

YINGYONG
Shuxue



教育部 高职高专 规划教材
五年制 高等职业教育 适用

应用数学 基础

中 册

主审：袁震东
主编：邓俊谦

全国五年制高等职业教育公共课开发指导委员会组编



6



华东师范大学出版社

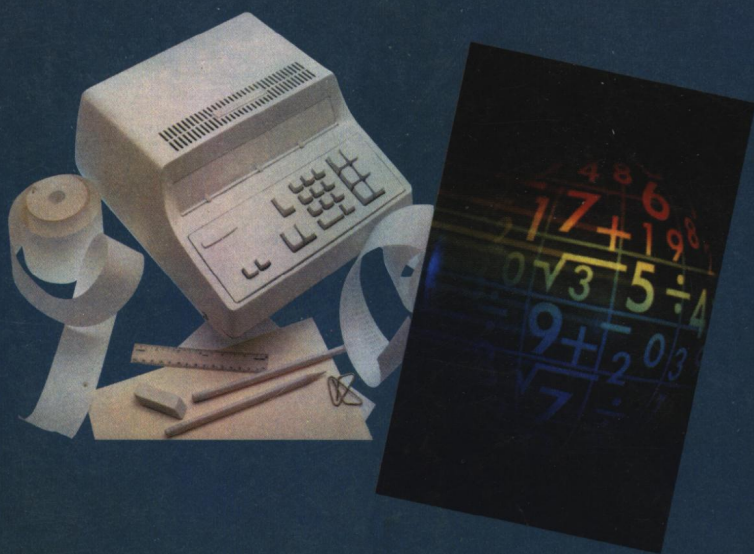
应用数学基础 是教育部第一套五年制高等职业教育数学公共课教材，填补了该项目的空白。

教材根据五年制高等职业教育数学基本要求和课程标准，在总结了多年的教改和教学经验的基础上编写而成。

教材根据五年一贯制的特点和学生年龄小、可塑性强的优势，合理设计，统筹安排，体现了五年制高职教材的特色。

教材突出了“立足实用，打好基础，强化能力”的高职公共课教学原则。

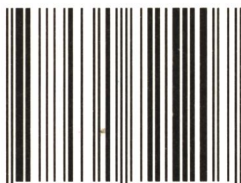
教材注重科学性、趣味性、前瞻性，强调实用性和实践性。



五年制高职高专
公共课教材:

实用语文
应用数学基础
技术物理基础
实用化学基础
计算机文化基础

ISBN 7-5617-2520-5



9 787561 725207 >

0·101 定价: 30.00 元

教育部高职高专规划教材
五年制高等职业教育适用

应用数学基础

(中 册)

全国五年制高等职业教育公共课开发指导委员会组编

主 审 袁震东
主 编 邓俊谦

华 东 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础. 中册/邓俊谦主编. —上海: 华东师范大学出版社, 2001

ISBN 7-5617-2520-5

I. 应... II. 邓... III. 应用数学-高等学校: 技术学校-教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 05265 号

教育部高职高专规划教材

五年制高等职业教育适用

应用数学基础(中册)

全国五年制高等职业教育公共课开发指导委员会组编

主 审 袁震东

主 编 邓俊谦

责任编辑 程丽明

封面设计 陆震伟

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

发行部 电话 021 - 62571961

传真 021 - 62860410

网 址 WWW.hdsdbook.com.cn

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮 编 200062

照 排 南京理工排版校对有限公司

印 刷 者 江苏扬中市印刷厂

开 本 787 × 1092 16 开

印 张 26.5

字 数 306 千字

版 次 2001 年 3 月第一版

印 次 2001 年 6 月第二次

印 数 16 001 - 27 000

书 号 ISBN 7-5617-2520-5/O·101

定 价 30.00 元

出 版 人 朱杰人

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划利用2—3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有关问题;然后再用2—3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000年4月3日

前言

这套教材是国家教育部五年制高等职业教育规划教材.《应用数学基础》是五年制高等职业教育各专业必修的一门公共课程,是学生提高文化素质和学习有关专业知识的重要基础.本教材的编写以高等职业教育的培养目标为根本依据,遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则.本教材的内容与九年义务教育三年制初中数学相衔接.内容的编写充分注意了五年制高职学生的年龄特点和认知水平,尽量做到由浅入深、由易到难、由具体到抽象、通俗直观、循序渐进.

《应用数学基础》这套书共分上、中、下三册.本书为中册,内容包括:数列;函数的极限;导数与微分;导数的应用;积分;积分的应用;排列组合与概率初步等七章.

上、中册中,标有※号的部分是供选用的,下册各章为不同专业根据需要选学的内容.三册书的总学时数为354(包括标※号的,但不含习题课、实验课等),其中上册为116,中册为102,下册为136.

本书中的每一节,一般都在主要知识点后或这一节后配有“练习”题,供课堂练习选用.每一节后配有“习题”,供课后作业选用.每一章后面都配有“复习题”,供复习本章时选用.每一章后都有本章小结,包括本章的主要内容和应注意的问题,供复习这一章时参考.每章都安排了一或两篇“阅读材料”,供课后学生阅读,以调动学习兴趣和情感、拓宽视野、强化应用能力.

本书在上册已开始渗透数学建模的基础上,给出了数学模型的概念,并逐步加强了数学模型的意识与数学建模方法的渗透.

本书后面还安排了以 Mathematica 为主要工具的数学实验,以培养学生利用现代技术工具解决数学问题的能力.

第十章 数 列

§ 10-1 数列	(3)
§ 10-2 等差数列	(8)
§ 10-3 等比数列	(15)
§ 10-4 数列的极限	(21)
阅读材料(一) 斐波那契数列	(30)
(二) 住房贷款分期偿还的数学模型 ..	(32)
本章小结	(36)
复习题十	(37)

第十一章 函数的极限

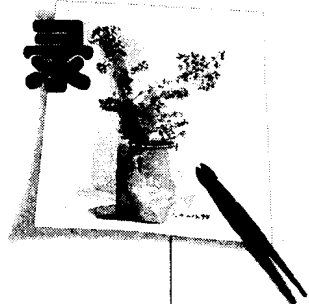
§ 11-1 初等函数	(41)
§ 11-2 函数的极限	(56)
§ 11-3 无穷小与无穷大	(64)
§ 11-4 两个重要极限	(70)
§ 11-5 初等函数的连续性	(75)
§ 11-6 二分法	(84)
阅读材料 一个重要而又令人困惑的量	(89)
本章小结	(91)
复习题十一	(95)

第十二章 导数与微分

§ 12-1 导数的概念	(101)
§ 12-2 函数的和、差、积、商的求导法则	(113)
§ 12-3 复合函数的求导法则	(117)
§ 12-4 隐函数的求导法则	(120)
§ 12-5 二阶导数	(125)
§ 12-6 由参数方程表示的函数的导数	(128)



目





§ 12-7 微分	(130)
* § 12-8 曲率	(137)
§ 12-9 用切线法求方程的近似根	(143)
阅读材料 微积分学的奠基人	(147)
本章小结	(150)
复习题十二	(152)

第十三章 导数的应用

§ 13-1 拉格朗日中值定理	(157)
§ 13-2 函数单调性的判别法	(159)
§ 13-3 函数的极值和最值	(162)
§ 13-4 曲线的凹凸性、拐点及渐近线	(168)
§ 13-5 函数图象的描绘	(173)
§ 13-6 最值问题应用举例	(176)
阅读材料 洛必达法则	(181)
本章小结	(186)
复习题十三	(188)

第十四章 积 分

§ 14-1 定积分的概念	(193)
§ 14-2 牛顿-莱布尼兹公式	(209)
§ 14-3 基本积分公式和运算性质	(217)
§ 14-4 换元积分法	(226)
§ 14-5 分部积分法	(237)
§ 14-6 数值积分法	(243)
§ 14-7 无限区间上的广义积分	(249)
阅读材料 思考问题要“不拘一格”	(253)
本章小结	(255)
复习题十四	(258)

第

十

章

数 列

应用数学基础

在本册书中,首先,我们在已有函数的基础上,学习数列与极限的知识;然后逐步学习一元函数的导数、微分与积分的概念及应用;最后,将学习排列组合与概率初步.本册一共七章,其中第十一章至第十五章所涉及的一元函数微积分是高等数学的基石与核心.

在本章中,我们将学习数列与数列的极限.

§ 10-1 数 列

一 数列的概念

《庄子·天下篇》中有一句脍炙人口的话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”意思是:一根一尺长的木棒,每天截取一半,永远截不完.我们把每天截取的长度列出,即:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots, \frac{1}{2^{100}}, \cdots; \quad (1)$$

可以看作是函数 $f(n) = \frac{1}{2^n}$, 当 $n = 1, 2, 3, 4, \cdots, 100, \cdots$ 时所对应的一系列函数值.

又如:自然数按从小到大顺序排出,即:

$$0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 99, \cdots; \quad (2)$$

可以看作是函数 $f(n) = n - 1$, 当 $n = 1, 2, 3, 4, \cdots, 100, \cdots$ 时所对应的一系列函数值.

对于(1)、(2)这样按照一定顺序列出一串数,我们给出以下定义:

定义 1 以正整数集(或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$)为定义域的函数 $a_n = f(n)$ 当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的函数值的全体,叫做**数列**.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

简记作 $\{a_n\}$.

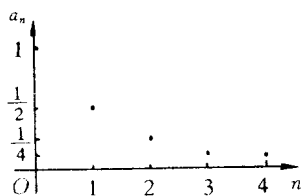
第 10 章

数 列

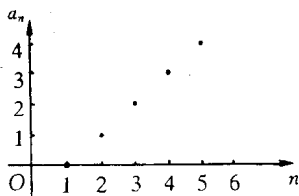
数列里的每一个数都叫做这个数列的**项**,依次称为第 1 项(或首项),第 2 项,第 3 项, ..., 第 n 项.

数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间是一种函数关系,因此,可以在平面直角坐标系中画出数列的图象. 如图 10-1(1)、(2),分别是数列(1)、(2)的图象表示.

可见,数列的图象是一串离散点.



(1)



(2)

图 10-1

再如:

$$0, 1, 4, 9, 16, \dots, (n-1)^2, \dots; \quad (3)$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots; \quad (4)$$

$$-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots; \quad (5)$$

$$-\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{2 \times 4}, -\frac{1}{3 \times 5}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n(n+2)}, \dots; \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}, \dots; \quad (7)$$

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots (\sqrt{2} \text{ 的不足近似值}); \quad (8)$$

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots; \quad (9)$$

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 (\text{小于 } 17 \text{ 的合数}) \quad (10)$$

等都是数列.

二 通 项 公 式

定义 2 如果数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数

关系可以用一个解析式表示,那么这个解析式就叫做数列的通项公式.

如数列(1)、(2)的通项公式分别是 $a_n = \frac{1}{2^n}$ 、 $a_n = n - 1$.

注意 有些数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系不可以用解析式表示,如数列(8)、(10)就没有通项公式;有些数列不仅有通项公式,而且还不唯一,如数列(9)的通项公式可写作 $a_n = 1^n$ 或 $a_n = n^0$.

有了通项公式,我们依次用 1, 2, 3, ... 去代替公式中的 n , 就可以得到我们想要的任意一项.

例 1 已知数列的通项公式为 $a_n = \cos \frac{n}{2}\pi$, 写出它的前 5 项和第 100 项.

解 $a_1 = \cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $a_2 = \cos \frac{2}{2}\pi = \cos \pi = -1$;

$$a_3 = \cos \frac{3}{2}\pi = 0; a_4 = \cos \frac{4}{2}\pi = \cos 2\pi = 1;$$

$$a_5 = \cos \frac{5}{2}\pi = 0; a_{100} = \cos \frac{100}{2}\pi = \cos 50\pi = 1.$$

例 2 写出下面数列的一个通项公式:

(1) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-2}{3}, \frac{4^2-3}{4}, \frac{5^2-4}{5}, \dots$;

(2) $-\frac{\sqrt{1}}{1 \times 2}, \frac{\sqrt{2}}{2 \times 3}, -\frac{\sqrt{3}}{3 \times 4}, \frac{\sqrt{4}}{4 \times 5}, \dots$.

解 (1) 数列的前四项的分母 2、3、4、5 是项数加上 1; 分子的被减数是分母的平方, 减数恰是项数. 因此这个数列的一个通项公式是

$$a_n = \frac{(n+1)^2 - n}{n+1} = 1 + \frac{n^2}{n+1}.$$

(2) 先观察数列前四项的分母是项数与项数加上 1 的积, 分子是项数的算术平方根. 又此数列的奇数项为负, 偶数项为正. 因此这个数列的一个通项公式是

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}.$$

第 10 章

数 列

练 习

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的前 4 项:

$$(1) a_n = \frac{n-1}{2n+1}; (2) a_n = (-1)^{n+1} \cdot n;$$

$$(3) a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

2. 观察下面数列的特点, 用适当的数填空, 并写出每个数列的通项公式:

$$(1) 1, 3, 5, (), 9, \dots;$$

$$(2) \frac{1}{2}, (), \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots;$$

$$(3) (), 1, 4, 9, (), 25, 36, 49, \dots;$$

$$(4) 1, \sqrt{2}, (), 2, \sqrt{5}, (), \sqrt{7}, \dots;$$

$$(5) 0, 5, 8, 17, 24, (), \dots;$$

$$(6) -\frac{1}{2}, (), -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, (), \frac{1}{64}, \dots.$$

三 递 推 公 式

定义 3 如果一个数列从某一项起, 它的任何一项都可以用它前面的若干项来确定, 那么这个数列就叫做递推数列. 用来确定后项与前若干项的公式叫做递推公式.

如 $a_n - a_{n-1} = 2$, $a_n = 3a_{n-1}$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 等都是递推公式.

有时, 确定数列的通项公式比较困难, 而确定递推公式却比较容易. 如果给定一个数列的递推公式及前若干项, 那么这个数列就有可能被唯一确定.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$). 写出数列的前 5 项.

解

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3},$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}.$$

练 习

写出下面数列的前 5 项:

(1) $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} - 2 (n \geq 2);$

(2) $a_1 = 3, a_n = -\frac{1}{3}a_{n-1} (n \geq 2);$

(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$

四 数列的分类

数列通常按以下三种方法来分类.

1. 按照项数的有限、无限来分类

如果一个数列的项数有限,那么这个数列叫做**有穷数列**,如(10);如果一个数列的项数无限,那么这个数列叫做**无穷数列**,如(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(9).

2. 按照前后两项数值的大小比较来分类

一个数列中,如果从第二项起,每一项都大于它的前一项,即 $a_{n+1} > a_n$,那么这个数列叫做**递增数列**,如(2)、(3)、(8)、(10);如果从第二项起,每一项都小于它的前一项,即 $a_{n+1} < a_n$,那么这个数列叫做**递减数列**,如(1)、(4);如果从第二项起,有些项大于它的前一项,而有些项小于它的前一项,那么这个数列叫做**摆动数列**,如(5)、(6)、(7);如果每一项数值都相等,那么这个数列叫做**常数列**,如(9).

3. 按照各项的绝对值是否不超过某个正数 M 来

第 10 章

数 列

分类

如果一个数列中,任何一项的绝对值都不超过某一个正数 M ,即 $|a_n| \leq M (M > 0)$,那么这个数列叫做有界数列,如(1)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(9)、(10);如果这样的正数不存在,那么这个数列叫做无界数列,如(2)、(3).

习题 10-1

1. 观察下面数列的前几项,写出它的一个通项公式:

(1) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$;

(2) $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{6}{35}, \frac{8}{63}, \frac{10}{99}, \dots$;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{7}{16}, -\frac{9}{32}, \dots$;

(4) $\sqrt{2}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{11}, \dots$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$: $2, 6, 12, 20, 30, \dots$.

(1) 求这个数列的通项公式;

(2) 求这个数列的第 10 项,第 99 项;

(3) 132, 380 是这个数列中的第几项?

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, 其中 $a_1 = 1, a_2 = 1$.

(1) 写出这个数列的前 5 项;

(2) 利用递推公式 $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, 构造一个新的数列 $\{b_n\}$, 写出该数列的前 5 项.

§ 10-2 等 差 数 列

一 等差数列的定义

先看下面的实例.

观察自由落体运动前 5 秒并记录下每一秒内的位移 (取 $g = 10\text{m/s}^2$):

$$5, 15, 25, 35, 45; \quad (1)$$

全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码(单位:厘米):

$$25, 24\frac{1}{2}, 24, 23\frac{1}{2}, 23, 22\frac{1}{2}, 22, 21\frac{1}{2}, 21; (2)$$

再举一个简单的常数列:

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots \quad (3)$$

你能看出这三个数列的共同特点吗?

我们会发现,这三个数列有一个共同特点,即从第二项起,每一项与它的前一项的差都等于常数.

在数列(1)中, $15 - 5 = 25 - 15 = 35 - 25 = 45 - 35 = 10$, 差是常数 10;

在数列(2)中, $24\frac{1}{2} - 25 = 24 - 24\frac{1}{2} = \dots = 21 - 21\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, 差是常数 $-\frac{1}{2}$;

在数列(3)中, $1 - 1 = 1 - 1 = \dots = 0$, 差是常数 0.

对于这样的数列,一般地,给出以下定义:

定义 1 如果数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 从第二项起,每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个常数 d , 即 $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$, 那么这个数列就叫做**等差数列**, 常数 d 叫做**公差**.

以上三个数列均为等差数列, 数列(1)的公差 $d = 10$; 数列(2)的公差 $d = -\frac{1}{2}$; 数列(3)的公差 $d = 0$.

在等差数列中, 当公差 $d > 0$ 时, 数列是递增数列, 如数列(1); 当公差 $d < 0$ 时, 数列是递减数列, 如数列(2); 当公差 $d = 0$ 时, 数列是常数列, 如数列(3).

二 等差数列的通项公式

如果数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 是等差数列, 公差是 d , 那么由等差数列的定义可知,

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

第 10 章

数 列

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

.....

依次类推,得 $a_n = a_1 + (n-1)d.$ (10-1)

这就是等差数列的通项公式.

在等差数列的通项公式中,含有四个量 a_1, d, n, a_n , 已知其中任意三个量,就可以求出第四个量.

例 1 求等差数列 3, 1, -1, -3, -5, ... 的第 20 项.

解 把 $a_1 = 3, d = 1 - 3 = -2, n = 20$, 代入公式 (10-1) 得

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_1 + (20-1)d \\ &= 3 + 19 \times (-2) = -35. \end{aligned}$$

例 2 等差数列 -5, -9, -13, -17, ... 的第几项是 -401?

解 把已知数据代入公式 (10-1) 得

$$-401 = -5 + (n-1) \times (-4),$$

解得 $n = 100.$

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 6, a_9 = 12$, 求第 11 项.

解 因为 $a_9 = a_3 + (9-3)d,$
即 $12 = 6 + (9-3)d,$
得 $d = 1,$

所以 $a_{11} = a_9 + 2d = 12 + 2 \times 1 = 14.$

例 4 在 12 与 -8 之间插入四个数,使它们与这两个数成等差数列,求此四个数.

解 把 $a_1 = 12, a_6 = -8$, 代入公式 (10-1) 得

$$-8 = 12 + 5d,$$

解得 $d = -4,$

因此所求的四个数为 8, 4, 0, -4.