初中三年级（下）

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会
编

清华大学出版社

中学数学系列讲座

初中三年级

（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是初中三年级下学期学生的课外阅读书．目的是扩大学生的知识面，丰富解题方法，配合毕业班总复习，帮助学生总结解综合题的方法与规律，提高数学的分析解题能力．

全书共九讲，内容包括圆、轨迹、辅助线、论证几何命题的方法等．每讲都有方法介绍、例题分析、规律总结，并配有练习题与答案．本书也可供自学青年及初中数学教师参考，并为各校开展学生课外数学小组活动提供素材．

中学数学系列讲座

初中三年级（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

★

清华大学出版社出版
北京　清华园
北京昌平振南排版厂排版
河北省香河县印刷厂印装
新华书店北京发行所发行

★

开本：787×1092　1/32　印张：4.5　字数：101千字
1989年2月第1版　1989年2月第1次印刷
印数：00001－30000　定价：1.20元

ISBN 7-302-00350-5/O·63

前 言

《中学数学系列讲座》，共分11册：初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册.

这套书是以"十年制数学教学大纲"为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成. 它是一套具有提高性质的课外读物. 用以扩大学生的知识面，开拓视野，提高学生分析问题与解决问题的能力. 同时，考虑到初三与高三的特殊性. 我们还着重总结了分析与解决数学问题的各种方法，有助于学生在总复习中得到巩固与提高.

本"系列讲座"以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣与需要灵活选读. 亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材.

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导. 由于经验不足，一定有不少缺点. 请读者批评指正，以便今后修改与补充.

"中学数学系列讲座"编委会

《中学数学系列讲座》
编委会名单

目　录

第一讲

圆（一）

陆 乘

在平面几何中，除了研究三角形、四边形等直线形外，还研究了曲线形，就是圆.

对于圆，除了要掌握它的定义、性质以及圆和其它图形的关系外，还要注意圆的知识的应用．应用圆的知识解题时，分析方法与推理都和直线形是一样的，只不过要考虑圆的特殊性质，还要和以前的知识联系起来，综合性较强，如在圆中证两条线段相等，可以应用"两个三角形全等的对应边相等"；"同一三角形等角对等边"，"平行四边形的对边相等"等方法；若线段是弦，还可以应用所对的弧，圆心角，或弦心距等性质．此外，也可以利用圆的其它性质．这样看来，在圆中证两条线段相等的方法比以前更多了，至于使用什么方法，要结合具体问题考虑，下面通过例题加以说明.

例 1　已知：AD为$\odot O$的直径．AB，AC为弦，且AD平分$\angle BAC$.

求证：$AB=AC$.

证法1：如图1.1，作$OE\perp AB$于E，$OF\perp AC$于F．$\because$ AD平分$\angle BAC$，$\therefore$ $OE=OF$.

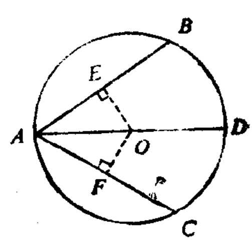

图 1.1

∴ $AB=AC$.（同圆中，弦心距相等则弦相等.）

证法2：如图1.2，∵ AD平分$\angle BAC$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$.（同圆中，相等的圆周角所对的弧相等.）

又∵ AD为$\odot O$的直径，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

∴ $AB=AC$.（同圆中，等弧对等弦.）

证法3：如图1.3，连结BD，DC.

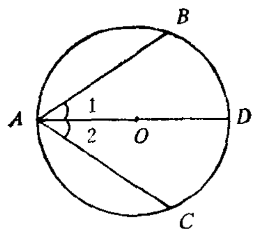

图 1.2

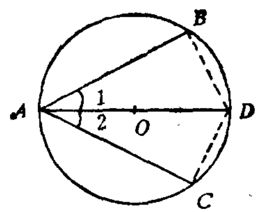

图 1.3

∵ AD为直径，∴ $\angle ABD=\angle ACD=90°$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle BDA=\angle CDA$.

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.（同圆中，等圆周角对等弧.）

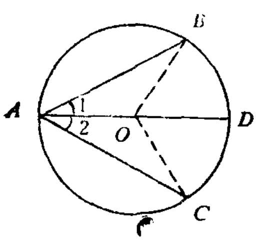

图 1.4

证法4：如图1.4，连结OB，OC.

∵ $AO=OB=OC$，

∴ $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$，

∴ $\angle AOB=180°-2\angle 1$，

$\angle AOC=180°-2\angle 2$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle AOB=\angle AOC$. ∴ $AB=AC$.

（同圆中，圆心角等所对的弦等.）

证法5：如图1.5，连结BC.

∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$.

∵ AD为直径，∴ AD垂直平分 BC平.（分弧的直径，垂直平分这条弧所对的弦.）

∴ $AB=AC$.

证法6：如图1.6，连结OB，OC.

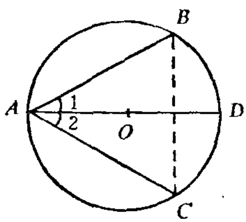

图 1.5

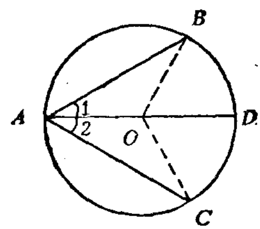

图 1.6

∵ $AO=OB=OC$，∴ $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$.

∵ AD平分$\angle BAC$，∴ $\angle 1=\angle 2$，∴$\angle B=\angle C$.

∴ $\triangle AOB\cong\triangle AOC$.（角、角、边）

∴ $AB=AC$.

证法7：如图1.7，作$OE\perp AB$于E，$OF\perp AC$于F，

则 $AE=\dfrac{1}{2}AB$，$AF=\dfrac{1}{2}AC$.

（垂径定理.）

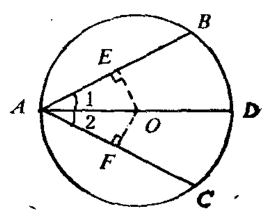

图 1.7

∵ $\angle 1=\angle 2$，$AO=AO$，

∴ $\triangle AOE\cong\triangle AOF$.

∴ $AE=AF$，∴ $AB=AC$.

证法8：如图1.8，连结BD，DC.

∵ AD为直径，∴ $\angle ABD=\angle ACD=90°$.

∵ $\angle 1=\angle 2$, $AD=AD$,

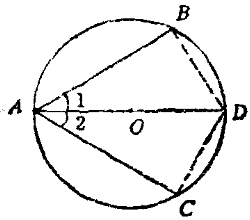

图 1.8

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.(斜边、一锐角.)

∴ $AB=AC$.

此例证明并不难，通过上述证法，可以总结在圆中证明两条线段相等的方法，如证法1至4，都是利用圆的性质，证明弦相等的一般方法；证法5至证法8，是利用圆的性质推出条件，再证明两个三角形全等.

由证法中也可以看到，在圆中经常添加的辅助线，如连结圆上两点（证法7），出现弦；连结圆心和圆上一点（证法4，6），出现同圆半径；作弦心距（证法1,7）.又如在有直径的情况下，往往加辅助线，使之构成直径上的圆周角（证法3,8）.

例 2 已知：AB与$\odot O$切于A，OB交$\odot O$于C，$AD\perp BO$于D.

求证：$\angle CAD=\angle CAB$.

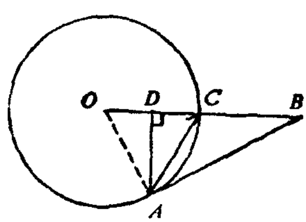

图 1.9

证法1，如图1.9，连结OA.

∵ AB与$\odot O$切于A.

∴ $OA\perp AB$.

∴ $\angle CAB+\angle OAC=90°$.

∵ $AD\perp OB$,

∴ $\angle CAD+\angle OCA=90°$.

∵ $AO=CO$，∴ $\angle OAC=\angle OCA$,

∴ $\angle CAB=\angle CAD$.

证法2：如图1.10，连结OA，作$CF\perp AB$于F.

∵ AB与$\odot O$切于A,

∴ $OA\perp AB$,

∴ $OA\parallel CF$,

∴ $\angle OAC=\angle ACF$.

又 ∵ $OA=OC$,

∴ $\angle OAC=\angle OCA$,

∴ $\angle OCA=\angle ACF$.

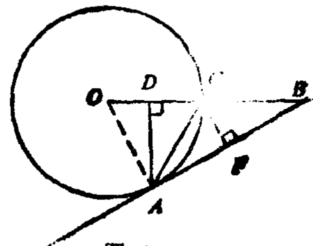

图 1.10

∴ 在Rt△ACD 和 Rt△ACF中，$\angle CAD=\angle CAF$，即$\angle CAD=\angle CAB$.

证法3：如图1.11，延长BO与$\odot O$交于E，连结EA.

∵ AB与$\odot O$切于A， ∴ $\angle CAB=\angle E$.

∵ EC为直径， ∴ $\angle EAC=90°$.

又∵ $AD\perp EC$， ∴ $\angle CAD=\angle E$.

∴ $\angle CAD=\angle CAB$.

证法4：如图1.12，延长AD与$\odot O$交于E.

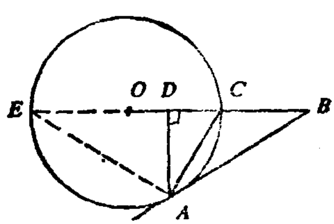

图 1.11

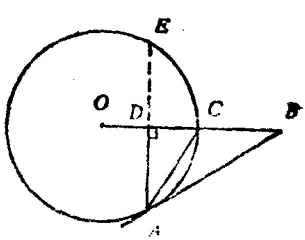

图 1.12

∵ $AD\perp OB$， ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

∴ $\angle DAC=\angle CAB$.

证法5：如图1.13，延长AD与$\odot O$交于E，连结CE.

$\because$ $AD\perp OB$, $\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

$\therefore$ $\angle E=\angle DAC$.

$\because$ AB与$\odot O$切于A，$\therefore$ $\angle CAB=\angle E$,

$\therefore$ $\angle CAD=\angle CAB$.

证法6：如图1.14，作$CE\perp OB$，则CE与$\odot O$相切.

又$\because$ AB与$\odot O$相切，$\therefore$ $\angle CAB=\angle ACE$.

$\because$ $AD\perp OB$, $\therefore$ $DA\parallel CE$.

$\therefore$ $\angle CAD=\angle ACE$. $\therefore$ $\angle CAD=\angle CAB$.

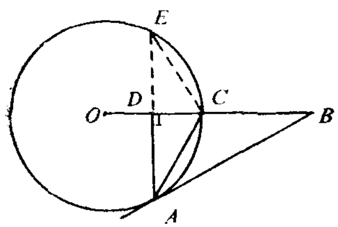

图 1.13

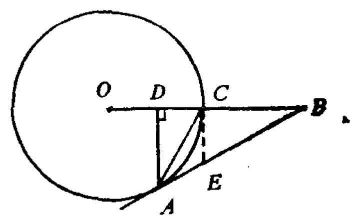

图 1.14

由该例的证法中可以看到，在圆中证两个角相等，可以用"同一三角形等边对等角"，"两个全等三角形的对应角相等"的三角形性质；也可利用同圆中两条弧等所对的圆周角或弦切角相等的性质；如证法6则利用了同弧上的两个弦切角相等.

在圆的证题中，遇有切线条件，往往作出过切点的半径，推出垂直关系；另外还经常使用垂径定理，推出等弧或等弦.

在圆的证题中，还经常会遇到证"两条弧相等"，"直线与圆相切"或"四点共圆"等类型的题，这些内容在以前是没有

见过的，当然需要利用圆的有关性质来解决，不过在证题过程中，往往要联系到已学过的知识，才能推得结论，下面通过例题加以说明．

例 3 已知BC为$\odot O$的直径，$AO\perp BC$．

求证： $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$．

证法1： 如图1.15，$\because$ O为BC中点，$AO\perp BC$，

$\therefore$ $AB=AC$．

$\therefore$ $\angle C=\angle B$，$\therefore$ $\overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{CED}$，$\therefore$ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$．

又 $\because$ $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CF}$，$\therefore$ $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$．

证法2： 如图1.16，连结OD，OE．

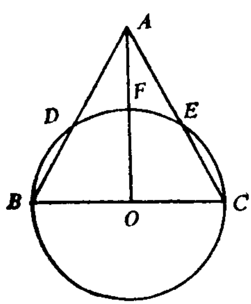

图 1.15

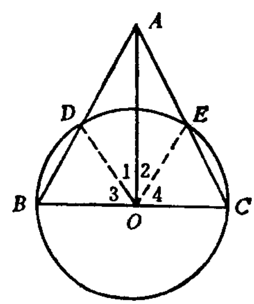

图 1.16

$\because$ AO垂直平分BC，$\therefore$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle B=\angle C$．

$\because$ $OB=OD=OE=OC$，$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$．

证法3： 如图1.17，连结DE．

$\because$ AO垂直平分BC，$\therefore$ $AB=AC$．$\therefore$ $\angle B=\angle C$．

又$\because$ $\angle AED=\angle B$，$\therefore$ $\angle AED=\angle C$．$\therefore$ $DE\parallel BC$．

$\therefore\quad AO\perp DE.\ \therefore\quad \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}.$

证法4：如图1.18，连结BF、CF.

$\because\quad AO$垂直平分BC，$\therefore\quad AB=AC$，$FB=FC$.

$\therefore\quad \angle ABC=\angle ACB$，$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$，$\therefore\quad \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$.

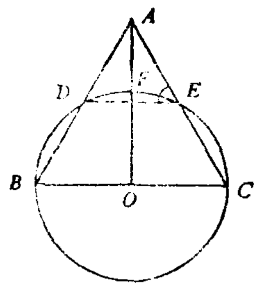

图 1.17

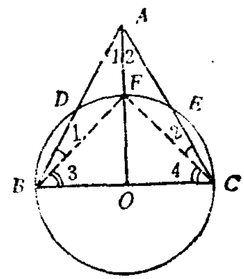

图 1.18

证法5：如图1.19，连结DF，EF.

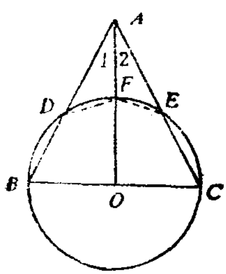

图 1.19

$\because\quad AO$垂直平分BC，

$\therefore\quad AB=AC$，$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$.

又$\because\quad AD\cdot AB=AE\cdot AC$，

$\therefore\quad AD=AE$.而AF公用，

$\therefore\quad \triangle ADF\cong\triangle AEF$.

$\therefore\quad DF=EF$，$\therefore\quad \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$.

证法6：如图1.17，连结DE.

$\because\quad AD\cdot AB=AE\cdot AC$，

$\therefore\quad AD=AE$，$\therefore\quad AO\perp DE$.

先证出$DE\parallel BC$后，可得$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$，则$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EF}$.

由该例不同的证法中，可归纳出证明“两条弧相等”的方法有

（1）同圆或等圆中相等的圆周角所对的弧相等，如证法1，4.

（2）垂直于（或平分弦）的直径平分弦所对的弧，如证法3.

（3）平行弦所夹的弧相等，如证法6.

（4）在同圆或等圆中，圆心角（或弦或弦心距）相等，所对的弧也相等，如证法2,5.

当然在证题过程中，也用到了以前学过的垂直平分线的性质；同一三角形等边对等角；三角形内角和定理以及三角形全等.

例 4 已知，如图1.20，⊙O和⊙O_1相交于A和B，外公切线切两圆于C和D.

求证：$AC:BC=AD:BD$.

分析：证比例式，一般先考虑证两个三角形相似，虽然AC、BC，AD和BD分布在两个三角形$\triangle ACD$和$\triangle BCD$，或$\triangle ACB$和$\triangle ABD$中，但这两组三角形都无法证相似. 最好找到和它们都相等的第三个比，为此把AC和BC，AD和BD分别组在某两个相似三角形中. 作公共弦BA并延长交CD于E，这样可得出$\triangle CEA\backsim\triangle BEC$，则$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{EC}$. 同样，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{ED}$，只要证出$EC=ED$，就可得出

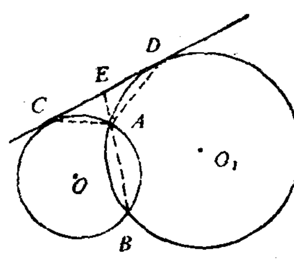

图 1.20

结论.

证明： 连结BA并延长交CD于E（证略）.

例 5 如图1.21，已知两圆内切于P，大圆的弦AB切小圆于C。PA，PB分别与小圆交于E，F.

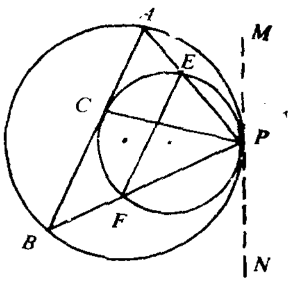

图 1.21

求证： $AC\cdot PF=CB\cdot PE$.

证明： 连结EF，过P点作两圆的公切线MN，则$\angle MPA$是两个圆的弦切角，

$\therefore \quad \angle MPA=\angle B$，

$\angle MPA=\angle PFE$，

$\therefore \quad \angle B=\angle PFE$，$\therefore \quad EF\parallel AB$，

$\therefore \quad \dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$.

连结PC. $\because AB$与小圆切于C，

$\therefore \quad \angle ACP=\angle MPC$.

又$\triangle BCP$的外角$\angle ACP=\angle CPB+\angle B$，

$\angle MPC=\angle APC+\angle MPA$，

$\therefore \quad \angle CPB=\angle APC$.

$\therefore \quad \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AC}{CB}$，$\therefore \dfrac{AC}{CB}=\dfrac{PE}{PF}$，

$\therefore \quad AC\cdot PF=CB\cdot PE$.

说明：两圆相切，公切线是常添的辅助线，如上题中添了公切线MN后，$\angle MPA$既是小圆的弦切角，又是大圆的弦切角，这样就可以把两圆的圆周角连上关系，否则此题无法解决.

例 6 如图1.22，已知$\odot O$与$\odot O_1$外切于P，外公切线切两圆于A和B，$PC\perp AB$于C，$\odot O$半径为R，$\odot O_1$半径为$r(R>r)$，$PC=d$.

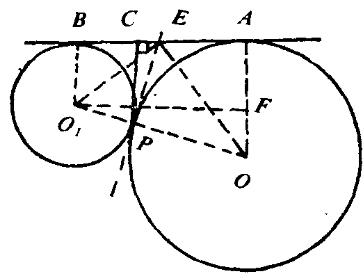

图 1.22

求证：$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{R}=\dfrac{2}{d}$.

分析：遇$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{R}=\dfrac{2}{d}$，往往将其变形，即$\dfrac{R+r}{Rr}=\dfrac{2}{d}$，$d(R+r)=2Rr$. 而$OO_1=R+r$，$PC=d$. 若把$OO_1$和$PC$分别组成在和$R$，$r$有关的两个相似三角形中，即可推出结论. 故得证法如下.

证明：$\because$ $\odot O$，$\odot O_1$外切于P，连结O_1O必过P点. 过P作两圆内公切线交AB于E，则$PE\perp O_1O$，$PE=AE=BE$，EO，EO_1分别平分$\angle AEP$，$\angle BEP$.

$\therefore$ $\angle O_1EO=90°$，根据射影定理得$EP^2=O_1P\cdot PO=Rr$.

连结O_1B，OA，作$O_1F\perp AO$于F，则$O_1F=AB$，

$\therefore$ $\triangle O_1OF\backsim\triangle PEC$.

$\therefore$ $\dfrac{O_1O}{O_1F}=\dfrac{PE}{CP}$，即$\dfrac{O_1O}{AB}=\dfrac{PE}{CP}$.

$\therefore$ $\dfrac{R+r}{2PE}=\dfrac{PE}{d}$，$\therefore$ $d(R+r)=2Rr$.