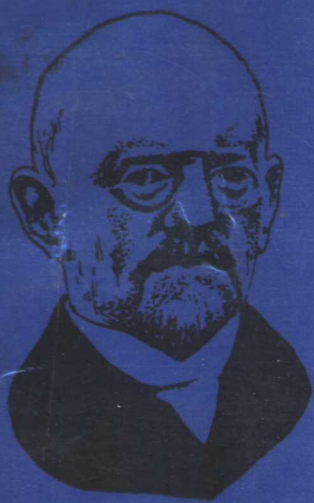


世界数学



希尔伯特第十问题

辽宁教育出版社

名题欣赏

世界数学名题欣赏丛书

希尔伯特第十问题

胡久稔 编著

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

希尔伯特第十问题

胡久松 编著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数:100,000 开本:787×1092¹/₃₂ 印张:6¹/₂ 插页:4

印数:1—4,029

1987年10月第1版

1987年10月第1次印刷

责任编辑:俞晓群 谭 坚 责任校对:王淑芬

封面设计:安今生

插 图:安 迪

统一书号:7371·501

定价:1.35 元

ISBN 7-5382-0174-2

内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。所谓希尔伯特第十问题，是1900年德国数学家希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上提出的关于“刁藩图方程解的判定问题”，也就是判定不定方程是否有解的方法问题。这一问题虽已在1970年得到否定的解决，但是在数学中产生了十分深远的影响。本书介绍了第十问题的内容和研究情况，阐述了它对于整个当代数学研究的促进作用，理论严整，论述生动。

Summary

This book is one of A Series World Famous Mathematics Appreciation. So-called Hilbert's tenth problem is the decidability problem of Diophantus solution of equations, raised by German mathematician Hilbert at International Mathematician Congress in Paris in 1900. That is the problem of deciding whether indefinite equation has solution. Though the problem was given a negative solution in 1970, it has brought about a profound and lasting influence in mathematics. The book introduces the content and study situation of the tenth problem, and sets forth its promoting function to the whole research on modern mathematics. The theory is in neat formation and the exposition is vivid.

序 言

1900年，德国大数学家希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上提出了23个数学问题，揭开了二十世纪数学发展的一页，激励着有为的数学家们去思索，去探求，去拼搏！而第十问题就是其中精采的一个。

人们知道，数学问题作为数学研究的对象，也是推动数学发展的动力，人们为了解决数学难题，要引入新概念，寻找新的工具，这方面的例子是不少的。

关于解一个特定的刁藩图方程本是一个古老的数学问题，某些两个变元的二次方程人们早就发现了它们的解法，而对两变元的三，四次刁藩图方程并未发现一般的解的方法，对特定的一个这样的刁藩图方程，证明它是否有解，或当有解时求出它们的解，也不是一件容易的事。

然而，在本世纪六十年代末，英国数学家贝克成功地对一类两变元刁藩图方程给出了一个有效的方法，可求出它们的一切解，他成功地确定

了一个仅依赖于次数 n 及多项式系数的上界 B ，
使对任意解 (x_0, y_0) 有：

$$\max(|x_0|, |y_0|) \leq B$$

由于贝克的这一出色工作，他获得了1970年的菲尔兹奖。

希氏第十问题的解决是集体的智慧，使人惊奇的是只用了一点数理逻辑和初等数论就解决了这一世界大难题。美国数学家戴维斯，鲁宾逊和普特南作出了突出的贡献，而最终的一步是在1970年由苏联青年数学家马吉雅塞维奇完成的。

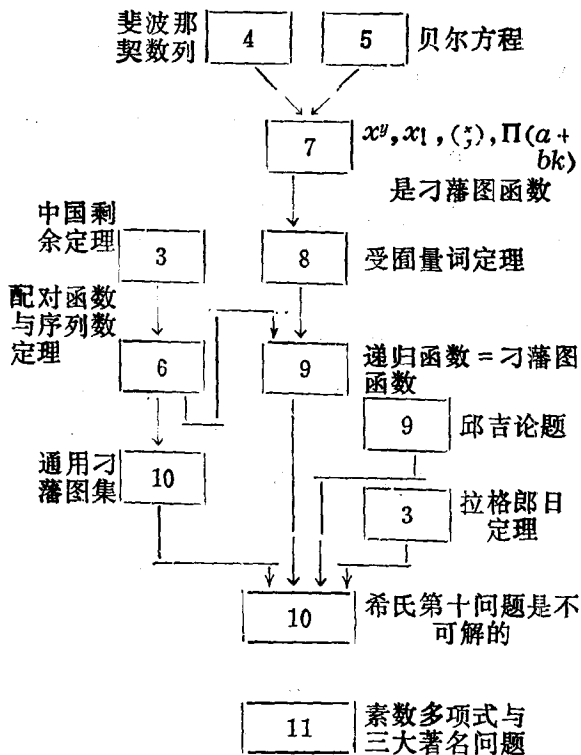
本书做为读者欣赏的一个数学问题，书中用到的知识力图自封，它不需要读者有什么特殊的数学修养。为了便于读者阅读，我们还给了一个全书内容的联系图，以供参考。

在本书的写作过程中，曾和北京大学吴允曾教授多次交谈，并得到中国科学院软件所研究员杨东屏老师及南开大学徐书润副教授的帮助，趁此深深表示感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误望读者指正。

胡久稔

1987年2月



本书内容逻辑联系图 (图中数字为章号)



作者简介

胡久稳，1939年2月生，河北省雄县人。1963年7月毕业于中国科学技术大学应用数学系应用数学专业，分配在中国科学院沈阳计算技术研究所工作。二十多年来，参加了多台计算机的设计，在《数学通报》、《数学的实践与认识》上发表论文三篇，编著书《数学趣题与BASIC程序》。现为南开大学数学研究所副研究员，从事计算机科学、数理逻辑的研究与教学工作。

世界数学名题欣赏丛书

费马猜想

黎曼猜想

连续统假设

希尔伯特第十问题

欧几里得第五公设

哥德尔不完全性定理

不动点定理

无处可微的连续函数

科克曼女生问题

斐波那契数列

哥德巴赫猜想

置换多项式及其应用

素数判定与大数分解

货郎担问题

目 录

一	希尔伯特第十问题的提出	1
二	数理逻辑有关基础知识	9
	1. 命题及其联结词	11
	2. 命题形式的变换	13
	3. 个体词、谓词与量词	18
	4. 谓词演算的推理规则	21
	5. 前束范式定理	23
三	中国剩余定理与拉格郎日定理	27
	1. 中国剩余定理	29
	2. 拉格郎日定理	32
四	斐波那契数列	39
	1. 斐波那契数列	41
	2. 斐波那契数的可除性	45
	3. 几个重要的引理	49
五	贝尔方程	55
	1. 阿基米德分牛问题	57
	2. 贝尔方程	60

六	刁藩图集与刁藩图函数	75
	1. 刁藩图集	77
	2. 刁藩图函数	82
	3. 普特南定理	88
七	幂函数是刁藩图的	91
	1. 偶角标斐波那契函数是刁藩图的	96
	2. 幂函数是刁藩图的	101
	3. 三个重要的刁藩图函数	109
八	受围量词定理	117
	1. 受围量词定理的原始证明	119
	2. 受围量词定理的一个完美形式	126
九	递归函数	133
	1. 原始递归函数	137
	2. 递归函数	153
十	第十问题是不可解的	161
	1. 通用刁藩图集	163
	2. 归约	169
	3. 递归可枚举集	172
十一	素数表示与著名数学问题	177
	1. 素数的刁藩图表示	179
	2. 三大著名问题	184
	3. 两个未解决的问题	192
	参考文献	193
	中外人名译名索引	196

Contents

I	Introduce Hilbert's tenth problem.....	1
II	Some basic knowledge of mathematical logic	9
	1. Proposition and it's connectives	11
	2. Transform of propositional form	13
	3. Individual, Predicate and quantifier	18
	4. Rules of inference for predicate Calculus.....	21
	5. Prenex normal form theorem.....	23
III	Chinese remainder theorem and Lagrange's theorem.....	27
	1. Chinese remainder theorem.....	29
	2. Lagrange's theorem	32
IV	Fibonacci sequence.....	39
	1. Fibonacci sequence	41

2. Divisibility of Fibonacci number	45
3. Several important lemma	49
V Pell's equations	55
1. Cow Problem of Archimedes	57
2. Pell's equations	60
VI Diophantine sets and Diophantine	
functions	75
1. Diophantine sets	77
2. Diophantine functions	82
3. Putnam's theorem	88
VI Exponential function is Diophantine	
.....	91
1. Fibonacci function of even index	
is Diophantine	96
2. Exponential function is Diophantine	
.....	101
3. Three important Diophantine functions	
.....	109
VI The bounded quantifier theorem	117
1. Initial form of the bounded quantifier theorem	119
2. Perfect form of the bounded quantifier theorem	126

IX	Recursive function	133
	1. Primitive recursive function ...	137
	2. Recursive function.....	153
X	Tenth problem is unsolvable	161
	1. Universal Diophantine set	163
	2. Reduction	169
	3. Recursively enumerable set.....	172
XI	Representation of primes and famous mathematical problem	177
	1. Diophantine representation of pri- mes	179
	2. Three famous problems	184
	3. Two open problems	192
	References	193
I	Index of names	196

一 希尔伯特第十问题的提出





我们都知道，从古希腊时代，人们就对不定方程的整数解感兴趣，人们先从一个几何学上的定理：一个直角三角形，站在两直角边上的正方形的面积之和恰等于站在斜边上的正方形的面积。这就是毕达格拉斯定理，又称商高定理。

上述定理用代数的语言说是方便而直观的，即令 a, b 为直角三角形的两直角边， c 为斜边，则

$$a^2 + b^2 = c^2$$

人们自然想到，变元 x, y, z 取正整数的不定方程：

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

它的解本身就包含有美的享受，而且是毕氏几何定理的“数”的体现。人们对(1)的整数解的直观概念可追溯得更早，古巴比伦人在公元前两千多年就发现了3, 4, 5是它的一组解，并聪慧地用绳索分别3, 4, 5等分再对折以制造出一个直角(如图1.1)，这对测量土地是十分必要的。