L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control

非线性控制中的 L_2 增益和无源化方法

(第 2 版)

Arjan van der Schaft　著

孙元章　刘前进　杨新林　译

清华大学出版社　施普林格出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

L_2 增益设计方法和系统理论是经典控制方法和状态空间相结合的产物，对于非线性 H 控制的研究有着深远的意义。全书内容包括三个部分，第 1～3 章介绍了小增益定理、无源化方法和耗散系统等基本理论及其联系；第 4～5 章阐述了基于无源性构造的广义哈密顿(Hamiltonian)系统理论框架及其反馈无源化方法，第 6～8 章综合了当前非线性鲁棒控制的主要研究成果，包括非线性 H 设计、HJ 不等式的求解等。全书内容紧凑连贯，反映了非线性控制领域的最新成果。

本书可以作为高等院校自动化类相关专业高年级学生、研究生的教科书，也可以供相关领域研究人员作为控制设计的参考书。

书　名：非线性控制中的 L_2 增益和无源化方法(第 2 版)
作　者：孙元章 等 译
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　**印张**：12.75　**字数**：231 千字
版　次：2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-05171 2/TP・3032
印　数：0001～2500
定　价：29.00 元

译　　序

回顾控制学科发展的历史，我们可以发现，促进这一领域进步最直接的动力是来自工业生产自动化的需要，而控制学科的发展最终离不开数学的支持从拉氏变换、线性代数到微分几何方法，以及目前的耗散系统理论，均在控制学科不同阶段的发展中起到了重要的作用。

尽管线性代数这一数学方法的研究已经相当成熟，但将其系统地引入到控制理论的研究中却还是起始于 20 世纪 60 年代，这就是基于状态空间的设计方法，它的出现标志着控制领域研究从频域到时域的转变，而这种线性最优设计方法被应用到实际工业系统中更是创造了巨大的经济效益。相对于传统的 PID 设计，线性最优方法不仅具有优美的数学形式，更有着极高的应用价值。

但是，针对局部线性化模型设计的最优控制器无法解决系统中广泛存在的强非线性和大干扰稳定性问题，这导致人们开始注意非线性方面的研究，微分几何方法的引入为非线性控制的研究带来了突破性的进展。理论上证明，基于微分几何的非线性控制器在线性二次最优意义上与线性最优控制是等价的。随后产生的直接反馈线性化、逆系统方法等理论更加丰富了非线性控制领域的研究，它们在本质上和微分几何方法有一定的等价性。

由于微分几何方法仅限于固定模型和参数，对于参数摄动不具有鲁棒性，并且理论本身在非线性解耦以及反馈引入等方面存在某些缺陷，因此当系统中存在着外部扰动或参数的不确定性时，非线性控制设计方法仍然得不到最好的控制效果，由此产生了鲁棒控制理论的研究，导致了非线性鲁棒 H 控制这一新兴学科的出现。如何在保证系统稳定的前提下最大程度地降低干扰对系统输出的影响，即使系统对干扰具有最强的鲁棒性，这就是 H 控制研究所面临的问题，其核心问题在于一类偏微分不等式——Hamilton Jacobi 不等式的求解。由于目前对于该不等式的求解在数学上还没有通用的方法，同时，对经过反馈线性化后的线性系统采用线性鲁棒最优控制也并不能保证原系统也具有鲁棒最优性，人们开始尝试开辟新的途径来绕过该不等式的求解。

针对非线性 H 领域中的一种在工程上有特殊重要性的问题——非线性 L_2 增益干扰抑制问题，目前的研究主要包括基于上三角结构的递推设计方法等。引入无源化方法可以充分利用物理系统本身的结构特点，为李雅普诺夫函数的构造提供信息，特别是广义哈密顿这种开放无源系统的引入，有可能为

非线性鲁棒控制的最终突破带来机遇。因此，基于无源性和耗散性的方法已成为鲁棒控制理论研究领域的热点之一，而随着哈密顿理论的逐渐成熟和引入，必将进一步为这一领域的研究注入新的活力。

目前，国内尚没有系统介绍 L_2 增益和无源性等理论的中文教材或专著。译者希望通过这本《非线性控制中的 L_2 增益和无源化方法》（L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control》，第 2 版，施普林格出版社 2000 年出版）弥补这方面的空缺。该书作者 Arjan van der Schaft 近些年来在非线性控制领域内建树颇丰，一些重要的理论成果在此书中均得到了体现。该书最初源于研究生的课程讲义，因此在介绍非线性 H 控制研究的主要成果的同时，也没有摒弃传统的输入输出和闭环系统稳定性理论，而是相互融合，使得全书内容紧凑连贯，可以帮助读者在较短时间内掌握非线性鲁棒控制研究的一般思想。希望本书的引入为中国非线性控制学科的发展起到抛砖引玉的作用！

在本书的翻译过程中，日本上智大学的申铁龙博士给予了积极的建议；译者所在课题组的师生们，包括梅生伟博士，赵枚、曹明等同学，对本书的工作做出了极大的贡献，没有他们细致周到的工作，本书很难得以顺利出版；此外，本书原著作者和清华大学出版社的王一玲编辑也给予了热情的帮助，这里一并表示感谢。同时，译者还要特别感谢国家自然科学基金委员会国家杰出青年科学基金和海外青年学者合作研究基金，以及国家重点基础研究专项经费对于这一领域研究工作的资助。由于译者水平有限，纰漏之处在所难免，欢迎不吝指正！

译　者

2001 年 9 月于清华园

第 2 版序

和第 1 版(《控制与信息科学系列教材》卷 218)一样，第 2 版的基本思想是：介绍经典输入输出与闭环稳定性理论的一些主要观点，并简明论述了近几年在非线性鲁棒、H_∞ 控制与无源性控制方面的成果。同时对第 1 版部分章节进行了修改与扩充，使之能兼顾该领域的基础理论以及最新进展。本书显然无法包括该领域现有的各种理论，因此第 2 版主要反映了作者所感兴趣的领域的一些成果。其他方面的内容可参见其他著述。

和第 1 版相比，第 2 版主要有如下变动：

- 第 2 章新添加了一节，通过散射方法来建立 L_2 增益与无源性联系，这是一种与坐标无关的几何方法；
- 重新编写了第 3 章关于稳定性部分的内容，并加入了文献[182]中一些新的成果；
- 重写并扩展了第 4 章的内容，以反映当前的研究成果。4.1 节的第一部分主要基于初版的 3.2 节；
- 新增加的第 5 章主要涉及反馈等值无源化系统问题，这一部分内容建立在文献[29]的基础上。

此外，本书还有其他一些小的改动和扩充。参考文献也作了更新和扩充，当然还远远不够。

我认为，非线性控制中的无源性理论及 L_2 增益方法是对于近来状态空间理论发展与经典成就的综合，不论是现在或者将来，它都有着广泛的应用前景。显然，我们还有很多工作要做，有些方面根本就没有考虑到。本书就是要搜集这个领域内有建树的研究成果，并选择那些最新的进展情况，以专著的形式来促进该领域的进步。

本书不仅适用于本领域的研究人员，也可用作系统控制等相关专业学生的高级教程。读者应具备控制理论与稳定性理论等基础知识，并对线性鲁棒控制理论有一定的了解。

本书的内容组织如下：

第 1 章概括了输入输出与闭环稳定性的基本概念，主要参考(有时在文字上也直接引用)Vidyasagar 的“非线性系统分析”，详见文献[203]。

第 2 章主要沿用了 Vidyasagar[203]对于小增益与无源性定理的介绍，同时参考了 Desoer & Vidyasagar[43]等文献。2.3 节介绍了本章内容中散射

方法的几何描述。

第 3 章对于耗散系统理论进行了相当详细的解释，并强调了在有限 L_2 增益、无源性和稳定性方面的用途，这部分内容建立在文献[208]（Willems）基础上。本章可以看作是前两章在状态空间理论上的综合。

第 4 章采用无源状态空间的观点研究欧拉-拉格朗日方程以及一类广义哈密顿动态系统，即耗散的端口受控哈密顿系统。除无源性外，对于这类系统的其他属性，出于稳定控制的考虑，从能量形成的角度进行了研究。无源化控制方法即基于这种观点，并强调了通过关联进行控制的概念。

第 5 章介绍非线性系统如何通过状态反馈以实现无源化的方法。这些方法在级联系统的稳定控制中还会进一步研究。

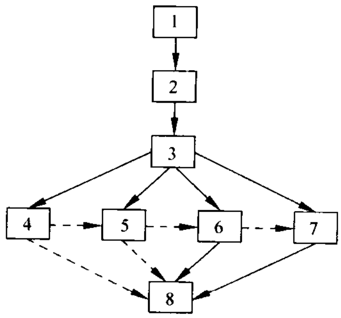
第 6 章类似于线性系统理论中转移矩阵的左右分解，使用非线性全通（内外）因子分解来处理非线性问题；这种分解被用来构造非线性不确定模型，以获得起稳定作用控制器的非线性 Youla-Kucera 参量化方法，从而导出非线性系统的最小相因子。

第 7 章论述了非线性状态反馈 H_∞ 控制理论，并推导出输出反馈 H_∞ 控制问题的必要条件。

第 8 章主要讨论 Hamilton-Jacobi 不等式的可解性及其解集结构等问题，重点集中于非线性系统的耗散性与 Hamilton-Jacobi 不等式的关系；线性化系统的耗散性同黎卡梯不等式之间的关系，及其在非线性最优与 H_∞ 控制中的应用。

每章最后部分的说明中都提到了本章引用的主要文献，并对相关的进展情况作了简要介绍，以作为对正文的补充。

本书各章节的联系可用下图来表示：



致谢

本书在写作过程中得到了许多人的帮助。第 3 章建立在我的导师 Jan C. Willems工作的基础上。第 4 章归功于与 Bernhard Maschke、Romeo Ortega 和 Morten Dalsmo 等人富有成效的合作成果；而第 6 章则建立在与

Andrew Paice,Joe Ball 和 Jacquelie Scherpen 等共同研究的基础上。此外我还要感谢和我的同事有益并有启发性的讨论,包括 Peter Crouch,Bill Helton,David Hill,Alberto Isidori, Gjerrit Meinsma,Carsten Scherer,Hans Schumache,Rodolphe Sepulchre,Stefano Stramigioli 以及我的大学同学 Henk Nijmeijer 等人;还要感谢 1994 年春季学期里作为忠实听众的研究生们。特别感谢 Gjerrit Meinsma,因为他耐心地处理各种 Latex 问题。最后,我还要向数学系的教员们表示感谢,因为他们在本书的酝酿中给予了无私的帮助;并对于 Marja Langkamp 以及初版编辑 Marjo Mulder 致以衷心的谢意,他们的辛勤工作使得本书得以问世。

Arjan van der Schaft

1999 年 8 月于 Enschede

目　录

第 1 章　输入输出稳定性

本章将概述有关输入输出稳定性理论的基本概念，研究对象包括输入输出系统以及带有标准闭环反馈结构的输入输出系统。

1.1　L_q 空间及其扩展；输入输出映射

这里考虑以下信号空间：$L_q, q=1,2,\cdots,\infty$，以及它们的扩展

定义 1.1.1　对于 $q\in\{1,2,\cdots\}$，函数① $f:R^+\to R(R^+=[0,\infty))$ 属于集合 $L_q[0,\infty)=L_q$，如果它们可测②并且满足

$$\int_0^\infty |f(t)|^q \mathrm{d}t < \infty \tag{1.1}$$

集合 $L_\infty[0,\infty)=L_\infty$ 包括所有有界可测函数 $f:R^+\to R$，即

$$\sup_{t\in R^+} |f(t)| < \infty \tag{1.2}$$

众所周知，L_q 属于巴拿赫空间（即完备线性赋范空间），其范数定义为

$$\|f\|_q = \left(\int_0^\infty |f(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \quad q=1,2,\cdots \tag{1.3}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |f(t)|$$

定义 1.1.2　给定 $f:R^+\to R$，对于任意 $T\in R^+$，函数 $f_T:R^+\to R$ 定义为

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0\leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T \end{cases} \tag{1.4}$$

并称之为 f 在 $[0,T]$ 处的截断函数。任意给定 $q=1,2,\cdots,\infty$，对于一切可测函数 $f:R^+\to R$，当 $f_T\in L_q$ 对于所有满足 $0\leqslant T<\infty$ 的 T 成立时，则 f 属于 L_{qe}。L_{qe} 称为 L_q 的扩展或者扩展 L_q 空间。

一般地，$L_q\subset L_{qe}$。和 L_q 不同的是，L_{qe} 是线性空间但却不是赋范空间。$\|f_T\|_q$ 是 T 的增函数，并有

$$\|f\|_q = \lim_{T\to\infty} \|f_T\|_q \tag{1.5}$$

其中 $f\in L_q$。

---

① 这里主要指在勒贝格零测集以外相等的函数，也就是说，除了那些测度为零的点集，施加在函数上的条件被认为在所有 $t\in R^+$ 上都是有效的。

② 函数 $f:R^+\to R$ 可测，指在 R^+ 上的分段常值函数序列满足逐点有限（除[illegible]提到的零测集外）。

为了处理多输入多输出系统(MIMO),我们考虑任意一有限维准线性赋范空间V,其范数为$\| \ \|_V$,则$L_q(V)$为满足下式的可侧函数$f:R^+\to V$的集合:

$$\int_0^\infty \| f(t) \|_V^q \mathrm{d}t < \infty , \quad q = 1,2,\cdots,\infty \tag{1.6}$$

定义范数:

$$\| f \|_q = \left(\int_0^\infty \| f(t) \|_V^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.7}$$

这样,对于任意$q=1,2,\cdots,\infty$,$L_q(V)$是一个巴拿赫空间。

扩展空间$L_{qe}(V)$的定义与定义1.1.2类似,即对于$f:R^+\to V$定义截断函数$f_T:R^+\to V$,若对于所有$0\leqslant T\leqslant\infty$有$f_T\in L_q(V)$,则$f\in L_{qe}(V)$。

进一步考虑L_2的情况。此时在式(1.3)中定义的范数$\| f \|_2$和内积的确存在一定的关系:

$$\begin{gathered} < f,g > = \int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t \\ \| f \|_2 = < f,f >^{\frac{1}{2}} \end{gathered} \tag{1.8}$$

这样L_2就构成了希尔伯特空间(定义了内积的完备线性空间)

同样,取V为定义了内积$<,>_V$的有限维线性空间,则$L_2(V)$也是一个希尔伯特空间,其中内积为

$$< f,g > = \int_0^\infty < f(t),g(t) >_V \mathrm{d}t \tag{1.9}$$

其中$f,g\in L_2(V)$。

现在取U为范数$\| \ \|_U$上的m维线性空间,Y为范数$\| \ \|_Y$上的p维线性空间,考虑到输入信号空间$L_{qe}(U)$和输出信号空间$L_{qe}(Y)$,以及输入输出映射:

$$\begin{aligned} G: L_{qe}(U) &\to L_{qe}(Y) \\ u &\mapsto y = G(u) \end{aligned} \tag{1.10}$$

定义 1.1.3 称映射$G:L_{qe}(U)\to L_{qe}(Y)$为因果的(或不具有预测性质的),如果

$$(G(u))_T = (G(u_T))_T, \forall T \geqslant 0, u \in L_{qe}(U) \tag{1.11}$$

引理 1.1.4 称$G:L_{qe}(U)\to L_{qe}(Y)$为因果的,当且仅当

$$u,v \in L_{qe}(U), u_T = v_T \Rightarrow (G(u))_T = (G(v))_T, \forall T \geqslant 0 \tag{1.12}$$

引理1.1.4表明,在区间$[0,T]$上任意给定两个相同的输入信号u和v,如果其对应的输出在同一区间内也相等,那么G是因果的或不可预测的。

例 1.1.5 考虑线性算子$G:L_{qe}\to L_{qe}$,对于核$h(\cdot,\cdot)$,其卷积为

$$(G(u))(t) = \int_0^t h(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.13}$$

则称 G 是因果的，当且仅当

$$h(t,\tau) = 0, \qquad t < \tau \tag{1.14}$$

1.2 L_q 稳定性和 L_q 增益；闭环稳定性

下面介绍输入输出稳定性的定义。

定义 1.2.1 取 $G: L_{qe}(U) \to L_{qe}(Y)$。如果使

$$u \in L_q(U) \Rightarrow G(u) \in L_q(Y) \tag{1.15}$$

则称 G 满足 L_q 稳定，即，G 将子集 $L_q(U) \subset L_{qe}(U)$ 映射到子集 $L_q(Y) \subset L_{qe}(Y)$。

如果存在有限常量 γ_q 和 b_q，对于任何 $T \geqslant 0$ 均有

$$\| (G(u))_T \|_q \leqslant \gamma_q \| u_T \|_q + b_q, \quad \forall u \in L_{qe}(U) \tag{1.16}$$

则称 G 具有有限 L_q 增益。当式(1.16)中的 b_q 为零时，称 G 具有零偏差的有限 L_q 增益。

注意，如果 G 具有有限 L_q 增益，那它自然也是 L_q 稳定的。其证明如下：在式(1.16)中假设 $u \in L_q(U)$，并且令 $T \to \infty$，则

$$\| G(u) \|_q \leqslant \gamma_q \| u \|_q + b_q, \quad \forall u \in L_q(U) \tag{1.17}$$

这意味着对所有 $u \in L_q^m$ 都有 $G(u) \in L_q(Y)$。

进一步，由因果映射式(1.17)也可以得到式(1.16)。

命题 1.2.2 令 $G: L_{qe}(U) \to L_{qe}(Y)$ 是因果的，并且满足式(1.17)。则 G 满足式(1.16)，并具有有限 L_q 增益。

证明 令 $u \in L_{qe}(U)$，那 $u_T \in L_q(U)$，并根据式(1.17)，有

$$\| G(u_T) \|_q \leqslant \gamma_q \| u_T \|_q + b_q$$

因为 G 是因果的，所以 $(G(u_T))_T = (G(u))_T$，同时有

$$\| (G(u))_T \|_q = \| (G(u_T))_T \|_q \leqslant \| G(u_T) \|_q \leqslant \gamma_q \| u_T \|_q + b_q$$

证毕

有时我们用关系这个概念来取代映射。设 R 为 $L_{qe}(U) \times L_{qe}(Y)$ 的子集，那么当 $(u,y) \in R \subset L_{qe}(U) \times L_{qe}(Y)$，我们称 $u \in L_{qe}(U)$ 与 $y \in L_{qe}(Y)$ 相关，并称 R 为关系。

命题 1.2.3 如果

$$(u,y) \in R, u \in L_q(U) \Rightarrow y \in L_q(Y) \tag{1.18}$$

称 $R \subset L_{qe}(U) \times L_{qe}(Y)$ 为 L_q 稳定。如果存在 γ_q, b_q，对所有 $T \geqslant 0$，有

$$(u,y) \in R, u \in L_{qe}(U) \Rightarrow \| y_T \|_q \leqslant \gamma_q \| u_T \|_q + b_q \tag{1.19}$$

则称 R 具有有限 L_q 增益。

当然，任何映射 $G: L_{qe}(U) \to L_{qe}(Y)$ 都定义了一个关系 R_G，即

$$R_G = \{ (u, G(u)) \mid u \in L_{qe}(U) \}$$

反过来却不成立，因为对于一些特定的 $u\in L_{qe}(U)$ 可能不存在 $y\in L_{qe}(Y)$，也可能存在多个使得 $(u,y)\in R$。

定义 1.2.4　设 $G:L_{qe}(U)\to L_{qe}(Y)$ 具有有限 L_q 增益，则 G 的 L_q 增益定义为

$$\gamma_q(G)=\inf\{\gamma_q \mid \exists b_q\}\quad 使得式(1.16)成立 \tag{1.20}$$

类似地，对于具有有限 L_q 增益的关系 $R\subset L_{qe}(U)\times L_{qe}(Y)$，我们也可以定义其 L_q 增益。

注 1.2.5　由于有限维线性空间中的所有范数都是等价的，所以有限 L 增益的属性与 U 和 Y 的范数选择无关。当然，L_q 增益的大小依赖于范数的选择。

到目前为止我们已经讨论了开环稳定性。对于闭环稳定性，我们研究如图 1.1 的标准反馈结构 $\Sigma^f_{G_1,G_2}$，其中 $G_1:L_{qe}(U_1)\to L_{qe}(Y_1)$，$G_2:L_{qe}(U_2)\to L_{qe}(Y_2)$ 为输入输出映射，并且 $U_1=Y_2=:E_1$，$U_2=Y_1=:E_2$。此外，$e_1\in L_{qe}(E_1)$，$e_2\in L_{qe}(E_2)$ 代表注入到闭环结构中的外部信号。

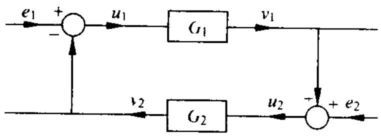


图 1.1　标准反馈结构

闭环系统 $\Sigma^f_{G_1,G_2}$ 采用以下方程组描述：

$$\begin{aligned} u_1&=e_1-y_2, & u_2&=e_2+y_1\\ y_1&=G_1(u_1), & y_2&=G_2(u_2)\end{aligned} \tag{1.21}$$

或者写成矩阵形式：

$$u=e-Fy,\quad y=G(u) \tag{1.22}$$

其中，$\dim U_1=m_1$，$\dim U_2=m_2$，$\dim Y_1=p_1$，$\dim Y_2=p_2$，$m_2=p_1$，$m_1=p_2$

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},\quad e=\begin{bmatrix}e_1\\e_2\end{bmatrix},$$
$$F=\begin{bmatrix}0 & I_{m1}\\ -I_{m2} & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}G_1 & 0\\ 0 & G_2\end{bmatrix} \tag{1.23}$$

这个闭环系统共定义了两个关系。当从式(1.22)中消去 y 可得

$$u=e-FG(u) \tag{1.24}$$

这样就得到了关系

$$R_{eu}=\{(e,u)\in L_{qe}(E_1\times E_2)\times L_{qe}(U_1\times U_2)\mid u+FG(u)\}=e \tag{1.25}$$

此外，若从式(1.22)消去 u，则有

$$y = G(e - Fy) \tag{1.26}$$

得到关系

$$R_{ey} = \{(e,y) \in L_{qe}(E_1 \times E_2) \times L_{qe}(Y_1 \times Y_2) \mid y\} = G(e - Fy) \tag{1.27}$$

定义 1.2.6 当关系R_{eu}和R_{ey}都满足L_q稳定，则闭环系统Σ_{G_1,G_2}也满足L_q稳定；当关系R_{eu}和R_{ey}都具有有限L_q增益，则Σ_{G_1,G_2}也具有有限L_q增益。

实际上，条件还可以进一步简化：

引理 1.2.7 (a) R_{eu}满足L_q稳定$\Leftrightarrow R_{ey}$也满足L_q稳定；

(b) R_{eu}具有有限L_q增益$\Leftrightarrow R_{ey}$也具有有限L_q增益。

证明 (a) 假设R_{eu}满足L_q稳定。令$(e,y)\in R_{ey}$。根据式(1.22)

$$(e, e - Fy) \in R_{eu} \tag{1.28}$$

设$e\in L_q(E_1\times E_2)$。那么，既然R_{eu}是L_q稳定的，则有$e-Fy\in L_q(E_1\times E_2)$考虑到$F$为恒定非奇异阵，这就意味着$y\in L_q(Y_1\times Y_2)$。

相反，设R_{ey}是L_q稳定的。取$(e,u)\in R_{eu}$，并设$e\in L_q(E_1\times E_2)$，于是有$(e,y=G(u))\in R_{ey}$，考虑到R_{ey}的L_q稳定性，则有$y=G(u)\in L_q(Y_1\times Y_2)$因为$F$为恒定矩阵，则表明$e-Fy\in L_q(E_1\times E_2)$。

同理，由任意范数$\| \ \|_q$下的三角不等式$\|a+b\|_q\leqslant\|a\|_q+\|a\|_q$也可以证明(b)。

证毕

注 1.2.8 需要指出的是，这里的推导($\Rightarrow$)以互联矩阵F非奇异为前提，对于更一般的反馈形式就不再有效了。特别是当$e_2=0$时R_{eu}和R_{ey}的L_q稳定性或有限L_q增益特性就不再等价，这一点可以参考注2.2.17

关于因果性我们还有以下比较简单的结果。

命题 1.2.9 令G_1和G_2为因果输入输出映射，则Σ_{G_1,G_2}是因果的，即对于任意$\forall T\geqslant 0$，由$(e,u)\in R_{eu}$，已知u_T只依赖于e_T；由$(e,y)\in R_{ey}$，已知y_T只依赖于e_T。

证明 根据G_1和G_2的因果性，y_{1T}只依赖于e_{1T}和y_{2T}，而y_{2T}只依赖于e_{2T}和y_{1T}，于是y_{1T}、y_{2T}只依赖于e_{1T}和e_{2T}。

证毕

以上定义的关系R_{eu}和R_{ey}并不一定对应于e到u和e到y的映射。事实上，由式(1.24)求解需要下式所示的条件

$$u = (I + FG)^{-1} e \tag{1.29}$$

但是，$I+FG$的逆不一定存在。由式(1.26)消去y也存在很多的问题(特别考虑到G通常是非线性的)。

注 1.2.10 如果R_{ey}定义了从$e=(e_1,e_2)$到$y=(y_1,y_2)$的输入输出映射

G,并且 G_1 和 G 是因果的,则根据命题 1.2.9 得出,G 是一个因果映射。这个结论对于 R_{eu} 同样满足。

现在考虑如下的状态空间系统:

$$\Sigma: \begin{array}{l} \dot{x}=f(x,u),\ u\in U^m \\ y=h(x,u),\ y\in Y^p \end{array} \tag{1.30}$$

其中 U,Y 为有限维赋范线性空间(维数分别为 m 和 p),$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 为某些 n 维状态空间流形 X 的局部坐标,同时 f,h 为足够光滑的映射。对于任一初始条件 $x_0\in X$,通过把任意一种输入函数 $u\in L_{qe}(U)$ 代入方程 $\dot{x}=f(x,u)$ 中,并由初始条件 $x=x_0$,可解出微分方程的状态轨迹;再把 u 以及求出的状态空间轨迹 x 代入 $y=h(x,u)$ 中求得输出函数 y,这样,从原理上说,Σ 定义了输入输出映射 $G_{x_0}:L_{qe}(U)\to L_{qe}(Y)$。但是,微分方程可能存在有限时逸,通常必须采用附加条件来保证对于每个 $u\in L_{qe}(U)$ 均有 $y\in L_{qe}(Y)$。下面假定,对于任意的 x_0,输入输出映射 $G_{x_0}:L_{qe}(U)\to L_{qe}(Y)$ 应该为严格定义的。在此条件下,对定义 1.2.1 进行扩展。

定义 1.2.11 如果对于任意初始条件 $x_0\in X$,输入输出映射 G_{x_0} 将 $L_q(U)$ 映射到 $L_q(Y)$,则称状态空间系统 Σ 是 L_q 稳定的。如果存在一个有限常量 γ_q,使得对于任一初始条件均能找到一个有界常量 $b_q(x_0)$,且满足

$$\| G_{x_0}(u)_T \|_q\leqslant\gamma_q \| u_T \|_q+b_q(x_0),\ \forall u\in L_{qe}(U),\ \forall T\geqslant 0 \tag{1.31}$$

则称系统 Σ 具有有限 L_q 增益。

接下来,我们将反馈结构(图 1.1)中的输入输出映射 Σ_1^f 替换成状态空间系统,表示如下:

$$\Sigma_i: \begin{array}{l} \dot{x}_i=f_i(x_i,u_i),\quad u_i\in U^{m_i} \\ y_i=h_i(x_i,u_i),\quad y_i\in Y^{p_i} \end{array},\quad i=1,2 \tag{1.32}$$

其中 $p_1=m_2,p_2=m_1$,并重新考虑其反馈互联

$$u_1=e_1-y_2,\quad u_2=e_2+y_1 \tag{1.33}$$

闭环系统用 $\Sigma^f_{\Sigma_1\Sigma_2}$ 表示。对于每一对初始条件 $x_{0i}\in X_i,i=1,2$,我们同式(1.25)和(1.27)一样,分别定义关系 $R_{eu}^{x_{01}x_{02}}$ 和 $R_{ey}^{x_{01}x_{02}}$。

定义 1.2.12 如果对任意初始状态 $(x_{01},x_{02})\in L_q(X_1\times X_2)$,关系 $R_{eu}^{x_{01}x_{02}}$ 和 $R_{ey}^{x_{01}x_{02}}$(或者由引理 1.2.7,其中某一个)均满足 L_q 稳定,则闭环系统 $\Sigma^f_{\Sigma_1\Sigma_2}$ 也是 L_q 稳定的。

在状态空间中,对于每一对初始条件 $x_{0i}\in X_i,i=1,2$,要使关系 $R_{eu}^{x_{01}x_{02}}$ 和 $R_{ey}^{x_{01}x_{02}}$ 分别对应于从 e 到 u 和从 e 到 y 的映射,这相对来说比较容易的,事实上,闭环系统 $\Sigma^f_{\Sigma_1\Sigma_2}$ 可以采用如下方程组来描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=f_1(x_1,u_1) \\ \dot{x}_2=f_2(x_2,u_2) \end{cases}$$

$$
\begin{cases} y_1 = h_1(x_1, u_1) \\ y_2 = h_2(x_2, u_2) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} e_1 = h_2(x_2, u_2) + u_1 \\ e_2 = -h_1(x_1, u_1) + u_2 \end{cases}
\tag{1.34}
$$

如果两个映射 $h_i(x_i, u_i), i=1,2$ 中至少有一个与 u_i 无关，那么我们就可以立即消去 u_1, u_2。例如，当 h_1 不依赖于 u_1 时，式(1.34)就可以写成

$$
\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, e_1 - h_2(x_2, e_2 + h_1(x_1))) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, e_2 + h_1(x_1)) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} y_1 = h_1(x_1) \\ y_2 = h_2(x_2, e_2 + h_1(x_1)) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} u_1 = e_1 - h_2(x_2, e_2 + h_1(x_1)) \\ u_2 = e_2 + h_1(x_1) \end{cases}
\tag{1.35}
$$

这样，在前面所提及的适当技术条件下，可以定义从 e 到 u 和从 e 到 y 的输入输出映射。如果 h_1 和 h_2 均分别依赖于 u_1, u_2，必须考察其他条件来保证式(1.34)中的最后两个方程表示的从 u 到 e 的静态映射(至少局部)是可逆的这通过计算从 u 到 e 映射的雅可比矩阵

$$
\begin{pmatrix} I_{m_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial u_2}(x_2, u_2) \\ -\dfrac{\partial h_1}{\partial u_1}(x_1, u_1) & I_{m_2} \end{pmatrix}
\tag{1.36}
$$

来完成。对于所有 x_1, x_2, u_1, u_2，根据反函数定理，若雅可比矩阵可逆性，则 u 在局部区间内可表示成 e 的函数。最后，我们很容易看出，对于所有 x_1, x_2, u_1, u_2，式(1.36)中雅可比阵的可逆性与矩阵 $I_{m_2} + \dfrac{\partial h_1}{\partial u_1}(x_1, u_1)\dfrac{\partial h_2}{\partial u_2}(x_2, u_2)$ 或者 $I_{m_1} + \dfrac{\partial h_2}{\partial u_2}(x_2, u_2)\dfrac{\partial h_1}{\partial u_1}(x_1, u_1)$ 的可逆性是等价的。

关于状态空间系统 Σ 下的输入输出映射 G_{x_0} 所对应的输入—输出稳定性，与不受控系统 $\dot{x} = f(x, 0)$ 中的李雅普诺夫稳定性之间的复杂关系，可以参考相关文献(如 Vidyasagar,[203])，在第3章，从耗散系统理论出发，也涉及了相关内容。

1.3 第1章的说明

1. 本章内容主要建立在文献 Vidyasagar,[203]上；
2. 对于状态空间系统的李雅普诺夫稳定性，可以参考 Khalil,[91], Vidyasagar,[203]和 Sontag,[186]等相关著作。在这些书中也提到了有关输入输出稳定性和状态空间系统稳定性的联系。

第 2 章　输入输出映射的小增益和无源性

在这一章中，我们将讨论闭环系统稳定性中的经典小增益定理和无源性定理（2.1 节，2.2 节）。2.3 节将讨论以散射形式表达的 L 增益和无源性之间的关系。

2.1　小增益定理

小增益定理是一个容易理解并且应用广泛的定理，表述如下

定理 2.1.1　对于图 1.1 所示的闭环系统 $\Sigma^f_{G_1,G_2}$，令 $q\in\{1,2,\cdots,\infty\}$。假设 G_1 和 G_2 具有有限 L_q 增益，分别为 $\gamma_q(G_1)$，$\gamma_q(G_2)$。如果

$$\gamma_q(G_1)\cdot\gamma_q(G_2)<1 \tag{2.1}$$

则闭环系统 $\Sigma^f_{G_1,G_2}$ 也具有有限 L_q 增益（见定义 1.2.6）。

注 2.1.2　不等式（2.1）被称为小增益条件。如果"整个环的增益"足够"小"（即，小于 1），那么如图 1.1，两个稳定的系统 G_1 和 G_2 互联将构成一个稳定的闭环系统。注意，小增益定理隐含着一个固有的鲁棒性质：对于所有受扰的输入输出映射，只要满足小增益条件，闭环系统就保持稳定。

证明　根据 $\gamma_q(G_1)$，$\gamma_q(G_2)$ 的定义和式（2.1）可以知道，存在常数 γ_{1q}，γ_{2q}，b_{1q}，b_{2q} 且 $\gamma_{1q}\cdot\gamma_{2q}<1$，使得对于所有的 $T\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}&\|(G_1(u_1))_T\|_q\leqslant\gamma_{1q}\|u_{1T}\|_q+b_{1q},\quad\forall u_1\in L_{qe}(U_1)\\&\|(G_2(u_2))_T\|_q\leqslant\gamma_{2q}\|u_{2T}\|_q+b_{2q},\quad\forall u_2\in L_{qe}(U_2)\end{aligned} \tag{2.2}$$

为了书写简便，略去下标"q"。因为 $u_{1T}=e_{1T}-(G_2(u_2))_T$，所以

$$\|u_{1T}\|\leqslant\|e_{1T}\|+\|(G_2(u_2))_T\|\leqslant\|e_{1T}\|+\gamma_2\|u_{2T}\|+b_2$$

对于 $\|u_{2T}\|$ 也可以得到类似的不等式。根据 $\gamma_2\geqslant 0$，将这些不等式合并，得到

$$\|u_{1T}\|\leqslant\gamma_1\gamma_2\|u_{1T}\|+(\|e_{1T}\|+\gamma_2\|e_{2T}\|+b_2+\gamma_2 b_1)$$

因为 $\gamma_1\cdot\gamma_2<1$，所以

$$\|u_{1T}\|\leqslant(1-\gamma_1\gamma_2)^{-1}(\|e_{1T}\|+\gamma_2\|e_{2T}\|+b_2+\gamma_2 b_1) \tag{2.3}$$

同理可以得到

$$\|u_{2T}\|\leqslant(1-\gamma_1\gamma_2)^{-1}(\|e_{2T}\|+\gamma_1\|e_{1T}\|+b_1+\gamma_1 b_2) \tag{2.4}$$

这就证明了关系 R_{eu} 具有有限 L_q 增益，再由引理 1.2.7 可得 $\Sigma^f_{G_1,G_2}$ 具有有限 L_q 增益。

证毕