〔美〕M.W.HIRSCH 和 S.SMALE 著

微分方程，动力系统和线性代数

上册

傑 刘世伟 合译

高等教育出版社

微分方程，动力系统和线性代数

上　册

［美］ M. W. HIRSCH
S. SMALE　著
黄傑　刘世伟　合译

高等教育出版社

本书是根据 M. W. Hirsch 和 S. Smale 所著的《Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra》(1974)一书译出的.全书共有十六章,中译本分上、下两册出版.上册主要内容:基本范例,牛顿方程和开普勒定律,具实特征值的常系数线性系统,具复特征值的常系数线性系统,线性系统和算子的标准型,收缩流和算子的属性,微分方程组的基本理论.

本书要求读者具有线性代数和多变量微积分的初步知识,可供理科各专业大学生、研究生及教师参考。

微分方程,动力系统和线性代数

上　册

[美] M. W. HIRSCH / S. SMALE 著

黄傑　刘世伟　合译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 6.625　字数 160,000

1986年6月第1版　1986年6月第1次印刷

印数 00,001—4,650

书号 13010·01088　定价 1.50 元

序 言

本书论述常微分方程动力学方面以及动力系统与纯数学以外某些领域之间的关系．由于有限维向量空间上线性算子的结构理论起着显著的作用，所以本书对这个问题作了独立自足的阐述．

理解本书所需的基础知识是多变量微积分．例如，S. Lang的《多变量微积分》到积分一章所包含的内容对理解本书大部分内容绰绰有余．另一方面，在第七章以后，我们引用了初等分析中的几个结果，如有关一致收敛的一些定理，对于这些定理只作叙述而不给证明．这些内容载于Lang的分析 I 中，我们对线性代数的论述是系统而独立自足的，尽管其最基本部分属于复习性质；无论如何，Lang的《多变量微积分》把这点初等线性代数讲得从容自如．

虽然本书对于具有一年坚实微积分基础的大学二年级学生就可使用，但本书主要是面向数学系及理科高年级学生的，也可以作为研究生的教程，特别是后面几章对研究生更为合适．

有人说常微分方程这一学科是求解的技巧和提示的汇集．并说它之所以重要是因为它能解决物理学，工程学等方面的问题．我们认为这一学科可以相当统一而连贯地进行阐述；本书就是试图这样做的．常微分方程对其他学科领域的重要性在于它能启发、统一并推动这些学科领域．书中关于“应用”的四章正是要做到这一点，不只是提供一些例题而已．此外，了解微分方程与其他学科之间是如何联系的，对于学生及数学工作者来说，是获得洞察力和启示的一种主要源泉．

本书的目的是阐述实笛卡儿空间 $\mathbf{R}^n$ 的开子集中非线性常微

分方程，使得推广到流形上是简单而自然的．我们主要论述自治系统，着重阐述解曲线的定性性质．有关解的稳定性及物理意义则渗透到本书的大部分论题之中，而象拉普拉斯变换，级数解法，斯图谟理论及特殊函数这些课题都略去了．

本书严谨性强，几乎每点都有证明．更重要的是舍弃了一些专门为某种目的而用的特殊方法．我们试图采用这样一些证明，它们既能加深对定理的理解，而它们本身也是很重要的方法．

为了使更多的人可以读懂这本书，我们没有引入流形；但本书的主要概念很容易转到流形上的动力系统上去．

前六章，特别是三—六章，对常系数线性微分方程组进行了相当细致而全面的研究．这个课题的内容几乎可与线性代数等同起来；因此这几章也构成了线性代数概要．代数的重点是特征向量及如何求特征向量．但我们远远超出了这一点，而讲述任意算子的"半单—幂零"的分解，继而阐述约当型及其实类比．对于那些与引用的定理关系不大的证明则放到附录中去讲．本书虽然无约束地用到了复空间，但我们最关心的是得到实空间的结果．这一观点，对微分方程来说是非常重要的，但在线性代数和微分方程教科书中不常见．

我们处理线性代数的方法是比较内蕴的，尽可能地不用坐标．但遇到计算或证明中需要坐标作工具时，则毫不犹豫地使用它们．我们没有讨论抽象的向量空间，而讨论 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 的线性子空间，这一小小的让步也许可使抽象的概念易于领悟．

借助代数理论我们给出了任意常系数线性微分方程的显式解的求法．并举了一些例子．特别是利用 $S+N$ 分解来计算一个任意方阵指数．

第二章独立于其他各章之外，它包含对开普勒行星轨道的初步的讨论．

关于常微分方程解的存在性、唯一性、和连续性的基本定理在第八章和第十六章中阐述. 由于本书的基本方向是根据研究动力系统，第八章只限于论述自治情况.

第十，十二和十四章分别对电路，人口理论和经典力学的数学模型作系统介绍. Brayton-Moser 电路理论是作为最近发展起来的在流形上较一般理论的特殊情况而提出的. 此外，对于物种竞争的 Volterra-Lotka 方程，连同它的某些推广一起作了分析. 在力学方面我们导出了保守系统的哈密顿形式体系，这个系统的构形空间是向量空间的开子集.

其余五章包含对非线性自治系统相图分析的有点份量的介绍. 其中包括对线性流的“属性”，李雅普诺夫稳定性及结构稳定性，Poincaré-Bendixson 理论，周期吸引子和扰动的讨论. 书末的后记指出了通向流形的途径.

下面的说明有助于读者确定读哪些章节和阅读顺序.

第一，二两章的内容是初等的，但这两章所介绍的很多概念在全书中将反复出现.

第三到第七章形成了一个有关联的单元，在那里相当详尽地阐述了线性理论. 第三，四，五章对线性算子和线性微分方程作了适当的介绍. 第六章的标准型理论是第七，九和十三章所证明的稳定性结果的基础；然而在第一次遇到这一份量很重的代数内容时，可以将它推迟而先承认其结果.

第八章所证明的解的存在性，唯一性和连续性贯穿(往往是隐含地)本书其他各部分. 根据读者的兴趣其证明可以省略.

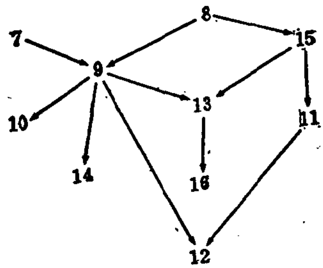
如果读者对非线性内容感兴趣又有一些线性理论的基础，那末就可以从第九章稳定性理论开始. 第十二章(生态学)，第十三章(周期吸引子)与第十六章(扰动)都密切依赖于第九章，而对偶向量空间和梯度这一节将使第十章(电路)和第十四章(力学)易于

理解.

第十二章也依赖于第十一章(Poincaré-Bendixson 理论);而第十一章第 2 节中有关局部截口的内容在第十三章和第十六章中将再次用到.

第十五章(非自治方程)是第八章的继续,并用于第十一,十三和十六各章;但初次读时可以省略.

后面几章之间的逻辑依赖关系可概括如下图:



本书的编写承蒙很多人给予支持与帮助.这里我们仅提四位. I. Workman 和 R. Suzuki 为我们精心打出手稿. D. Palais 提出了一些宝贵的意见. 特别要感谢 J. Palis,因为他仔细地审阅了手稿,发现了很多小错误,并提出一些具体的改进意见. Hirsch 教授对 Miller 学院在他编写本书的部分时间里所给的支持深为感谢.

目　　录

第一章 基本范例

这一短章的目的是导出微分方程的一些简单例题. 这些例题启发了今后对线性代数的讨论, 并给出常微分方程一些基本概念的初步脉络. 这些概念后面将作系统地阐述. 特别地, 这些例题本身又是第三章所讨论的那类微分方程的特殊情况. 本章内容是很重要的, 因为通过简单形式可以看到微分方程的一些最基本的概念.

§1 简 例

微分方程

$$\frac{dx}{dt}=ax \tag{1}$$

是最简单的也是最重要的一种微分方程. 首先要问, 这个方程的意义是什么? 这里 $x=x(t)$ 是实变量 t 的未知实值函数, 而 dx/dt 是它的导数(我们也用 x' 或 $x'(t)$ 表示导数). 这个方程告诉我们, 对于每个 t 值等式

$$x'(t)=ax(t)$$

成立. 这里 a 表示常数.

由微积分可得(1)的解: 若 K 是任意常数(实数), 则函数 $f(x)=Ke^{at}$ 是一个解, 因为

$$f'(t)=aKe^{at}=af(t).$$

此外, 再没有其他解. 为了说明这一点, 设 $u(t)$ 为任一解, 并计算 $u(t)e^{-at}$ 的导数:

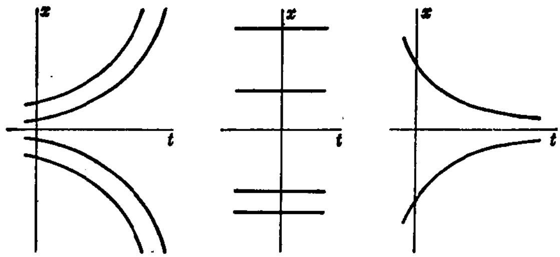


图 A

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{-at})=u'(t)e^{-at}+u(t)(-ae^{-at})$$
$$=au(t)e^{-at}-au(t)e^{-at}=0.$$

因此 $u(t)e^{-at}$ 是常数 K，故 $u(t)=Ke^{at}$. 这就证明了我们的论断.

如果在某点 t_0 处指定解的值为 u_0，那么解中的常数 K 就完全确定了. 假定对满足(1)的函数 $x(t)$ 要求 $x(t_0)=u_0$，则 K 必满足 $Ke^{at_0}=u_0$，因而方程(1)有满足给定的初始条件 $x(t_0)=u_0$ 的唯一解. 为简单起见，常取 $t_0=0$；于是 $K=u_0$. 取 $t_0=0$ 并不失一般性，因为若 $u(t)$ 是一个满足 $u(0)=u_0$ 的解，则函数 $v(t)=u(t-t_0)$ 是一个满足 $v(t_0)=u_0$ 的解.

通常把(1)写成初始值问题的形式:

(2) $$x'=ax,\quad x(0)=K.$$

(2)的解 $x(t)$ 不但必须满足条件(1)，而且必须在 $t=0$ 时取指定的初始值 K. 前面我们已证过初始值问题(2)有唯一解.

方程 $x'=ax$ 中的常数 a 可以看成一个参数. 如果 a 改变，则方程及其解也改变. 我们是否可以定性地描述解的变化情况呢?

在这里 a 的符号具有决定性的作用:

若 $a>0$,则当 $K>0$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty} Ke^{at}=\infty$,

当 $K<0$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty} Ke^{at}=-\infty$;

若 $a=0$,则 $Ke^{at}=$常数;

若 $a<0$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} Ke^{at}=0$.

通过作出解的图形(图 A)可以生动地说明解的定性性质. 书中的一些图形是按典型的习惯作法画出的. 这些图形只说明性质上的特征,在定量细节上可能不太精确.

若 $a\neq0$, 在某种意义上方程 $x'=ax$ 是稳定的. 更精确地说,若用充分接近 a 的另一常数 b 代替 a, 解的性态不变. 例如, 若 $|b-a|<|a|$,则 b 和 a 同号. 但如果 $a=0$,在此情况下 a 的微小改变都会导致解的性态发生根本的变化. 因此,也可以说 $a=0$ 是方程 $x'=ax$(a 在 $\mathbf{R}$ 中)的单参数族的歧点.

其次考虑两个未知函数的两个微分方程的方程组:

(3)
$$x_1'=a_1x_1,$$
$$x_2'=a_2x_2.$$

这是一个很简单的方程组,稍后我们可以看到,许多更复杂的两个方程的方程组都可以简化为这种形式.

由于两个未知函数 $x_1(t)$和 $x_2(t)$之间没有指定的关系, 因此它们是"非耦合"的,在此情况下, 我们可以直接写出((1)的)所有的解:

$$x_1(t)=K_1\exp(a_1t),\qquad K_1=\text{常数},$$
$$x_2(t)=K_2\exp(a_2t),\qquad K_2=\text{常数}.$$

如果给定了初始条件 $x_1(t_0)=u_1, x_2(t_0)=u_2$,则 K_1 与 K_2 就可以确定. (有时我们把 e^a 写作 $\exp a$.)

现在我们从几何观点来看方程(3),我们把函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 看作(x_1,x_2)平面 $\mathbf{R}^2$ 上一条待求的曲线 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$. 就

是说，x 是实数集 $\mathbf{R}$ 映入 $\mathbf{R}^2$ 的映射，$x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$. (3)的左端表示曲线的切向量 $x'(t)=(x_1'(t),x_2'(t))$. 用向量符号表示，则有

(3′) $$x'=Ax,$$

其中 Ax 表示向量(a_1x_1,a_2x_2)，把它看作是起点在 x 的向量.

初始条件的形式为 $x(t_0)=u$，其中 $u=(u_1,u_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个给定点. 从几何上说，就是当 $t=t_0$ 时，曲线要经过给定点 u.

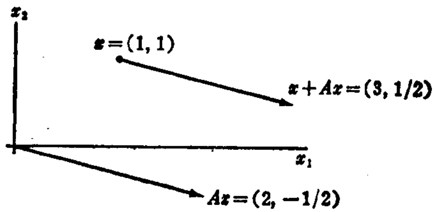


图 B

映射(即函数)$A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$(或 $x\to Ax$)可以看成是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个向量场. 即对于平面上每一点 x 都给定一个向量 Ax. 为了直观，我们作"以 x 为起点"的向量 Ax；就是说在 x 处给定一条从 x 到 $x+Ax$ 的有向线段. 例如，若 $a_1=2,a_2=-\dfrac{1}{2}$，且 $x=(1,1)$，则在$(1,1)$处，作一个从$(1,1)$指向$(1,1)+\left(2,-\dfrac{1}{2}\right)=\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$的箭号(图B). 若 $Ax=\left(2x_1,-\dfrac{1}{2}x_2\right)$，我们就对平面上的每一点都加上一个箭号，箭尾在 x 处而箭头在 $x+Ax$ 处，于是得到图C中的图形.

求微分方程(3)或(3′) 满足初始条件当 $t=0$ 时为(u_1,u_2) 的解，就是求平面上满足(3′)且当 $t=0$ 时通过 $u=(u_1,u_2)$ 的曲线. 在图D中，我们画出了几条解曲线.

平凡解$(x_1(t),x_2(t))=(0,0)$也可以看作一条"曲线".

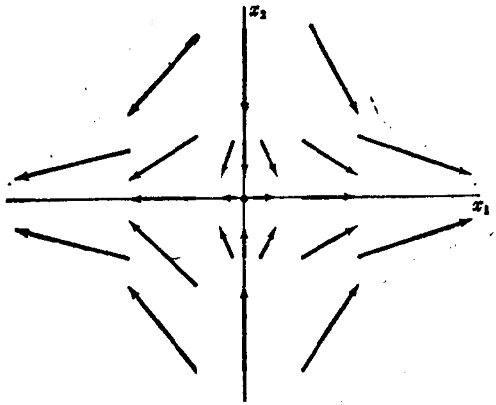


图 C $Ax=\left(2x_1, -\frac{1}{2}x_2\right)$

全部解曲线所组成的曲线族是 $\mathbf{R}^2$ 的子集，它叫做方程(3)(或(3′))的“相图”.

1 维方程 $x'=ax$ 也有几何解释：它的相图如图 E 所示. 应该把它和图 A 比较一下. 所画的 (1) 的图形及 (3) 的解曲线要清楚

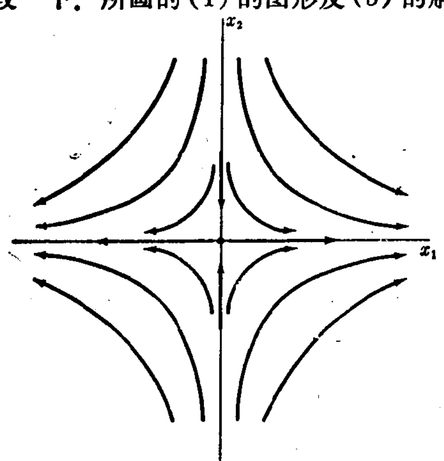


图 D $x'=Ax$ 的一些解曲线，$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

些，因为 2 维图形比 1 维图形或 3 维图形要好一些．(3)的解的图象要求 3 维图形，请读者画出！

把方程(3)看成一个动力系统．就是将自变量 t 看作时间，将解曲线 $x(t)$ 看作平面 $\mathbf{R}^2$ 内某质点运动的路径．我们可以设想当时间 $t=0$ 时，质点位于平面 $\mathbf{R}^2$ 任意点 $u=(u_1,u_2)$ 处．随着时间推移，质点沿着满足初始条件 $x(0)=u$ 的解曲线而运动．在以后的任意时刻 $t>0$ 质点将处于另一位置 $x(t)$．而在较早的时刻 $t<0$ 质点位于 $x(t)$．我们用 $\phi_t(u)$ 表示位置与 t 和 u 的依赖关系．于是有

$$\phi_t(u)=(u_1\exp(a_1t),u_2\exp(a_2t)).$$

我们可以设想位于平面上每一点处的质点全部同时运动起来(如尘点被平稳的风吹动)．在这种意义下，我们把解曲线称为轨线或轨道．对 $\mathbf{R}$ 中每个固定的 t 有一个变换，它使平面内每一点 u 对应该平面上另一点 $\phi_t(u)$．用 $\phi_t:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 表示这个变换，显然它是一个线性变换，即对于所有的向量 u,v 和所有的实数 λ，有

$$\phi_t(u+v)=\phi_t(u)+\phi_t(v),$$

及

$$\phi_t(\lambda u)=\lambda\phi_t(u).$$

$a>0$　　　　$a<0$

图 E

随着时间的推移，平面上每点同时沿着通过该点的轨线而运动．这样，映射 $\phi_t:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，$t\in\mathbf{R}$ 的总体就是一个变换的单参数族．这个族叫做流或动力系统或由向量场 $x\to Ax$ 所确定的 $\mathbf{R}^2$，它还等价于系统(3)．

对应于方程(1)在实直线 $\mathbf{R}$ 上的动力系统特别容易描述：若 $a<0$，当时间向∞变化时，所有的点朝着 0 而移动；若 $a>0$，除 0 以外的所有点都离开 0 向±∞移动；若 $a=0$，则所有的点都不动．

我们从一个微分方程出发得到了动力系统 ϕ_t．在第八章可

以看到这一过程是由常微分方程的基本定理所确定的.

以后我们还要把这个过程反转过来: 从动力系统 ϕ_t 得出微分方程(简单地将 $\phi_t(u)$对 t 求导).

用简单非耦合形式(3)给出的微分方程是很少的. 例如,考虑方程组

$$
x_1' = 5x_1 + 3x_2,\quad x_2' = -6x_1 - 4x_2 \tag{4}
$$

或用向量符号表示,

$$
x' = (5x_1 + 3x_2, -6x_1 - 4x_2) \equiv Bx. \tag{4'}
$$

我们的处理方法是找出一个线性的坐标变换把(4) 转换为非耦合的形式或对角的形式. 实际上新坐标(y_1, y_2) 正起这个作用. 其中

$$
y_1 = 2x_1 + x_2,
$$
$$
y_2 = x_1 + x_2.
$$

(第三章将说明这些新坐标是如何找出的.)用 y 表 x,有

$$
x_1 = y_1 - y_2,
$$
$$
x_2 = -y_1 + 2y_2.
$$

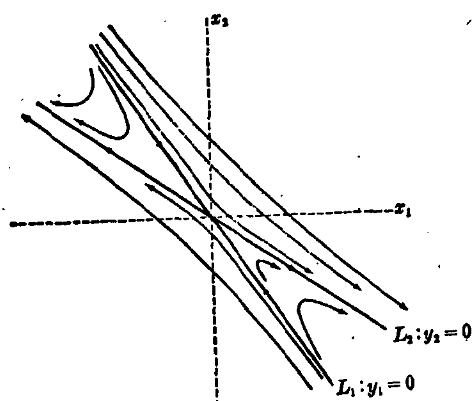


图 F

为了求 y_1', y_2'，对定义 y_1, y_2 的方程求导，得

$$y_1' = 2x_1' + x_2',$$
$$y_2' = x_1' + x_2'.$$

通过代换，得

$$y_1' = 2(5x_1 + 3x_2) + (-6x_1 - 4x_2) = 4x_1 + 2x_2,$$
$$y_2' = (5x_1 + 3x_2) + (-6x_1 - 4x_2) = -x_1 - x_2.$$

由另一代换得

$$y_1' = 4(y_1 - y_2) + 2(-y_1 + 2y_2),$$
$$y_2' = -(y_1 - y_2) - (-y_1 + 2y_2),$$

或

$$y_1' = 2y_1, \qquad (5)$$
$$y_2' = -y_2.$$

最后的方程是对角形的，我们已解过这类方程组. 满足 $(y_1(0), y_2(0)) = (v_1, v_2)$ 的解 $(y_1(t), y_2(t))$ 是

$$y_1(t) = e^{2t} v_1,$$
$$y_2(t) = e^{-t} v_2.$$

图D中明显地画出了方程组(5)的相图. 只要在 (x_1, x_2) 平面上简单地描出新坐标轴 $y_1 = 0, y_2 = 0$，并且在这个新坐标系内画出轨线 $y(t)$ 就可以得到原方程组(4)的相图. 这样，$y_1 = 0$ 是直线 $L_1: x_2 = -2x_1$；$y_2 = 0$ 是直线 $L_2: x_2 = -x_1$.

于是我们得到如图F所示(4)的相图. 应该把它和图D进行对照.

(4)的解式可以由以下代换得到. 设 (u_1, u_2) 为(4)的解 $(x_1(t), x_2(t))$ 的初始值 $(x_1(0), x_2(0))$. 对应于 (u_1, u_2) 的是(5)的解 $(y_1(t), y_2(t))$ 的初始值 (v_1, v_2)，其中

$$v_1 = 2u_1 + u_2,$$
$$v_2 = u_1 + u_2.$$