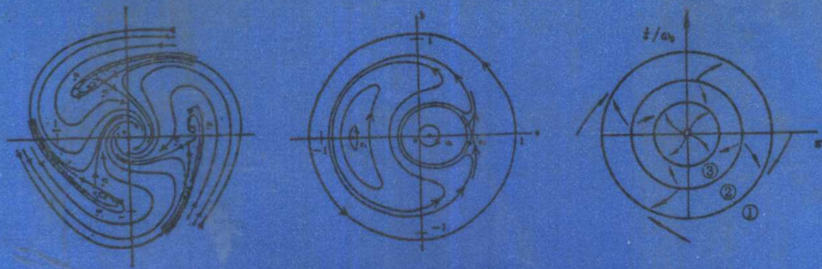
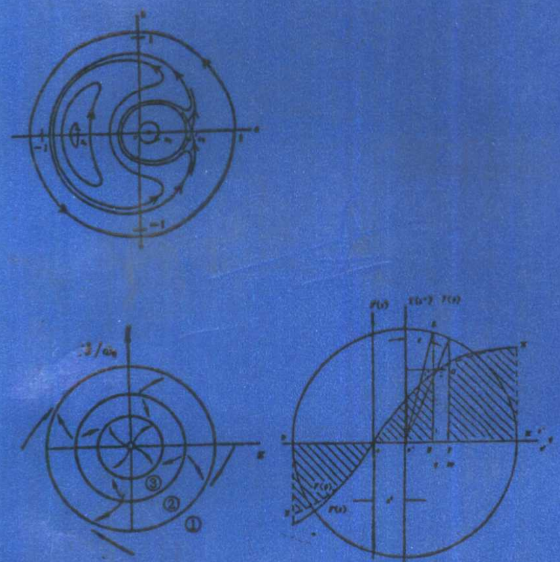


非线性系统

项国波 著



知识出版社

非线性系统

项国波　著

知　识　出　版　社

非 线 性 系 统

项国波　著

知识出版社出版发行

北京阜成门北大街17号

新华书店北京发行所经销　北京景山学校印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张11.25　字数 225 千字

1991 年 5 月第 1 版　1991 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—1200

定价：5.80 元

ISBN 7-5015-0366-4/TP·10

内 容 简 介

本书是作者研究工作的阶段总结，也是作者为在清华大学举办的《全国工程控制论研究班》、在中南矿冶学院举办的《全国非线性控制论学习班》、中国科学院研究生院、浙江大学、西北工业大学、华南工学院等十所高校讲学的讲义的系统总结。

全书共九章。前四章，讲非线性系统的基本性质、弱非线性系统及其基本性质，和研究它们的常用数学方法：渐近法、摄动法和谐波线性化方法，介绍了吸引子、吸引域和混沌等基本概念；后四章，讲本质非线性系统自振荡、强迫振荡及其有益利用；介绍了几种非线性控制器的设计和应用，特别是智能积分器及其应用；介绍了怎样利用一类非线性积分器，把线性优化系统改造成为品质指标更好的二次优化系统；最后一章，介绍了电站并联运行稳定性的谐波线性化研究方法。全书着重于非线性系统物理性质的阐述和讨论。

本书可供非线性系统、非线性控制理论和控制工程的研究人员、高校师生以及工程技术人员参考，也可以做为研究生教材和高年级学生选修课教材。

前　言

1982年，中国自动化学会教育工作委员会和清华大学自动化系，联合举办《全国工程控制论研究班》，我受吴麒教授委托，为该班讲非线性系统。原先没有准备写讲义，但讲之后，同事们要求印，只好将十分粗糙的讲稿，临时刻印给大家。

是年冬，中国自动化学会教育工作委员会委托我和中南矿冶学院王鸿贵教授举办《全国非线性控制论学习班》。原来讲稿的内容不够了，需要重新写一本讲义。但是，由于两班之间，仅隔四个月，重大修改不可能，只在原有基础上充实内容，印了100册，供出席该班的同志们使用。

从那时起，非线性科学引起我国众多学者的兴趣。先后又应西北工业大学、华南工学院、中国科学院研究生院、浙江大学等八所高等院校的邀请讲学，逐步形成这本书。

全书共九章。第一章，介绍非线性系统的特殊性，用尽可能少的教学方法，介绍非线性系统一些最基本的物理性质；第二章，讲弱非线性系统的定义和它的基本性质；第三、四两章，介绍弱非线性系统的自振荡、强迫振荡、非线性共振及其稳定性，周期解稳定性的一般理论，介绍了渐近法，奇异摄动法，相平面法等基本数学工具，引入吸引子、吸引域和混沌等基本概念；第五至七章，介绍本质非线性系统的自振荡、强迫振荡及其有益利用，着重介绍本质高阶非线性系统的近似研究法——谐波线性化原理和它的三种解

法：代数法、幅相特性法和对数法，比较了利用自振荡和强迫振荡辗平非线性特性两种方法的技术效果；第八章，介绍几种非线性控制器的设计和应用，特别是智能积分器及其应用，讨论了怎样利用非线性积分器和等幅性原理，把线性优化系统改造成为性能指标更好的二次优化系统；第九章，讨论电站并联运行稳定性。电力系统是一多输入多输出系统。给出等价定理，把一个双输入双输出非线性耦合的控制系统等价为一个单输入单输出的非线性系统，然后用谐波线性化方法，分析综合电站并联运行的结构稳定、非线性共振，以及奇异中线电流形成机理及其抑制方法，讨论了怎样选用三种基本控制原理，来设计一个既稳定而又完善的子系统，以构成一个不仅结构稳定而且性能完善的大系统。

非线性系统，范围广，难度大。从1892年李雅普诺夫建立稳定性理论之后，至今，已有相平面法、渐近法、谐波线性化方法、沃尔泰拉-维纳法、点映射法和微分几何等。但复杂一点的课题，或深入研究周期解的稳定性问题，不能不依赖计算机辅助研究。上述各种分析方法，各自有自己适用的场合，但近来的发展趋势，常常需要综合应用几种方法才能解决一个具体的工程问题，特别是讨论周期解的稳定性，混沌产生机理等问题。因此，本书虽然主要讲的内容是谐波线性化原理，但不能不涉及其它方法。

面对这样广泛而又难度很大的问题，由于作者水平限制，错误和欠妥之处，难以避免，恳请批评指正。

项国波

1988年7月30日于榕城

1990年11月27日修改于武昌

目　录

第一章　非线性系统的基本性质

1.1　非线性系统三种线性化方法

相对于非线性理论而言，线性理论发展比较充分，因而人们总希望用线性理论方法去解决所面临的众多的工程实际问题。但是许多工程系统都是非线性的，因此，想用线性理论方法来研究实际工程问题，首先，就要处理非线性函数的线性化问题。现在，我们知道共有三种线性化方法，它们分别适用于三种不同情况：

局部线性化　如果我们所要处理的非线性函数是可解析的，那么它在微增量的情况下，就可以用泰勒级数展开它，然后，取其一次近似项代替非线性函数，便得到一个近似的线性化方程。经过这样处理的线性化系统，叫做局部线性化系统。现有的线性理论基本上是建立在这个基础上开展起来的。但它只能研究这类非线性系统在平衡态附近的受扰运动的行为，即使仅限于微扰运动，用线性理论方法分析所得到的结论，也是有很大的限制的，今后讨论我们将会看到，当线性化系统处于临界解的情况下，这种线性化方法常常会失效。

全局线性化　有一类非线性函数，它虽然是可解析的，但它的自变量的增量不是“微”的，而是大范围的。这时，

仅用泰勒级数一次近似项来逼近它的非线性函数失效了。典型的例子就是机器人运动的控制问题。因此，从70年代末开始，人们开始寻求各种各样的非线性补偿办法，串联的、状态反馈的、以及逆系统等等方法，消除系统中的固有的非线性函数，把非线性系统改造成为线性系统。然后用各种线性理论来设计系统的性能指标。因为这种补偿办法是对变量大范围变化进行的，所以叫它做全局线性化。现在发展起的非线性系统的几何方法或代数方法，都属于这一类。

谐波线性化方法　有一类非线性函数，它们不是解析函数，如继电型函数、齿轮啮合非线性，干摩擦等等。这里，局部线性化方法，以及前述的全局线性化方法，都失效了。对于这样一类的非线性函数，可以用谐波平衡法加以线性化，叫做谐波线性化方法，然后用线性理论方法来研究非线性系统某些行为。这个方法还有一个好处，不仅非解析函数可用，解析函数也可以用；不仅微增量可以用，极限运行状态也可以用，从这个意义上来说，它是一个更广义的全局线性化方法。

不论是局部线性化，还是全局线性化，它们都属于非线性系统的线性化范畴。只能揭示线性系统的某些性质，不能开发利用非线性系统本身固有的某些特殊性质。谐波线性化方法则不同。在谐波线性化方程中，包含有非线性系统若干性质，因而可以用线性理论去开发，去揭示非线性系统某些特殊性质，如自振荡，非线性共振：主共振，分频或倍频共振，异步激发、异步熄灭，以及近代发现的混沌现象等等。然后，利用这些特殊的物理现象去设计各种各样的非线性控制器，例如，可以利用自振荡，或受迫振荡，把继电型非线

性系统改造成为准线性系统，使它兼有两类系统的优点，而两类系统所固有的某些缺点，又能相互弥补；利用异步激发原理，可以利用外扰把系统中的自振荡激发起来，加以利用，也可以利用异步熄灭原理，把自振荡抑制下去；利用非线性办法，设计一类非线性比例积分器，它们具有非最小相位特性，可以设计出性能特优的控制系统，等等。这些重要的物理现象，不论用局部线性化，或是全局线性化，都无法开发利用它们，谐波线性化方法则能帮助我们去开发利用它们。

1.2 自振荡的基本性质

自振荡是系统的基本属性之一，线性系统的自振荡有两个性质：等时性和非等幅性；非线性系统的自振荡则相反：非等时性和等幅性。为了说明这两种系统具有完全不同的自振荡性质，我们分析两个例。

例一、数学摆的自振荡

图 1.1 给出一个数学摆的图象。所谓数学摆，系指一个重为mg的摆锤，通过连杆l，悬挂在支点O上的单摆。给摆锤一个脉冲力之后，摆锤就沿着铅垂线所确定的平面来回摆动，这种现象叫做数学摆的自振荡。这种自振荡具有哪些性质呢？为了回答这个问题，需先给出数学模型，然后分析它的解，才能知道它的基本性质。

数学模型是理论分析的起点，但却是一个最难处理的问题。

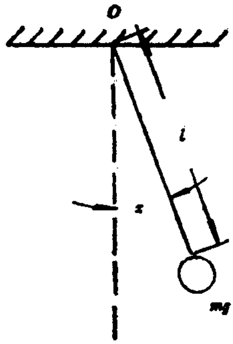


图 1.1

就本例而言，如果把摆长l的重量计算在内的话，这个摆就是一个具有分布参数的摆，相应的数学模型就是偏微分方程；如果摆长的重量可以略以不计，这个摆就变成集中参数的数学摆，相应的数学模型就是常微分方程。如果我们只在有限的几个自振荡周期内观察摆的自振荡运动，那么，很小的空气阻尼就可以略去不计，它的数学模型就变成无阻尼的常微分方程了；反之，如果观察的时间足够长，空气阻尼，即使很小，也不能不计了，因为这个摆在空气阻尼下，久而久之，终将停止下来；如果初脉冲力很大，摆的振幅很大，这个数学模型就变成非线性常微分方程；反之，就变成线性微分方程。可见，同样一个物理系统，随着结构参数相对大小不同，观察的尺度不同，会有不同的数学模型描述之。

现在讨论最简单的情况，无阻尼集中参数的数学摆，它有如下的数学模型

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_z^2\sin x=0, \qquad (1.1)$$

式中，x——摆和铅垂线的夹角，

ω_z——自振频率，

$$\omega_z=\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (1.2)$$

其中，l——摆长，

g——重力加速度，

因为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, \qquad (1.3)$$

因此，当$x\approx 0$时，我们有

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) = 1, \tag{1.4}$$

或

$$\lim_{x \to 0}(x - \sin x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = 0, \tag{1.5}$$

即

$$\sin x \approx x, \tag{1.6}$$

这时，方程（1.1）取下式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_z^2 x = 0, \tag{1.7}$$

式（1.7）是一个线性常系数二阶微分方程，它的解为

$$x = a_0 \cos(\omega_z t + \vartheta_0) \tag{1.8}$$

式中，a_0——初始条件决定的初振幅；

ϑ_0——初始条件决定的初相位。

适当地选择时间坐标，取 ϑ_0 为零，线性方程（1.7）解的物理性质主要取决于两个参数ω_z和a_0。因为

$$\omega_z = \sqrt{g/l} = 常数 \tag{1.9}$$

故称式（1.8）所示的自振荡解为等时性；而不同的初始值，就有不同的 a_0 值，这种性质叫做线性系统自振荡的不等幅性。

由于

$$\frac{dx}{dt} = -a_0\omega_z \sin(\omega_z t + \vartheta_0), \tag{1.10a}$$

$$y = \frac{1}{\omega_z}\frac{dx}{dt}, \tag{1.10b}$$

于是，方程（1.7）的解又是一簇充满整个相平面的同心圆

簇，如图1.2所示，每个圆都对应于一个初始条件。

这里讲的虽然是二阶常系数微分方程的解，但一般线性系统都具有这两个基本性质。

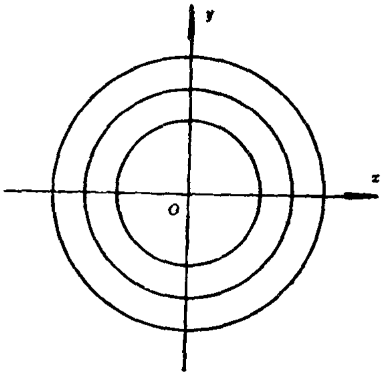


图 1.2

但是，纯粹的线性系统是不会存在自振荡的，因为当观察时间足够长之后，空气的阻尼就不能不计，久而久之，这种自振荡终要消失的，这是线性系统一条重要的物理性质。非线性系统则不同，即使它的阻尼不为零，某种结构的非线性系统仍会出现稳定的自振荡，因此，自振荡是非线性系统的基本属性之一。

例二，描述电子管自激振荡的范德坡耳方程为[38]

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad (1.11)$$

式中，ε——正的小参数，即 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$，

式（1.11）中，出现了非线性阻尼项

$$\varepsilon(x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad (1.12)$$

式（1.11）指出：

i. 当$x^2<1$时，式（1.12）所示的阻尼项为负值，因此，所描述的系统的运动是发散的；

ii. 当$x^2>1$时，非线性阻尼为正值，运动是收敛的；

iii. 当$x^2=1$时，非线性阻尼项为零，方程（1.11）有一个等幅自振荡的解。

式（1.11）所描述的系统的自振荡相图如图1.3所示。图中，$x=\pm 1$，把整个相平面划分为三个区域：两个正的阻尼区；一个负的阻尼区。在正阻尼区内，所有的运动轨迹

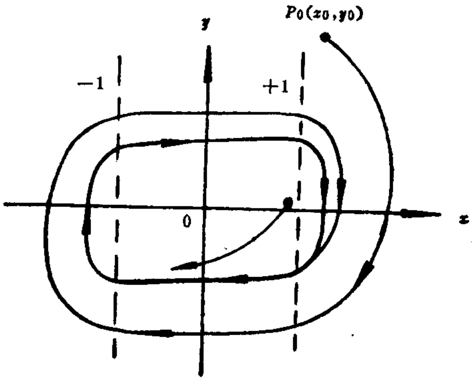


图 1.3

都是收敛的；在负阻尼区内，所有的运动都是发散的。因此，方程（1.11）所描述的系统，不管初始条件取何值，久而久之，该系统终将出现一个等幅自振荡，又叫做极限环，这是非线性系统自振荡的基本性质之一——等幅性性质。

现在讨论非等时性性质。

设式（1.11）的一次近似解x取下式

$$x=a\cos\omega t, \tag{1.13}$$

式中，a，ω，分别表示待解的振幅和频率。

对式（1.13）求导，则有

$$\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t, \tag{1.14}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos\omega t, \tag{1.15}$$

把待解式（1.13）及其导数式（1.14），式（1.15）代入式（1.11），有

$$(1-\omega^2)\,a\cos\omega t=-\varepsilon\,(a^2\cos^2\omega t-1)\,(-a\omega\sin\omega t)$$

$$=\varepsilon a\omega\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)\sin\omega t$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon a^3\sin 3\omega t, \tag{1.16}$$

令同次谐波系数相等，则有

$$\left.\begin{aligned}(1-\omega^2)\,a&=0,\\ \varepsilon a\omega\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)&=0,\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&(1.17\text{a})\\&(1.17\text{b})\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\varepsilon a^3\omega=0. \tag{1.18}$$

解式（1.17），得

$$a=2,\quad \omega=1, \tag{1.19}$$

式（1.19）解证实了方程（1.11）确实存在一个极限环。

略去3次谐波之后，式（1.16）取下式

$$\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}\approx\varepsilon\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)\frac{dx}{dt} \tag{1.20}$$

时，方程（1.11）等价于