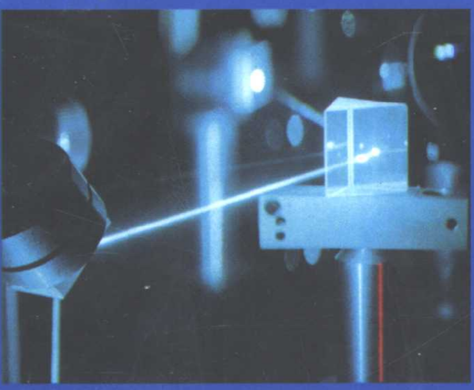
大学物理习题的计算机解法

李增智 孟湛祥 吴亚非 胡艳艳 编著



国防工業出版社

大学物理习题的计算机解法

李增智　孟湛祥　吴亚非　胡艳艳　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书共选了 70 道与《大学物理》课程教学内容密切相关的习题,其中 32 道作为例题,38 道作为练习题。书末并附有练习题解答。本书中所有题目均采用 C 语言编程解答。通过用计算机求解物理习题,可以使同学们更深入地理解和掌握物理学的规律,进一步提高同学们分析问题和解决问题的能力。

本书可作为工科院校各专业《大学物理》课程的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理习题的计算机解法/李增智等编著.—北京:国防工业出版社,2002.3

ISBN 7-118-02547-X

Ⅰ.大... Ⅱ.李... Ⅲ.物理学 - 习题 - 计算机辅助计算 - 高等学校 Ⅳ.04 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 004504 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 9⅝ 252 千字

2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月北京第 1 次印刷

印数:1 - 4000 册 定价:14.00 元

前　言

在《大学物理》课程的教学过程中，做习题是一个重要的教学环节。通过做习题可以起到复习、巩固所学知识，加深对教学内容的理解，提高运用所学理论解决实际问题的能力，以及扩大知识面等作用。著名物理学家、教育家索末菲当年曾对他的学生、诺贝尔奖金获得者海森伯说过："通过孜孜不倦地做习题，就可以明了，哪些知识你已经掌握，哪些还没有(Just do the exercises diligently, then you will find out what you have understood and what you have not.)"①。由此可见做习题在学习过程中的重要性。

在当今计算机技术飞速发展的时代，利用计算机分析问题和解决问题的能力已经成为当代大学生科学素质的重要组成部分。因此，在各门课程的教学过程中，适当地、有针对性地加入计算机技能的训练是十分必要的。本书就是为了配合工科院校各专业《大学物理》课程的教学而编写的。通过用计算机求解大学物理习题，可以使同学们更深入地理解物理学的概念和规律，提高利用计算机解决问题的能力，进一步提高同学们的科学素质。本书共选了 70 道物理习题，其中 32 道作为例题，38 道作为练习题。在本书末尾附有练习题解答。书中所选的题目，有些题目既可以用解析方法求解，也可以通过计算机用数值计算方法求解；有些题目的解析解很难得到，只有通过计算机用数值计算方法求解；有些题目则必须先用所学的物理知识求出其表达式，然后再通过计算机应用数值计算方法求解。本书中的大部分题目均与《大学物理》课程内容密切相关，只有少部分题目是为扩展同学的知识面而编排的。

① 参见 George B. Arfken 等著，University physics，1984 年版，第 9 页。

考虑到大多数大学低年级同学都学习C语言,本书中的所有题目都采用C语言解答。需要指出的是,本书给出的解答程序只是作为同学们解题时的参考,并不一定是最简洁合理的,同学们可以尝试用更简洁合理的程序来解答同一道题目,也可以尝试解答更复杂些的题目。愿本书能够为勇攀科技高峰的莘莘学子们助一臂之力。

在本书编写过程中,天津大学理学院《大学物理》教研组广大教师给予了很大帮助;天津大学IBM新技术中心齐亚峰同学和姚能昭高工提出了很多宝贵的建议;天津大学应用物理专业98级程光辉、王雷、程红飞、马林祥、杜洪明等同学付出了艰辛的劳动。此外,编者还参考了有关书籍和期刊的部分内容。所有这一切,编者在此一并表示衷心地感谢。

编写本书是一次尝试。由于编者水平有限,书中缺点错误在所难免,恳请广大教师和同学批评指正。

编者

于天津大学

2001.11

目　录

第1章　计算机求解物理问题的常用方法

1.1　引言

在经典的物理学教科书中,讨论具体的物理问题一般都是以有解析解为前提的。这一方面来自于人们的传统观念,认为只有求出解析解才能称其为理论,才能进入教科书;另一方面也是由于人们的认识水平和受到数学求解能力的限制。当人们用数学公式来表达研究对象间的定量关系时,一开始就选择了线性关系,如牛顿定律、麦克斯韦方程、薛定谔方程(后来才出现非线性薛定谔方程)等,所涉及的问题一般可以求得解析解。然而,世界在本质上是非线性的,线性问题只占极少部分,以往人们遇到求解困难的非线性问题时,只能绕道走,采用各种手段将问题线性化或局部线性化进而求得解析解,而一些无法绕道走的问题,尽管从物理上看问题并不复杂,也只能搁置一边。

近几十年来通过大量的实验研究发现,在自然科学许多领域都存在一些用以往的理论无法解释的非线性现象,对于这些现象的研究,逐渐汇成一片,形成跨越多个学科、既有普遍的共性又有各学科自身特点的非线性科学。在这方面,物理学首当其冲,并已经取得相当的成功,使物理学从线性走向非线性。

另外,随着科学技术的发展,计算机已广泛普及,体积小、速度快的微型机又为人们研究世界提供了强有力的计算工具,在对大量非线性问题进行数值求解的过程中又发现了一批新的结果,从而进一步推动了非线性科学的发展。

总之,对物理问题求出解析解是十分重要的,这是建立科学理论的基础;但把求解析解作为研究问题的惟一方式又是不完备的,很多问题以目前的数学水平是无法求得解析解的,而且这样的问题占绝大多数。因此,用计算机求数值解势在必行,学习这方面的知识很有必要,它可以使我们研究的范围更广泛、视野更开阔。

用计算机求解物理问题,一般可以分为四个步骤:首先,要根据物理学原理对具体问题列出方程,这可以是代数方程、超越方程或微分方程等,还要找出该问题所应满足的初始条件或边界条件;其次,对所列方程确定数值计算方法,这里要考虑计算的精度和计算速度,由于目前计算机速度越来越快,所以计算精度是主要应该考虑的;第三,由所确定的计算方法编写计算机程序并上机计算求出结果,如果把计算方法比做是解决问题的思路,是指导思想的话,那么计算程序就是解决问题实现指导思想的具体步骤;第四,应用物理学原理对计算结果进行必要的分析,从而判断结果的正确性。

计算结果的偏差一方面可能是人为疏忽在编程时出错,但这是可以改正的;另一方面是因为将理论公式转换为数值计算公式时,可能改变原来理论公式的性质从而使得计算结果偏离理论公式的真解。换个角度来说,对于同一个物理问题,可能由于选用计算方法的不同而使计算结果不同。从这个意义上讲,能否判断出结果的正确性是计算者自身科学素质的体现。

高级语言和计算方法各自都是单独的一门课程,应用计算机对物理问题进行科学计算和数值模拟也是近年来形成的一个新的物理学分支,称为计算物理学(当然它所包含的内容比这还要广泛得多)。

本书是假设读者已经学会了一种计算机高级语言,本章下面介绍的是一些常用的计算方法,学习了这部分内容,对一般的物理问题就可以用计算机求解了。当然,这里只是一些简单常用的方法,不求全面只求实用,而且一般不去证明只求会用,如有兴趣想进一步提高的话,可参阅相关书籍。

1.2 非线性方程的数值解法

在科学研究和工程设计中常常遇到求解非线性方程问题。最普通的非线性方程当数高次代数方程，一般情况下当方次 $n>4$ 时，是不可能用代数方法求解的，只能求数值解。还有包含指数和三角函数的超越方程，一般也没有解析解。例如：

$$5e^x - xe^x - 5 = 0$$

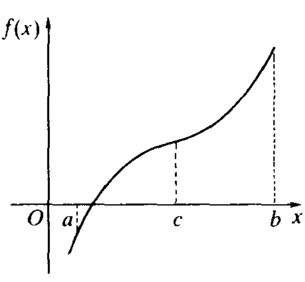
$$\tan u = u$$

求解非线性方程一般是采用某种迭代解法，即从预知的解的初始近似值（简称初值）开始，利用某种迭代格式构造一个近似值序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$，并且这个序列要能够收敛于原方程的解 x^*，实际上这是一个逐步逼近的过程，不同的迭代格式逼近解的速度可能不同，这里涉及迭代解法的收敛性和收敛速度问题。

下面，我们将介绍几种求解非线性方程的实用方法。

（一）求实根的区间分半法

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个 x 值，使得 $f(x)=0$，该 x 值就是方程 $f(x)=0$ 的一个根。



据此，可以采用每次将区间减少一半的作法逐渐逼近方程的根。

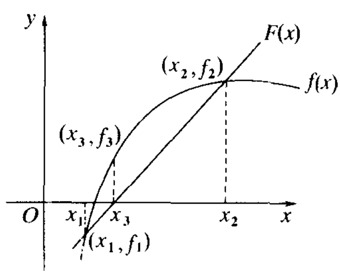
首先取区间中点 $c=(a+b)/2$,计算 $f(c)$,若 $f(a)\cdot f(c)<0$,则表明该实根在区间$[a,c]$上,再取 a、c 中点重复以上步骤。(若 $f(c)\cdot f(b)<0$ 方法类似)

计算结果可用如下方法确定:根据问题的需要设定误差限 $\varepsilon>0$,当区间长度小于 ε 时,取该区间中点作为最后结果。

(二)线性插值法

已知方程 $f(x)=0$ 在$[x_1,x_2]$之间有一实根,简记:$f_1=f(x_1)$、$f_2=f(x_2)$。过点(x_1,f_1)和点(x_2,f_2)作直线方程 $F(x)$

$$\frac{y-f_1}{f_2-f_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$



令 $y=0$,可得直线 $F(x)$与横轴的交点 x_3

$$x_3=x_1-\frac{x_2-x_1}{f_2-f_1}\cdot f_1 \tag{1-1}$$

计算:$f_3=f(x_3)$,检验下式是否成立

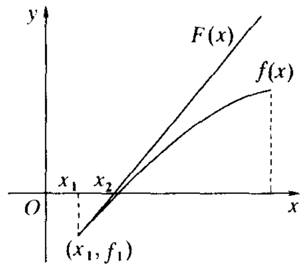
$$|f(x_3)|\leqslant\varepsilon(\text{给定误差限})$$

若上式成立,则可将 x_3 作为方程 $f(x)=0$ 在区间$[x_1,x_2]$的数值近似解。

若$|f(x_3)|>\varepsilon$,则看 $f_1\cdot f_3<0$ 还是 $f_3\cdot f_2<0$。假如前者成立,则表明该实根在区间$[x_1,x_3]$内,以$[x_1,x_3]$取代$[x_1,x_2]$,重复以上各步骤;假如后者成立,则以$[x_3,x_2]$取代$[x_1,x_2]$,重复以上各步骤;直至最终满足条件$|f(x_3)|\leqslant\varepsilon$,此时的 x 即为所求数值解。

(三)牛顿法(切线法)

线性插值法是用直线近似弧,牛顿法则是用弧在端点处的切线近似弧,因而又称切线法。



已知 x_1 是方程 $f(x)=0$ 有实根区间的一个端点,简记:函数值 $f_1=f(x_1)$,该点导数值记为 $f'_1=f'(x_1)$。

过点 (x_1,f_1) 以斜率 f'_1 作切线方程 $F(x)$

$$y - f_1 = f'_1(x - x_1)$$

令 $y=0$,可得切线 $F(x)$ 与横轴的交点 x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f'_1} \qquad (1-2)$$

计算:$f_2=f(x_2)$,检验 $|f(x_2)|\leqslant\varepsilon$ 是否成立。若成立,则 x_2 即为方程 $f(x)=0$ 的数值近似解。

假如 $|f(x_2)|>\varepsilon$,则要计算 $f'_2=f'(x_2)$,再作 x_2 处的切线方程,重复以上各步骤。直至最终满足条件 $|f(x)|\leqslant\varepsilon$,此时的 x 即为所求数值解。

(四)逐次代换法(迭代法)

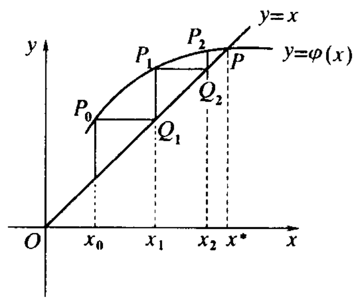
已知方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内有实根,将方程改写成 $x=\varphi(x)$ 的形式,再改写成迭代形式

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (1-3)$$

在区间 $[a,b]$ 内任取初值 x_0,代入到(1-3)式的右边,可求出 x_1,然后依次重复代入可求出 $x_2,x_3\cdots$,若有 x^* 可使 $x^*=\varphi(x^*)$ 成

立,则 x^* 即为原方程 $f(x)=0$ 的根。

用迭代法求根虽方法简单,但却要满足下列条件:在区间[a,b]内各点上,导数 $\varphi'(x)$的绝对值$|\varphi'(x)|<1$。几何解释参见下图。迭代过程相当于沿折线 $P_0\to Q_1\to P_1\to Q_2\to P_2\to\cdots$,直至趋向直线 $y=x$ 和曲线$y=\varphi(x)$的交点 P,此时有 $x=\varphi(x)$成立,交点 P 所对应的横坐标x^* 即为所求数值解。如果$|\varphi'(x)|\geqslant 1$,则此折线不会趋向固定点,从而无法求出方程 $x=\varphi(x)$的解,本迭代格式失败。



需要指出的是,当$|\varphi'(x)|\geqslant 1$ 时迭代格式失败,并不等于说原方程 $f(x)=0$ 就一定无解,改用其它恰当的迭代格式或恰当的解法仍然可能求出其解。

1.3 数值积分

在许多实际问题中,常常遇到这样的情况,当根据具体问题列出一个积分式之后,由于找不到原函数而不能求出定积分的值,这时除了将被积函数展开成级数求近似解的方法之外,还可以借助于数值积分法。另一种极端情况是,当被积函数不是解析式(例如是一组实验值)时,解析方法是无能为力的,这时数值积分法可以说是惟一的选择。下面介绍两种常用的数值积分方法。

(一)梯形法

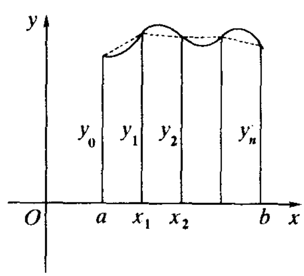
将积分区间[a,b]分成 n 个小区间,间隔可以相等也可以不

相等,为简单起见,这里取相等间隔,即 $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_1-a=x_2-x_1=\cdots=b-x_{n-1}$,分点 $x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$ 所对应的纵坐标分别为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$。梯形法是用一条折线近似积分曲线,用一系列梯形面积近似曲线下的面积——定积分的值。梯形积分公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

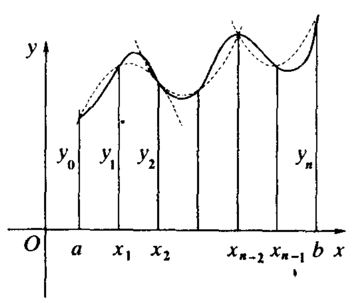
即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\Delta x\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\quad(1-4)$$



(二)辛卜生法(抛物线法)

辛卜生(Simpson)法是用一系列抛物线(相邻三点作一条)近似积分曲线,用一系列曲边梯形面积来近似曲线下的面积。这里仍采用与梯形法同样的小区间分割方法,只是要注意:这里所分割



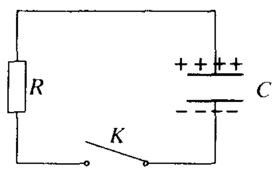
的小区间个数 n 应为偶数。

辛卜生积分公式如下(推导从略):

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\Delta x[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \tag{1-5}$$

1.4 微分方程的数值解法

考虑电学中的一个问题:一个由电容 C、电阻 R 和开关 K 组成的回路。开始时,电容器充有电荷 Q_0,当开关 K 合上后,电容器通过电阻放电,研究电容器上的电荷随时间的变化规律。



在电容器放电过程中,某时刻 t 流过回路的电流为 i,电容器极板上的电量为 Q,两者满足关系:$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

根据电容定义,电容器上的电压为 $V_C = \frac{Q}{C}$

根据欧姆定律,电阻上的电压为 $V_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

整个回路无外电压,故 $V_C + V_R = 0$

将 V_C、V_R 表达式代入上式并整理,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{Q}{RC} \\ Q|_{t=0} = Q_0 \end{cases} \tag{1-6}$$

这是一个一阶微分方程的初值问题,它的解析解为

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{1-7}$$

在通常情况下,有些微分方程要想求出解析解可能并不容易,可以采用下面介绍的数值方法求出近似解。

(一)欧拉(Euler)折线法

求解下列普遍形式的一阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1-8}$$

首先,将区间$[a,b]$等分 N 份,取 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$。

然后,用差商近似一阶导数,即

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f[x_n, y(x_n)]$$

其中 $h = x_{n+1} - x_n$ 是相邻两点间的距离,通常称为步长。

简记 $y(x_n) = y_n$,则上式可写为递推格式:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{1-9}$$

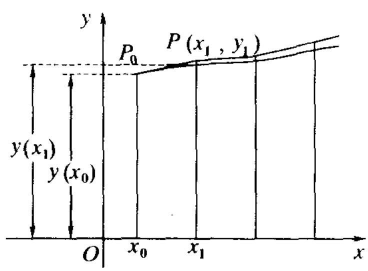
此即欧拉差分法的计算公式。当 $n = 0$ 时,有 $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$,将初值条件 $y(x_0) = y(a) = y_0$ 代入可求出 y_1,继而将 x_1、y_1 代入(1-9)式可求出 y_2,依次递推即可求出全部 y_n。

将泰勒(Taylor)级数展开公式与(1-9)式比较可知:欧拉法的局部截断误差具有 h^2 的数量级,通常记作:$O(h^2)$。

应用欧拉公式(1-9)计算 RC 放电方程(1-6),统一按 SI 单位制取 $Q_0 = 10$,$RC = 8$,时间步长 $h = 1$,计算结果如下:

时间 nh	解析解 $Q = Q_0\exp(-t/RC)$	欧拉法 $Q_{n+1} = Q_n(1 - h/RC)$
0	10.000000	10.000000
1	8.824969	8.750000
2	7.788008	7.656250
3	6.872893	6.699219
4	6.065307	5.861816
5	5.352614	5.129089
6	4.723666	4.487953
7	4.168620	3.926959
8	3.678794	3.436089
9	3.246525	3.006578
10	2.865048	2.630756

从上表可见,结果比较一致,而随着时间的增加,我们看到近似值与真值之差越来越大,其原因可从欧拉公式(1-9)的几何意义中找到:



一开始从 y_0 求 y_1 时,公式为 $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$,我们可以将其改写为 $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\cdot(x_1 - x_0)$,这是过点 $P_0(x_0, y_0)$、斜率为 $f(x_0, y_0)$ 的直线方程,由 y_0 求 y_1 的过程相当于从点 $P_0(x_0, y_0)$沿直线求点 $P_1(x_1, y_1)$的过程,直线上的 y_1 与曲线上

的 $y(x_1)$一般是不相等的,这就是由于采用直线近似曲线产生的计算误差,并且由此往后的每一步都是如此,欧拉法实际上是用一条折线近似原来的曲线,所以又称为欧拉折线法。

显然,在求解区间不太大,精度要求不很高时,采用欧拉法是很简便的;当计算精度要求较高时,欧拉法是不合适的。必须采用更高精度的计算方法。

(二)龙格—库塔(Runge-Kutta)法

为了提高求解精度,可用下面的龙格—库塔法(推导从略)。

这里所要求解的问题仍为上面的(1-8)式,并且区间等分也与上面相同,二阶龙格—库塔法格式(简记为 RK2)如下:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \qquad\qquad (n = 0,1,\cdots,N-1) \\ K_2 = f(x_{n+1}, y_n + hK_1) \end{cases} \tag{1-10}$$

二阶龙格—库塔法的局部截断误差为 $O(h^3)$。计算精度比欧拉法高一个数量级。比较(1-9)式和(1-10)式可见,在由 y_n 求 y_{n+1}的过程中,欧拉法用的是区间$[x_n, x_{n+1}]$左端点的导数值,而二阶龙格—库塔法是将区间$[x_n, x_{n+1}]$左端点的导数值 K_1 和右端点的导数值 K_2 求平均,这样做从几何上讲是为了避免上图中的折线与曲线之间的开口过大,其结果自然会使精度提高一些。当然,这样讲是比较粗略的,因为右端点的导数值应该写成 $f(x_{n+1}, y_{n+1})$,而 K_2 中的 y_{n+1}是用 $y_n + hK_1$ 替代的,相当于用了一步欧拉法,这样做的原因很简单,因为此时 y_{n+1}尚未求出。所以 K_2 实际上是右端点导数值的近似值。

如果要进一步提高计算精度,可以采用下面的四阶龙格—库塔法(简记为 RK4),它的局部截断误差为 $O(h^5)$: