\frac{25}{100}+\frac{16}{100}-\frac{8}{100}=\frac{33}{100}=0.33$$