高等学校试用教材

线性代数

赵德修 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

线性代数

赵德修 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

线 性 代 数

赵德修 编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

四川省金堂新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 264,000

1990年6月第1版 1990年8月第1次印刷

印数 0001—2 010

ISBN 7-04-003071-3/O·954

定价 2.35元

前　言

本书是按照线性代数课程教学基本要求编写的．早在1981年初，编者根据工科院校各专业对线性代数的教学要求进行了广泛调查，在此基础上编写了《线性代数》讲义．1982年作了修改和补充．1987年再次作了修改．1987年12月经高等学校工科数学课程教学指导委员会第十三次全体会议评审，被选定为高等工科院校《线性代数》教材．

本书基本内容包括行列式、矩阵、线性方程组、二次型、n维向量空间、线性变换、欧氏空间．编写中力求从工科院校的要求出发，从学生的实际水平出发安排教学内容和教学次序，试图贯彻理论联系实际和少而精原则，力求概念引入自然，循序渐进，通俗易懂，便于自学．每节后面都配有足够数量的习题，并于书后附有提示或答案．每章后面都有该章的小结．打上*号的部分(如第七章：广义逆矩阵)是工科院校《线性代数》课程的非基本内容，可根据各专业的需要作为自学或讲座时参考．书前有本书所用的符号表，书后有“关于连加号$\sum$和连乘号$\prod$”，“常见的一些特殊的矩阵及其性质”，“关于矩阵的迹”几个附录，供学习时参考．

遵照高等学校工科数学课程教学指导委员会第十三次全体会议在审查评选过程中提出的宝贵意见，我对有关章节作了修改，在此谨向参加会议的各位老师表示衷心的感谢．会议委托课委会委员、清华大学栾汝书教授作为复审人，对本教材作细致的审查，并提出了许多宝贵意见，在此谨向栾汝书教授表示衷心的感谢．还向高教出版社的丁鹤龄编审表示衷心的谢意．

从1981年到1988年在本教材编写、修改和试用过程中，得到

了空军雷达学院(汉口)和武汉测绘科技大学领导、数学教研室全体同志以及各系各专业几十位老师的热情帮助和支持. 特别是空军雷达学院姚兆栋教授、武汉测绘科技大学陈文彦副教授、张范苏教授、李作发讲师、徐茵副教授、湖北省教师进修学院陈纪绵副教授、武汉工业大学曾宪义副教授、空军政治学院夏禹光讲师在百忙中详细地审阅了本教材,并提出了许多宝贵意见,在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,本书错误和缺点在所难免,敬请各位老师和读者批评指正.

赵德修

1989 年12月于武汉

符 号 表

符　　号	含　　义
$\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$	$j_1, j_2, \cdots, j_n$ 排列的逆序数
$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$	和号(下面的 $j_1\ j_2\ j_3$ 表示对所有可能的三阶排列 $j_1\ j_2\ j_3$ 求和)
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	$\triangleq \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ $= \sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ (n 阶行列式)
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$	上三角行列式
$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	下三角行列式
$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	对角形行列式
$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}$	连乘符号($1\leqslant j<i\leqslant n$ 表明对所有 1 至 n 以内的 $j<i$ 的元素求连乘积。)
$\triangleq$	定义为

（续表）

符　　号	含　　义
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 或记为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m\times n$ 阶矩阵
$\|A\|$ 或记为 $\det A$	方阵 A 的行列式
I（或 E; I_n）	n 阶单位矩阵
$R^{m\times n}$	所有 $m\times n$ 阶实矩阵的全体所组成的集合
$R^{n\times n}$	所有 $n\times n$ 阶实矩阵的全体所组成的集合
$\Rightarrow$ $\nRightarrow$	推出 不能推出
A^T（或 A'） 当 $A=A^T$ 时 当 $A=-A^T$ 时	A 的转置矩阵 A 称为对称矩阵 A 称为反对称矩阵
A^{-1}	A 的逆矩阵（$A^{-1}A=AA^{-1}=I$）
A^*（或 $\operatorname{adj} A$）	A 的伴随矩阵（或称为 A 的附加阵）
当 $\|A_{n\times n}\|=0$ 时 当 $\|A_{n\times n}\|\neq 0$ 时	A 称为退化矩阵（或奇异矩阵） A 称为非退化矩阵（或非奇异矩阵）
方阵 $A^T=A^{-1}$ 时， （或 $A^TA=AA^T=I$ 时）	A 称为正交矩阵
$P(i(c))$	$\triangleq \begin{array}{c} \text{ }i\text{ 列} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{ 行} \quad (c\neq 0) \end{array}$ 称为倍法矩阵

（续表）

符　　号	含　　义
$P(i,j(k))$	$\triangleq \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad & \quad & i列 & \quad & j列 & \quad & \quad \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i行 \\ \\ \leftarrow j行 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$ 称为消法矩阵
$P(i,j)$	$\triangleq \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad & \quad & i列 & \quad & \quad & j列 & \quad & \quad \\ & & \downarrow & & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & & \vdots & & \\ & 1 & \vdots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & & \vdots & 1 & \\ & & \vdots & & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i行 \\ \\ \\ \leftarrow j行 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$ 称为换法矩阵
R^n	(实的) n 维向量空间
R^2	二维向量空间(平面上全体向量所构成的空间)
R^3	三维向量空间(几何空间中全体向量所构成的空间)
$\forall$	任意的;所有的;一切的
$\in$ $\notin$	属于 不属于
R	实数全体所构成的集合(或称一维向量空间——直线上全体向量所构成的空间)
$\mathrm{rank}(A)$ (或 $r(A)$)	矩阵 A 的秩
$A\cong B$	A 与 B 是等价的(或称相抵的)

（续表）

符　　号	含　　义
$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \cong A_{m\times n}$	$\tilde{A}$ 称为 A 的标准形
$\longrightarrow$	变成为
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX$	n 元二次型（二次齐式；或二次型）
$X_{n\times 1}=C_{n\times n}Y_{n\times 1}$	线性变换
$A\simeq B$	A 与 B 是合同的
P	实二次型的正惯性指数
N	实二次型的负惯性指数（$N=r-P$）
r	二次型的秩
$S(\triangleq P-N)$	（实二次型的）符号差
$A_2\geqslant A_1$	A_1，A_2 都为半正定，且 A_2-A_1 亦为半正定称为 A_2 不小于 A_1
$A>0$ $A<0$ $A\geqslant 0$ $A\leqslant 0$	A 为正定阵 A 为负定阵 A 为半正定阵 A 为半负定阵
$A>B$	若 A，B 为正定阵，且 $A-B$ 亦为正定阵，则称 A 大于 B.
dim	维数
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \cdots, \mathscr{E}, \cdots$	表示线性变换
$\mathscr{A}(X)$（或 $\mathscr{A}X$）	X 在线性变换 $\mathscr{A}$ 下的象

（续表）

符　　号	含　　义
$\mathscr{E}$	恒等变换(或单位变换，么变换)
$\mathscr{O}$	零变换
$A\sim B$	方阵 A 相似于 B(即 $B=X^{-1}AX$)
$f(A)$	矩阵多项式
$f(\lambda)=\|\lambda I-A\|$	矩阵 A 的特征多项式
$\|\lambda I-A\|=O$	矩阵 A 的特征方程
$\varphi(A)=O$	称 $\varphi(\lambda)$ 为矩阵 A 的零化多项式
$\mathrm{tr}\ A$(或 $\mathrm{sp}\ A$)	矩阵 A 的迹 $\left(\mathrm{tr}\ A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$
$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_i \\ & & & 1\end{bmatrix}$	若当块
$J=\begin{bmatrix}J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m\end{bmatrix}$	若当标准形
$(\alpha,\ \beta)$	α 与 β 的内积
$\\|\alpha\\|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$	α 的长度(或范数；模)
$\|(\alpha,\ \beta)\|\leqslant\\|\alpha\\|\\|\beta\\|$	柯西-布涅柯夫斯基不等式 (Cauchy-Буняковский)
$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right\|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$	许瓦兹(Schwarz)不等式
$\langle\alpha,\ \beta\rangle$	非零向量 $\alpha,\ \beta$ 的夹角
$\alpha\perp\beta$	$\alpha,\ \beta$ 正交(或互相垂直)
$\alpha^TA\beta$	双线性型

（续表）

符　　号	含　　义
A^-	g 逆(或称 A 的 g 逆)
A_r^-	A 的一个反射 g 逆
A_R^{-1}	行满秩实长方阵 A 的右逆
A_L^{-1}	列满秩实长方阵 A 的左逆
A_m^-	A 的最小范数 g 逆
A_l^-	A 的最小二乘 g 逆
A^+	A 的 Moore-Penrose 广义逆(简称 M-P 逆；或称最小二乘最小范数逆)
$\begin{cases} 1^\circ\ AXA=A \\ 2^\circ\ (XA)^T=XA \\ 3^\circ\ XAX=X \\ 4^\circ\ (AX)^T=AX \end{cases}$	潘诺斯(Penrose)关系式
$1^\circ\ XAA^T=A^T$ $2^\circ\ XX^TA^T=X$	穆尔(Moore)关系式

目　录

第一章　行　列　式

行列式的概念是从解线性方程组引出的.

在中学里,我们学习过解二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{I-1}$$

用消元法得:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{cases}$$

当二级行列式:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{I-2}$$

不等于零时,二元线性方程组(I-1)就有唯一的解:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \tag{I-3}$$

用二级行列式来表示方程组(I-1)解的公式(I-3),形式简单,容易记忆,它鲜明地给出了方程组(I-1)的解与方程组系数和常数项的关系.

类似地,对于三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{32}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{I-4}$$

用消元法可以得到仅含有一个未知数 x_1 的方程，x_1 的系数用三级行列式表示，即：

$$\begin{aligned} \Delta=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{I-5}$$

当此行列式之值不等于零时，可得未知数 x_1 的值：

$$\left.\begin{aligned} x_1=&\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ &\text{同理可得：} \\ x_2=&\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3=&\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{\Delta_3}{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{I-6}$$

因此，对于三元线性方程组 (I-4)，当其系数所组成的三级行列式(I-5)不等于零时，它就有唯一的解，其解可以用(I-6)式简洁地表示.

在自然科学和工程技术中，我们所碰到的线性方程组中未知数的个数往往有几十、几百，甚至成千上万个，一般地，对于 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{I-7}$$

我们自然会问：关于它的解是否也有类似上述的结论呢？即：是否也可以用其系数与常数项构成所谓 n 级行列式，并用它来表达方程组的解呢？答案是肯定的．为此，首先我们必须解决如下几个问题：

1°. 怎样定义 n 级行列式？

2°. n 级行列式有哪些性质？怎样计算 n 级行列式？

3°. 在什么条件下(I-7)有解？并能用 n 级行列式表示，以及如何表示？

下面分为四节依次回答上述的三个问题.

§1 n 级行列式

本节解决第一个问题——如何定义 n 级行列式？

为此，我们从二级和三级行列式的结构入手，找出它们的内在规律，然后用这些内在规律(共性)来定义 n 级行列式.

先看三级行列式(I-5)右端的结构：

1. 首先我们看到，(I-5)右端的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素是取自行列式中不同行不同列的．如果把它们的第一