地下水不稳定流有限单元计算方法—"BT"法

胡佩清 编著

冶金工业出版社

地下水不稳定流

有限单元计算方法——“*BT*”法

胡佩清　编著

冶 金 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书专门论述地下水不稳定流计算的方法——“*BT*”法，其内容包括：一、有限单元法；二、解析方法。书中介绍了在生产实践中常用的七种不同边界类型含水层的地下水不稳定流计算的方法和源程序，读者应用这种方法，既能确定渗流计算区第一类（Γ_1）边界上各结点的变水头值，又能解决计算区内复杂的计算问题，同时还可以节省勘探费用，而且应用也很方便。

本书可供冶金、煤炭、地质、建委等系统水文地质专业人员使用，也可供大专院校有关专业师生参阅。

地下水不稳定流

有限单元计算方法——“*BT*”法

胡佩清　编著

*

冶金工业出版社出版

（北京灯市口74号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/32　印张 6 1/2　字数 143 千字

1983年2月第一版　1983年2月第一次印刷

印数 00,001～4,400 册

统一书号：15062·3911　　定价0.70元

前　言

地下水不稳定流有限单元计算方法——"*BT*"法是应用"解析法来确定渗流计算区第一类（Γ_1）边界上各结点的变水头值（*BT*值），然后再用有限单元法来计算内结点及渗流计算区第二类（Γ_2）边界上的变水头值（*H*值）"的一种方法。

它既能节省勘探费用又能解决复杂的计算问题，因此，近年来应用"*BT*"法的单位越来越多。为满足生产部门应用的要求，我们在生产实践的基础上，又进一步总结了"*BT*"法的理论和计算方法，把它编写成为本书。书中，我们列举了七种常见的不同边界类型含水层渗流计算区的三角形单元剖分图、计算源程序以及输入电子计算机内原始数据填写的格式。计算时，读者只需根据生产课题的边界条件，就可以在本书中选择所需要的计算方法和源程序进行计算。其他未列入的计算类型，也可依此类推计算。

本书最后还附有："应用'*BT*'法对张马屯铁矿地下水进行疏干计算的实例"。该文是由山东省冶金设计院姜玉玺工程师编写的。

在本书编写过程中，曾得到武汉地质学院王大纯教授、陈明佑副教授、北京工业大学丘玉圃副教授、杨霖讲师等大力支持和帮助，特此表示感谢！

编著者

1981年9月

目　　录

第一章 绪 言

有限单元法是根据变分原理来求解数学物理问题的一种数值计算方法。近年来，它被广泛地应用于地下水开采和疏干工作中，并取得了一定的效果。但经过这几年的实践，我们也发现了目前应用于地下水计算的有限单元法，由于不结合专业的特点，未能解决渗流计算区剖分域第一类Γ_1边界上各结点随时间变化的水头值（简称BT值）的确定问题，因而使许多生产计算课题得不到满意的结果，耽误了生产工作。为此，本书在有限单元法计算基础上，结合具体的地质边界条件，提出了关于第一类Γ_1边界上各结点BT值的确定方法。

众所周知，有限单元法在固体构件计算中能得到广泛应用并取得显著效果，其主要原因是能解决计算区剖分域Γ边界的边值（如BT值）问题。例如：计算某一固体构件（如梁或板）内部某点的应力(σ)、应变(ε)以及位移(u，v)等值，首先必须给出Γ边界上的数值（如梁上外力及两端的约束条件），而这些边界数据根据工程的要求是可以预先给定的，而地下水开采（或疏干）计算中，正好与此相反，在开采过程中，已知的都是内部某点（井点）的流量（Q）及水位降低值（S），而在有限单元法计算中所要求的应预先给出Γ_1边界上各结点的BT值却是未知的。

由图1可见：该地区地下水的预报，如应用有限单元法计算时，首先要求给出t时刻Γ_1边界上各结点的BT值，然后通过计算来求中间内结点（或井点）的水头H值，但我们在地下水开采（或疏干）中，由于中间有开采井，故首先获得的

是各t时刻的中间水头H_{t1}，H_{t2}，H_{t3}，……，H_{tn}值，然后当

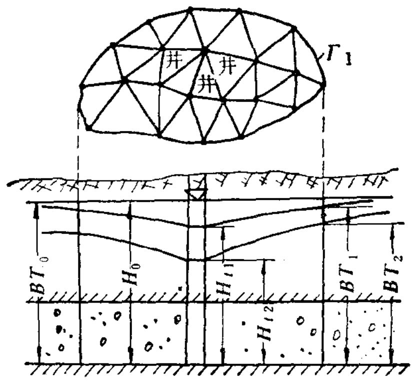

图 1　地下水开采示意图

地下水漏斗发展到Γ_1边界时，才能得到Γ_1边界上各结点相应的$BT1$，$BT2$，$BT3$，……，BTn值。这在计算上是矛盾的，也就是说，要求预报计算的内结点水头H值，我们已经有实测资料，而要预先输入电子计算机的原始数据BT值，却是后来获得的。目前，有些人因不了解上述开采的特点，单纯从有限单元计算方法出发，要求在Γ_1边界上布置观测孔，来测定每个结点各时刻的$BT1$，$BT2$，……，BTn值，然后来计算内结点各时刻的H_{t1}，H_{t2}，……，H_{tn}值，并作为预报值，这显然是不对的。当然，如果花费一笔勘探费用，就能利用t_1时刻的Γ_1边界上$BT1$值，来预报内结点t_2时刻的水头H_{t2}值，那也是合算的，但是连这也是办不到的，因为根据有限单元法的计算公式（见第二章公式25），t_1时刻的$BT1$值，只能计算t_1时刻内结点的H_{t1}值，而不能预报t_2时刻的H_{t2}值。

如果不能预先确定Γ_1边界各结点的BT值，那么应用有限单元法只能进行参数拟合计算，而不能进行预报。一种计算方法，如果不能下推进行预报计算，那就失去了计算的意义。

上述的情况，就是目前地下水开采（或疏干）中，应用有限单元法计算时所存在的主要问题之一。

但目前有些单位、为了进行预报计算，采用了下面几种方法：

1．比拟法

利用附近水文地质条件相同地区的开采资料，近似地确定本区Γ_1边界上BT值。应用这种方法如遇到相邻地区开采井的数量与水量相差很大时，就会产生很大的误差。

2．把Γ_1边界放在无穷远（或很远）处

把Γ_1边界取在无穷远处，其目的是在计算时，Γ_1边界上各t时刻的BT值，都采用原始边值水头$BT0$来代替，这实际上与上述方法一样不能解决问题。

由图（2）可见：

如果一开始就把影响范围R_A值视为无穷大（或很大），而每个时刻的BT值都采用原始水头$BT0$来计算，这实际上就认为影响范围R_{At1}，R_{At2}，R_{At3}，……，R_{Atn}是不随时间而改变的，这种假定与地下水降落漏斗随时间发展变化的事实不符，故在不稳定流计算中，忽略了R_A值随时间变化的规律，必然会产生很大的误差。

如要利用这种方法计算，必须要确定每时刻具有原始水头$BT0$值的Γ_1边界上各结点的坐标位置，这比上述确定每时刻都是固定的Γ_1边界位置上的BT值还要困难，而且计算上也很麻烦，不宜采用。

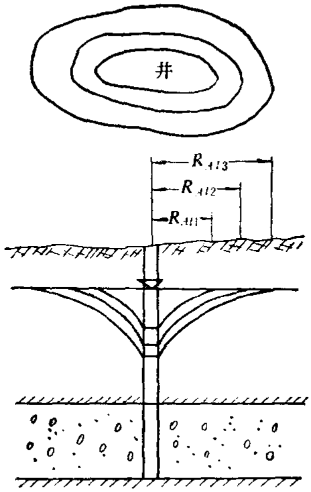

图 2　地下水漏斗发展示意图

3．变为封闭的边界来计算

有些单位为了用有限单元法计算，把实际的边界勉强地变为封闭的边界（Γ_2边界），如四面阻水边界或四边定水头边界等，因为这种类型的边界在有限单元法计算中不需要Γ_1边界BT值的，故可以计算出结果来。但毕竟在野外工作中，遇到封闭的边界是不多的，而经常遇到的还是开阔的或半封闭的边界，因此把它们勉强地改变为封闭边界，将会造成意想不到的错误。

4．取小的时段进行计算

在计算时，把计算的时段取得很小，如$\Delta t=1$天，2天，3天，5天，……，其目的就是用实测的$BT1$值（见图

1）代替$BT2$值来计算内结点的水头H_{t2}值，以达到预报的目的。这也不是一种可靠的近似方法，因为Δt虽然小，但$BT1$和$BT2$之间的差值不一定小，这与地层的透水性、边界条件以及剖分域范围大小等因素有关。如果Γ_1边界上没有观测孔实测的BT值，应用这种方法就更无把握了。有些单位用这种方法计算，内结点水头H值不但不下降，相反地还上升了。

由于第一类Γ_1边界上各结点的BT值未能解决，有限单元法在地下水计算中的应用受到了很大的限制，如能解决BT值的确定问题，就能发挥其巨大的作用。鉴于这种前提条件下，笔者根据地下水开采（或疏干）的特点，才提出用“BT”法来解决BT值问题。

“BT”法的实质：“首先是应用解析法来确定Γ_1边界上各结点的变水头值（BT值），然后应用有限单元法来计算内结点及Γ_2边界上各结点的变水头值（H值）。”

应用“BT”法计算，首先是根据水文地质条件来分析计算区各边界的性质应属于哪一种边界条件（见附录Ⅰ），然后根据计算区内部已有的抽水试验资料或短期开采资料，应用本书提出的不稳定流计算公式来优选参数以及对不同类型的Γ_1边界进行计算，以求得Γ_1边界上各结点的BT值，这样就可以节省了为求BT值而在Γ_1边界上布置观测孔的工作量。

其次，是应用已求得Γ_1边界上各结点的BT值作为边值，通过有限单元法来计算内结点及Γ_2边界上结点的水头值，如果拟合计算的结果，误差不超过5～8%，就可以进行下一步的预报计算，否则，就要再分析边界性质和原始数据，再进行拟合计算。

在附录Ⅰ中，已概括有十多种边界条件下计算 Γ_1 边界上 BT 值的不稳定流计算公式，而这些公式在本书中都已编成为计算程序，应用时很方便。

第二章 有限单元计算法

应用有限单元法解地下水不稳定流运动偏微分方程，通常是以变分原理为基础，应用泛函求极值与欧拉方程的等价性，将偏微分方程的定解问题转变为求泛函的极值问题，然后通过对定解区进行剖分和分片插值，转化为线性常微分方程组的初值问题，并用近似的积分方法将常微分方程组转化为多元线性代数方程组，最后用直接法或迭代法求结果。

这种方法不仅适用于地下水流计算，而且还可用于流体力学等其他方面计算，它们除了参数与初、边值条件具有不同外，其基本运算方法都是一样的，因此，只需改变参数与初边值条件，即可应用“BT”法进行计算。

第一节 矩阵的基本知识

应用有限单元法解地下水不稳定流偏微分方程时，都归结为解一个线性代数方程组，而矩阵是解线性代数方程组的有力工具，故先简介如下：

一、矩阵的概念与表示法

矩阵不是一个数，而是按照一定方式排列的一组数的集合。

所谓一个 m 行 n 列的矩阵是指 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1$，2，……，m；$j=1$，2，……，n），按下面方式排成的阵势

$$[A]=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

简称为$m\times n$矩阵，并可简记为A。

上面矩阵中，每一横排称为行，每一纵排称为列，而a_{ij}表示矩阵中第i行第j列的元素。

当上面矩阵中的行数m与列数n相等时，称为方阵，如$n\times n$称为n阶方阵。

在n阶方阵中，如它们的对应元素分别相等（$a_{ij}=a_{ji}$）时，称为对称矩阵，对称阵一定是方阵。

对于对称矩阵，只要知道它的下（或上）三角阵元素（主对角线上和主对角线下诸元素）就可以运算了。

在n阶矩阵中，当主对角线的元素全是1，其余元素皆为零时，称为n阶单位矩阵，记为$[E]$。单位矩阵$[E]$在乘积中作用与数量乘1是一样的。

当元素全是零的矩阵称为零矩阵，记为$[0]$。

如将上述矩阵$[A]$中的行与列相互调换后所得的新矩阵，称为$[A]$的转置矩阵，记为$[A]^T$。

其转置规律：

1. $([A][B])^T=[B]^T[A]^T$；
2. $([A]^T)^T=[A]$；
3. $[A]^T=[A]$。　（对称矩阵）

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加减法

两个具有相同行数m与相同列数n的矩阵

$$[A]=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[B]=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots\cdots b_{mn} \end{bmatrix}$$

的和，就是其相应的元素各自相加所组成的矩阵

$$[C]=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\cdots\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

并记为 $[C]=[A]+[B]$

同理可得 $[C]=[A]-[B]$

2. 矩阵的乘法

两个矩阵$[A]$与$[B]$的乘法运算，必须要求第一个矩阵$[A]$的列数等于第二个矩阵$[B]$的行数。

如两个矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{k1} & b_{k2}\cdots\cdots b_{kn} \end{bmatrix}$$

相乘积，可得相乘后的矩阵

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots\cdots c_{mn} \end{bmatrix}$$

记为

$$[C]=[A][B]$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj};$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n。$$

矩阵相乘不适合下面交换律：

$$[A][B]\neq[B][A]$$

3．逆阵

数的乘法逆运算是除法，而矩阵乘法的逆运算是所谓逆阵。逆阵运算时，有关矩阵都是方阵。

设$[A]$为n阶方阵，如果存有矩阵$[B]$，使

$$[A][B]=[B][A]=[E]$$

成立，则说$[A]$是可逆的，称$[B]$为$[A]$的逆阵，记为$[A]^{-1}$。

例如：对于线性代数方程组

$$[A]\{x\}=\{F\}$$

如果$det[A]\neq0$，则系数矩阵$[A]$存有逆阵$[A]^{-1}$，则方程组有唯一解为

$$\{x\}=[A]^{-1}\{F\}$$

三、矩阵的分块

对于一个大矩阵，为了运算方便，可用一些纵向直线和横向直线把整个矩阵划分为许多小块矩阵，运算时，可把这

些小块矩阵当作上述矩阵中某个元素处理，这就是矩阵分块的方法。例如，矩阵〔A〕和〔B〕分块为

$$[A]=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]=[A_1 \; A_2]$$

$$[B]=\left\{\begin{array}{c}1\\0\\0\\ \hdashline 1\\1\end{array}\right\}=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}$$

其乘积

$$[A][B]=[A_1 A_2]\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}$$

$$=[A_1B_1+A_2B_2]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\2\end{Bmatrix}$$

四、矩阵的求导

1．设 $\{\alpha\}=[A]\{\delta\}$

其中 〔A〕是与 x，y 无关的系数矩阵；

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix};$$

$$\{\delta\}^T=[x\ y\ z]。$$

求导后可得

$$\frac{\partial\{\alpha\}}{\partial\{\delta\}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}\{\alpha\}^T=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}([A]\{\delta\})^T$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}\{\delta\}^T[A]^T$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x}&0&0\\[2ex]0&\dfrac{\partial y}{\partial y}&0\\[2ex]0&0&\dfrac{\partial z}{\partial z}\end{bmatrix}[A]^T$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}[A]^T=[E][A]^T$$

2．设 $\varphi=\{\delta\}^T[A]\{\delta\}$

其中 $[A]$为对称方阵；

$\{\delta\}$和$\{\delta\}^T$同前。

分开求导后，可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\{\delta\}}=\frac{\partial}{\partial\{\delta\}}\underbrace{(\{\delta\}^T[A]\{\delta\})}_{\varphi_1}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\{\delta\}}\underbrace{(\{\delta\}^T[A]\{\delta\})}_{\varphi_2}$$

第一部分为

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\{\delta\}}=\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{array}\right\}\left([x\ y\ z][A]\left\{\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right\}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}[A]\left\{\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right\}=[E][A]\{\delta\}$$

第二部分为

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\{\delta\}}=\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{array}\right\}\left([x\ y\ z][A]\left\{\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right\}\right)^T$$