全国高等教育自学考试

理工类

活页文丛

复变函数与积分变换

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

中国人民大学出版社

全国高等教育自学考试

活 页 文 丛

（理工类）

复变函数与积分变换

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/全国高等教育自学考试指导委员会 组编.
北京：中国人民大学出版社，2001.
（全国高等教育自学考试活页文丛. 理工类）

ISBN 7-300-03652-X/G·749
Ⅰ. 复…
Ⅱ. 全…
Ⅲ. ①复变函数-高等教育-自学考试-自学参考资料
②积分变换-高等教育-自学考试-自学参考资料
Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 57295 号

全国高等教育自学考试
活页文丛（理工类）
复变函数与积分变换
全国高等教育自学考试指导委员会　组编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：三河市新世纪印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：3.625
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
字数：70 000

定价：7.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

凡参加高等教育自学考试者，都希望自考教材能够跟上时代的变化与发展，反映学科的新成果、新动态，提供与现实生活和工作密切相关的信息。我们也一直在朝这个方向努力。但我们面临着来自两个方面的挑战：一方面，教材的编写、出版、供应等环节都需要一定的时间。一般说来，一本教材从确定编写到首次应用至少需要两年左右。况且，多数教材都不可能仅使用一两次就立即修改或重编。另一方面，社会生活变化迅速，科技发展日新月异，这给我们保持与社会、科技发展变化同步带来极大的困难。教材的相对稳定性与时代变化的快速性形成了矛盾，客观上形成了我们的教材不能满足考生需要的问题。经过广泛的调查研究，我们终于找到了弥补的办法：在教材未修订、重编期间，编纂《全国高等教育自学考试活页文丛》，把与教材密切相关且已变化很大的、达到自考质量标准又必不可少的内容及时地提供给广大考生。

在全国统一命题中，这些变化也将引起注意。希望考生在学习课程大纲和教材时也要重视学习相应的《全国高等教育自学考试活页文丛》。应当指出，这并没有增加考生的学习负担，因为我们或者用新内容取代了教材中相应的内容，或者对原有的内容仅作了有限的补充。为帮助考生学习，我们还在《全国高等教育自学考试活页文丛》中开辟了学习指导与自测练习专栏。

把学校办在自学者的家中，把成才之路铺到自学者的脚下，是我们的根本宗旨。欢迎考生、自考工作者和每一位关心自考工作的有识之士提出意见和建议，为办好《全国高等教育自学考试活页文丛》共同努力。

全国高等教育自学考试指导委员会

全国高等教育自学考试活页文丛

目 录

全国高等教育自学考试活页文丛

活页文丛编辑部

主　编
刘长占
周蔚华

副主编
王建民
陈　卫
费小琳

本册主编
汤新国

一、基本内容和基本要求

“复变函数与积分变换”是一门数学基础课．本课程是为全国高等教育自学考试工科类各专业而设置的，为学习工程力学、电工学、电磁学、振动力学、电子技术、自动控制以及无线电技术等课程奠定必要的基础．自学教材为全国高等教育自学考试指导委员会指定的、由上海交通大学贺才兴教授编著的《复变函数与积分变换》，由辽宁大学出版社出版．书中附有自学考试大纲．

1．基本内容

《复变函数与积分变换》教材包含复变函数与积分变换两部分内容．第一部分，**复变函数**是研究自变量和函数皆为<u>复数</u>的分析课程，因此，它与自变量和函数皆为<u>实数</u>的微积分学在某些方面有许多直接的联系．注意到这一联系，常给我们的学习带来许多方便．复变函数研究的中心内容是解析函数．解析函数的定义和判别、解析函数中实部和虚部的联系（第一篇第二章），解析函数的积分性质（第三章），解析函数的级数展开（第四章）是解析函数的基本理论部分．留数的计算和留数定理的应用（第五章）及保角映射（第六章）是复变函数特有的问题，它们是解析函数基本理论的综合应用．第二部分，**积分变换**是把一个函数通过积分运算变为另一个易于处理的函数．本课程只介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换，它们的定义、性

质、反演，以及应用它们去求解微分方程、积分方程及计算积分（第二篇的第一、二章）.

2．基本要求

通过学习好这门课程，切实掌握本课程有关内容的基本概念、基本理论和基本方法，具有比较熟练的运算能力和初步解决实际问题的能力，并注意培养抽象思维能力与一定的逻辑推理能力，这是本门课程的基本要求.

3．学习中应注意的学习方法

在学习教材内容时应注意以下几点：

（1）在学习每一章之前，请先阅读教材所附的《自学考试大纲》有关这一章的学习目的、要求、考核知识点和考核要求，预知这章的重点、难点，做到心中有数.

（2）在阅读教材时，要做到认真研读、仔细推敲，既动脑又动手. 对基本概念要深刻理解；对基本理论及其包含的定理要彻底弄清；对基本方法要牢固掌握. 要做到这一点，必须既动脑又动手. 在动脑方面，例如，在学习某些基本概念时，可与相关概念作比较，弄清它们之间有何联系又有何区别；又例如，对定理必须弄清它的条件和结论，才能正确运用定理解决问题；再如，对基本理论和基本定理提供的基本方法要归纳、联系和比较. 在动手方面，要把教材中的定理证明、公式推导、例题计算独立地再证明、推导和演练一遍，以便掌握关键、加深理解和提高运算能力.

（3）必须认真做作业. 这是巩固和提高学习质量与能力的

不可替代的重要环节．做题要达到：步骤清楚、运算准确、书写整洁、结果明确．教材中每章都有习题，可供一般做作业之用．做作业可随学习的内容一部分一部分去做，也可学完一章以后再做．每章之后附有“自我检查题”，可在做完一般作业以后，闭卷并独立完成，以便检验阶段学习效果．

下面，准备结合各章内容，对其重点难点问题作一些提醒和剖析，有些还用例题加以说明．

二、复　数

1．主要内容

复数的三种表示法，复数的运算和复平面上的点集、曲线与区域．

2．难点

复数的运算；用复数方程或等式表示曲线；用复数不等式表示区域．

3．提醒和剖析

(1) 复数运算的难易往往与复数的三种表示式有关

复数的三种表示式：

$z=x+\mathrm{i}y$　（用实部 $\mathrm{Re}z=x$，虚部 $\mathrm{Im}z=y$ 表示的，可称为代数表示式）

$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$　（用模 r 和辐角 θ 表示的指数表示式）

$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$　（三角表示式）

三角表示式通过欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 把代数表示式和指数表示式联系起来. 这里的难点是辐角的把握.

$$\theta=\operatorname{Arg}z=\arg z+2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$\arg z$ 为辐角的主值，其范围为

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

$\arg z$ 是单值的，而 $\operatorname{Arg}z$ 则是多值的（相差 2π 的整倍数）. $\arg z$ 与 $\arctan(y/x)$主值的关系和复数在复平面上的所在象限有关.

要确定一个复数，需要知道实部和虚部，或者模和辐角（0 除外，因 0 的模为 0、其复角为任意值；∞点也除外，因它的模为无穷、其辐角为任意值).

进行复数运算，包括加、减、乘、除、乘方、开方及取复数共轭，其难易程度往往与复数的三种表示式有关. 例如，复数的加、减，用代数式方便些，因可以直接对实部和虚部相加、减. 对复数的乘、除、乘方、开方（开方应注意多值性)，则用指数表示式方便些，因为可直接对模进行乘、除、乘方、开方. 而对辐角进行加、减、乘、除，对于取复数共轭，各种表示式都很方便.

(2) 复平面上的曲线

复平面上的曲线和在 $x-y$ 平面上的函数曲线是一样的，只是表达方式不一样而已. 它们之间的关系是

$$x=\operatorname{Re}z,y=\operatorname{Im}z \text{ 或 } x=(z+\bar{z})/2,y=(z-\bar{z})/2.$$

例：求 $\operatorname{Im}z^2=2$ 所表示的曲线.

解：

设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，

$\mathrm{Im}z^2=2xy=2$ 即 $xy=1$ 或 $y=1/x$，这是等轴双曲线.

对含参数的方程，可把参数化去，变为 z 或 x，y 表达的方程；或者相反，把用 z 或 x，y 表达的方程化为用参数表示的方程.

对于最简单的曲线方程应当熟练地掌握 $\mathrm{Im}z=a$ 是通过 $z=a\mathrm{i}$ 的水平直线；$\mathrm{Re}z=a$ 是通过 $z=a$ 的竖直直线；$\arg(z-b)=\alpha$ 是从 b 点出发的射线，它与 x 轴的夹角为 α；$|z-a|=R$ 是以 $z=a$ 为心、以 R 为半径的圆周. $|z-a|=|z-b|$ 是 a、b 两点连线的垂直平分线. 复杂一些的有二次曲线：椭圆、双曲线及抛物线等.

(3) 区域

在概念方面，应弄清区域的定义、有界区域和无界区域、单连通区域和多连通区域及区域边界的正向和反向等.

区域的表示是用复数不等式（如加上等号则包含边界）表达的. 一般的规则是先定边界再定区域. 例如，$\mathrm{Re}z<0$，先定边界 $\mathrm{Re}z=0$ 为 y 轴，再定区域 $\mathrm{Re}z<0$ 为左半平面. 类似地有：$\mathrm{Re}z>0$ 为右半平面，$\mathrm{Im}z>0$ 为上半平面，$\mathrm{Im}z\leqslant 0$ 则是下半平面并包含边界正负实轴.

还有条形区域：$a<\mathrm{Re}z<b$ 或 $a<\mathrm{Im}z<b$；圆形区域：$|z|<R$（内部），$|z|>R$（外部）；角形区域：$\alpha<\arg z<\beta$.

较复杂的有两个或多个复数不等式所表达的区域：如两圆之间的区域：$|z-1|<1$，$1/2<|z-1/2|$；如圆和两直线间的区域：$|z|<2$，$\mathrm{Im}z<1$，$\mathrm{Im}z>-1$ 等.

三、解析函数

1. 主要内容

解析函数的定义；解析函数的判别和柯西－黎曼条件（即 C-R 条件）；解析函数和调和函数的关系；几个典型的解析函数—初等函数.

2. 难点

解析函数的判别；已知调和函数求其共轭调和函数.

3. 提醒和剖析

(1) 有关解析函数的定义

在某一点上，复变函数可导要比实变函数可导的条件更加严格；**解析**函数的条件又比复变函数可导的条件更严格. 这是因为：在求导的取极限过程中，只要左、右极限存在并相等，则认为实变函数可导；对于复变函数，除了左、右极限外，在复平面上任何路径的极限都存在并相等，才能认定复变函数可导；而对于解析函数，不仅该点可导，而且在该点的邻域处处可导. 正因为解析函数的条件最严格，它具有许多实变函数和一般复变函数所没有的良好的性质. 如：解析函数存在 C-R 条件；其实部和虚部是共轭调和函数；某一点处解析函数的值

与包围这点的简单曲线上的函数值有密切关系（即柯西积分公式）；解析函数有任意阶的高阶导数（这点在解析函数作泰勒级数展开时就不必像实变函数那样，必须假定各阶导数存在了）等.

对于一个区域而言，复变函数在区域内处处可导等价于在此区域内的解析函数.

（2）解析函数的判别及 C-R 条件

对于一个复变函数在哪些地方可导、解析的判别，这是学习以解析函数为中心内容的复变函数必须掌握的. 判别方法有二：

1）按定义判别：直接对复变函数对复变量求导数. 如果导数在某一点上存在，则函数在那一点上可导；如果导数在某一曲线上存在，则函数在那一曲线上可导（注意：直线上各点没有处处可导的邻域，因此，不能说“在直线上解析”）；如果导数在某一区域中存在，则函数在那一区域中解析.

2）按定理判别：按判别函数是否可导的充分必要条件的定理，求其实部和虚部的一阶偏导数，看这些偏导数是否连续，而且满足 C-R 条件. 如果这两个条件在某一点、某一曲线上成立，则函数在那点、那曲线上可导；如果这两个条件在某一区域中成立，则函数在此区域中解析.

在这两个方法中，常用的是按定理判别，因而要求必须掌握，其条件之一的 C-R 条件（是解析函数的必要条件而不是充分条件）在解析函数理论中具有重要的地位. 另外，在

解析函数中，已知其实部（或虚部）求其虚部（或实部），从而求得解析函数，这过程中 C-R 条件也起了重要的作用.

例 1：试判别函数$f(z)=e^{iz}$的解析性.

解：这题按定义判别比较方便，

$f'(z)=ie^{iz}$，在全平面存在，因而$f(z)$在全平面解析.

例 2：试判别函数$f(z)=(x-y)^2+2i(x+y)$的解析性.

解：$\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)=(x-y)^2$，$\mathrm{Im}f(z)=v(x,y)=2(x+y)$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-y),\frac{\partial u}{\partial y}=-2(x-y),\frac{\partial v}{\partial x}=2,\frac{\partial v}{\partial y}=2,$$

若满足 C-R 条件时有

$$2(x-y)=2,-2(x-y)=-2,\Rightarrow y=x-1$$

在直线 $y=x-1$ 上，四个偏导数连续，因此，$f(z)$在 $y=x-1$上可导，而在全平面不解析.

(3) 求共轭调和函数

满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数. 解析函数的实部和虚部是一对共轭调和函数（即满足 C-R 条件的一对调和函数）. 如果已知其中之一，通过 C-R 条件，可求出另一个，从而求出解析函数. 求解的方法有多种，现以例子来介绍.

例：已知解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部$u(x,y)=2xy$，求$f(z)$.

解：下面介绍三种方法.

1）先求导数法：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \text{根据 C-R 条件} \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \text{有}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=2y-\mathrm{i}2x=-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)=-\mathrm{i}2z,$$

由此而得

$$f(z)=-\mathrm{i}z^2+c \quad (c \text{ 为任意常数}).$$

2）全微分法：

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\ &= \int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) \quad (\text{由 C-R 条件得出}) \\ &= \int(-2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y) \\ &= \int\mathrm{d}(-x^2+y^2)=-x^2+y^2+c'. \end{aligned}$$

得 $f(z)=2xy+\mathrm{i}(-x^2+y^2)+c=-\mathrm{i}z^2+c.$

3）分步求积法：

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\phi(y)=\int-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\phi(y),$$

这里用了 C-R 条件中的一个条件 $\partial v/\partial x=-\partial u/\partial y$. 以 $\partial u/\partial y=2x$ 代入，得

$$v(x,y)=\int(-2x)\mathrm{d}x+\phi(y)=-x^2+\phi(y).$$

再用 C-R 条件的另一个条件：

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \Rightarrow\phi'(y)=2y, \quad \Rightarrow\phi(y)=y^2+c',$$

$$v(x,y)=-x^2+y^2+c',\quad \Rightarrow f(z)=-\mathrm{i}z^2+c.$$

以上三种方法中比较常用且有效的为方法 3)，因为 C-R 条件分步应用，难点分散，因此要求能熟练掌握；先求导数法 1)，对于解析函数是多项式时，可能会方便些，因多项式的导数总比该多项式低一次方；而全微分法 2)，如果可直接看出是某一解析函数的全微分，此法也是可用的.

(4) 初等函数—解析函数的一些常用函数

要熟练地掌握指数函数（e^z、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 等)、对数函数（$\mathrm{Ln}z$、$\ln z$)、幂函数（$z^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}$，其中 $\alpha=n$、$-n$、$1/n$，而 n 为整数)、三角函数（$\sin z$、$\cos z$、$\tan z$、$\cot z$、$\sec z$、$\csc z$）的解析区域、各种性质；对于多值函数的 z^α（α 为复数)、反三角函数（$\mathrm{Arcsin}z$、$\mathrm{Arccos}z$、$\mathrm{Arctan}z$）的性质也要有所掌握. 对这些函数的掌握程度将影响下面对解析函数各性质、保角映射等内容的学习.

四、复变函数的积分

1. 主要内容

复变函数的积分；柯西定理及原函数；柯西积分公式及高阶导数的积分公式.

2. 难点

复变函数的积分.

3. 提醒和剖析