

刘宏才 编

理论力学理论与 与解题指南

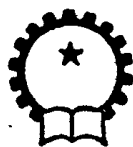
(中册)

机械工业出版社

理论力学理论与解题指南

(中册)

刘宏才 编



机械工业出版社

本书是为适应我国社会主义现代化建设和高等教育发展的需要编写的教学参考书。

全书分上、中、下三册。上册内容为运动学和静力学；中册内容为动力学；下册内容为动力学专题，其中包括虚位移原理和动力学普遍方程、拉格朗日方程、振动、质点在有心力场中的运动、非惯性参考系中的动力学、刚体动力学等，共六章。

本书各章内容均由基本理论、解题方法、习题解答三部分组成。

本书概念清晰、推理严谨、内容丰富、深入浅出。全书精心编选了千余道既有广度、又有深度的各类典型习题，通过习题分析与解答，把基本理论、解题方法与习题解答有机地融为一体。全书十分重视学科的科学性、全整性、系统性和实用性，启发读者的思维，开阅读者的视野，提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书对全日制大专院校、电视大学、职工大学、函授大学有关专业学生、青年教师、报考理工科研究生、自学青年以及工程技术人员都是一部具有很大实用价值的参考书。

理论力学理论与解题指南

(中册)

刘宏才 编

*

责任编辑：贡克勤

封面设计：郭景云

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京市通县建新印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本787×1092¹/₁₆·印张27.75·字数680千字

1990年11月北京第一版·1990年11月北京第一次印刷

印数 00,001—2,600·定价：5.50元

*

ISBN 7-111-00725-5/O·18 课

序

学工程的人都要学力学，有一系列的力学课程要学：头一门是理论力学，是入门的课。但是入门却不太容易。很多人也许会有跟我一样的经验，理论力学讲的道理比较基本和简单，好象很容易明白，可是一做习题，却是不知从何下手，苦思苦想，很多题还是做不出来。等别人做出来了，一看，也很简单，用的也都是自己明白的知识。以后学到材料力学和结构力学时，内容似乎逐渐复杂起来了，但是只要肯下力气，不怕习题做不出来。道理何在呢？基础的知识，看起来简单，用起来变化多端，神通无穷，它能解决多少问题，就要看你掌握的程度和创新的能力了。怎样才能掌握和创新呢？象理论力学这门课，单读书本是不行的，必须多做习题。在解题过程中，训练自己的思维能力，包括逻辑演释和归纳升华。通过多次认识上的重复，在脑子里烙下深刻的经验教训，像钻进题目的肚子里一样，用触角四处寻找破题的途径，这种训练对一个搞科学技术的人是非常有益的。多做习题，多实践，对学好各门课程都是有益的。对学好理论力学这类技术基础课，尤其必要。

刘宏才同志化了很大精力，参考了众多中外理论力学的教材与习题集，结合自己多年的教学经验，编写了这本《理论力学理论与解题指南》，要我提提意见。我虽然在年青时期受过理论力学多解题的好处，但对于理论力学近年的发展很是生疏，所以就转请我院工程力学系主任张锡成教授审阅一番。他告诉我这是一本很好的书，解题1021道，而就他所知，别的同类书籍，最多也只619道，此书可称大全了。而且，此书每一部分首先清楚扼要地给出有关的基本概念、定理和公式，然后叙述解题的一般方法、步骤，最后给出习题的解答，从主观上就是引导学生去掌握理论和它的应用，反映出作者把理论用于实际的经验、体会和技巧。对读者是很有益的书。

但是，对于怎样用好这本书，他和我有相同的观点：当学生有一本题解在身边；如果稍遇困难，不由自主地就去找题解，这样就会妨害学生的独立思考，并且可能因经常躲避艰苦的思维，养成依赖的习惯。又如果只是一道一道地读题解，而不是在自己作题百思不解时才去参考，以求得到指点和启发，同样不利于创造性思维的训练。这些都不是出版题解的目的。愿读者们能够在正确使用这本题解中得到最大的效益。

钱三强
1985.10.10

前 言

理论力学是现代工程技术科学的理论基础之一，它的定律和定理被广泛地应用于各种技术科学之中，理论力学是高等院校理工科的一门技术基础课。由于理论力学的内容极其丰富，习题类型繁多，对于初学者来讲，最大的困难是应用理论解决各类具体问题。编者编写此书，是为了给广大青年向科学技术进军铺路筑桥，帮助和引导高等院校理工科学生，电大、职大、业大、函大学生以及自学青年全面、系统、深入地掌握理论力学理论，透彻地理解基本概念，独立地运用理论去解决力学问题。同时为从事理论力学教学的青年教师及有关的工程技术人员提供一本有用的参考书。

本书基本上是参照目前我国高等工科院校理论力学教学大纲编写的，考虑到不同读者的需要以及今后教学发展的要求，部分内容有所增减。

全书包括运动学、静力学、动力学和动力学专题四大部分。每章内容均由基本理论、解题方法、习题解答三部分组成。

基本理论部分简要地叙述该章所涉及到的基本概念、定理和公式。着重指出作为学科本身的内在联系，使读者对该章内容有一个全面的了解，以作为该章解题的主要依据。

解题方法部分具体阐明该章内容所涉及到的习题类型；强调解决具体问题时抓住哪些关键环节；指明解题过程中易出现错误的原因；求解每一类习题应遵循的思想方法和主要解题步骤。

习题解答部分共精选了各类典型习题千余道，并做了详细的解答。选编的习题既考虑到现行的教学大纲的要求，重视加强基本训练，基本题约占三分之一左右，通过这些习题，使读者初步掌握基本概念和基本方法；为进一步学习打好基础，又考虑到今后教学发展的要求，在深度和广度方面有所加强。选编了约三分之一左右难度较大的综合性习题，旨在提高读者分析解答综合问题的能力。为了开拓解题思路，部分习题按程序设计原则，做到一题多变，层层加深；一题多解，前后呼应，使知识不断系统化和深入化。为了照顾初学者和自学者阅读，各章习题的安排力求做到前一章的习题不涉及后一章的概念。由浅入深，由易到难，循序渐进。鉴于一般初学的人习惯于“算术式”推理，为培养其“代数式”的思想方法，选编的习题及解答一般均采用文字运算。为了使读者有章可循，解题步骤力求规范化，运算过程力求概念清晰、推理严谨、简捷明了。

本书着眼于理论力学的理论和实际应用，尽量把基本理论、解题方法、习题解答有机地融合为一个整体，从而培养读者独立地解决力学问题的能力。它既不是现行的某一种理论力学教材的学习指导书，也不是某一种理论力学学习题集的解题指导书。

力学中涉及的单位均是一贯性单位，所以本书涉及的方程均采用一贯性单位的数值方程，不注明具体单位。

在本书的编写过程中，编者得到了北京燕山石油化工公司领导、北京燕山石油化工公司教育处和职工大学领导的热情关怀与大力支持。

中国科学院学部委员、中国力学学会理事长、著名力学专家钱令希教授为本书写的序

言，语重心长，体现了老一辈科学家对年青一代的殷切希望。大连工学院工程力学系系主任张锡成教授审阅了书稿，并向编者提了许多宝贵建议。清华大学工程力学系陈光祖副教授花费了很多的时间和精力，逐字逐句地审阅、修改、校对了书稿。在编写过程中，编者还得到了王定顺、陈一雄、刘晓玲、王晓琴等同志的热情帮助，在此表示感谢。

编者希望能向广大读者奉献一本有实用价值的参考书，如果这本书能使广大读者得到裨益，就是编者最大的欣慰了。若书中有不妥或错误之处，恳望广大读者给予指教，编者将不胜感激！

刘宏才

1985年于北京

目 录

第五章 动力学基本方程	1
§5-1 基本概念、定理、公式	1
一、动力学的任务	1
二、动力学基本定律——牛顿运动三定律	1
三、参考系	1
四、自由质点运动微分方程	1
五、非自由质点运动微分方程	2
六、作用于质点的已知力的形式	3
七、常见的几种力	3
§5-2 解题方法	4
一、判断问题的类型	4
二、受力分析是研究力学问题的关键	4
三、建立坐标系	4
四、质点动力学两类基本问题	4
五、解动力学问题的基本方法	4
六、解题主要步骤	5
七、应用动力学基本定律时必须搞清楚的几个问题	5
§5-3 习题与解答	5
第六章 动量定理	95
§6-1 基本概念、定理、公式	95
一、质点系的内力和外力	95
二、质点的动量定理	95
三、质点系的动量定理	97
四、质心运动定理	98
五、变质量质点的运动方程	100
六、碰撞	101
§6-2 解题方法	101
一、动量定理是动力学普遍定理之一	101
二、动量定理建立了质点或质点系动量的变化和作用力的冲量之间的关系	101
三、解题时应充分注意动量守恒情形	101
四、质心运动定理是动量定理的另一重要形式	101
五、冲量定理是解决碰撞问题的一个基本定理	102
六、变质量质点运动方程是研究火箭运动的基本方程	102

七、解题步骤.....	102
§6-3 习题与解答.....	102
第七章 动量矩定理	141
§7-1 基本概念、定理、公式.....	141
一、基本概念.....	141
二、质点动量矩定理.....	142
三、质点系动量矩定理.....	142
四、质点系相对于质心的动量矩定理.....	143
五、碰撞时的动量矩定理(冲量矩定理).....	143
六、刚体定轴转动微分方程.....	143
七、刚体平面运动微分方程.....	144
§7-2 解题方法.....	144
一、动量矩定理是动力学普遍定理之一.....	144
二、应用动量矩定理时应注意的几个问题.....	145
三、应用动量矩定理解题的主要步骤.....	145
§7-3 习题与解答.....	146
第八章 动能定理	225
§8-1 基本概念、定理、公式.....	225
一、力的功.....	225
二、动能.....	226
三、动能定理.....	227
四、功率.....	228
五、势力场.....	229
六、机械能守恒.....	231
§8-2 解题方法.....	232
一、动能定理是动力学普遍定理之一.....	232
二、应用质点系动能定理时一定不能忘记内力作功的问题和约束反力作功的问题.....	232
三、确定和判断有势力.....	232
四、解题时要充分注意应用机械能守恒定律.....	233
五、动能定理是一个标量方程,它只能解决一个变量的问题.....	233
六、动力学普遍定理的综合应用问题.....	233
七、应用动能定理解题的主要步骤.....	234
八、应用机械能守恒定律解题的主要步骤.....	234
§8-3 习题与解答.....	234
达朗伯原理·动静法	391
基本概念、定理、公式.....	391

VII

一、达朗伯原理与动静法.....	391
二、刚体绕定轴转动时轴承的动反力.....	393
§9-2 解题方法	393
一、达朗伯原理提供了用静力学平衡方程来解决非自由质点系动力学问题的普遍方法.....	393
二、根据达朗伯原理应用动静法解题时，附加惯性力系一般应遵循的步骤.....	393
三、应用动静法解题的主要步骤.....	393
§9-3 习题与解答	394

第五章 动力学基本方程

§5-1 基本概念、定理、公式

一、动力学的任务

动力学研究物体的机械运动和作用在物体上的力之间的关系。

二、动力学基本定律——牛顿运动三定律

第一定律（惯性定律）

如果质点不受力作用，则其运动状态将保持不变，或者静止，或者作匀速直线运动。

第二定律（力与加速度关系定律）

质点受力作用时所获得的加速度与力的大小成正比，与质点的质量成反比，加速度的方向与力的方向相同。

若设质点的质量为 m ，加速度为 a ，作用于质点上的力为 F ，则第二定律的数学表达式

$$F=ma$$

第三定律（作用力与反作用力定律）

两物体间的作用力与反作用力，总是大小相等，方向相反，并沿同一条直线分别作用在这两个物体上。

三、参考系

1. 惯性参考系 凡是牛顿运动定律能够适用的参考系称为惯性参考系。

在一般工程技术中，将固连于地球，或相对于地面静止及作匀速直线运动的系统作为惯性参考系。今后，若不特别说明，我们都将采用和地球相固连的坐标系。

2. 非惯性参考系 凡是相对于惯性参考系有加速度的系统称为非惯性参考系。

四、自由质点运动微分方程

1. 矢量法

$$\Sigma F = m\ddot{r} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = ma$$

其中， ΣF 为质点所受的合力，质点的质量为 m ，矢径为 r ，速度为 v ，加速度为 a 。

2. 直角坐标法

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x = m\dot{v}_x = m\ddot{x} \\ \Sigma F_y &= ma_y = m\dot{v}_y = m\ddot{y} \\ \Sigma F_z &= ma_z = m\dot{v}_z = m\ddot{z} \end{aligned} \right\}$$

3. 自然法

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F^r &= m\alpha^r = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m\ddot{s} \\ \Sigma F^\theta &= m\alpha^\theta = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ \Sigma F^b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4. 极坐标法

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned} \right\}$$

5. 柱坐标法

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta &= m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ \Sigma F_z &= m\ddot{z} \end{aligned} \right\}$$

五、非自由质点运动微分方程

1. 矢量式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$$

其中， \mathbf{F} 是主动力， \mathbf{N} 是约束力。

(1) 质点沿固定曲线运动，设约束是理想的，约束条件为：

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(x, y, z) = 0$$

$$\text{梯度 } \nabla f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

λ_1 和 λ_2 为拉格朗日未定乘子 (λ ——乘子)

$$\text{则 } \mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = \lambda_1 \text{grad} f_1 + \lambda_2 \text{grad} f_2 = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \lambda_1 \text{grad} f_1 + \lambda_2 \text{grad} f_2 \\ &= \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 \end{aligned}$$

(2) 质点沿固定曲面运动时，约束条件

$$f(x, y, z) = 0$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \lambda \text{grad} f = \mathbf{F} + \lambda \nabla f$$

2. 投影式

$$m\ddot{x} = F_x + N_x$$

$$m\ddot{y} = F_y + N_y$$

$$m\ddot{z} = F_z + N_z$$

(1) 当质点沿固定曲线运动时

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

(2) 当质点沿固定曲面运动时

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

六、作用于质点的已知力的形式

1. 力是常量: $F = C = \text{常矢量}$ 2. 力是时间的函数: $F = F(t)$ 3. 力是质点速度的函数: $F = F(v)$ 4. 力是质点位置的函数: $F = F(r)$ 5. 力是时间、质点速度、质点位置的函数: $F = F(r, v, t)$

七、常见的几种力

1. 万有引力 任何物体与物体之间存在着相互吸引力,称为万有引力。

万有引力定律,万有引力的大小与两个物体的质量的乘积成正比,与它们之间的距离的平方成反比,方向沿它们之间的连线。

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} r^0$$

其中 G 为引力常数。

2. 弹性力 弹簧因变形而产生的力。又称线性恢复力。

虎克定律:在弹性范围内,弹簧的伸长或压缩与它所受的外力成正比。变形了的弹簧所产生的恢复力为

$$F = -kx$$

其中 k 为弹簧系数或弹簧刚度。 x 为弹簧的自由端偏离平衡位置的位移。

3. 约束反力 在约束运动中, 约束对被约束物体所施加的力。它的大小和方向是未知的, 既与约束条件有关, 又与物体的运动情况有关, 必须通过动力学方程才能确定。

4. 摩擦力 是约束反力沿接触面切线方向的分量。若为光滑接触, 则摩擦力为零。

摩擦定律: 见静力学一章内容。

5. 介质阻力 介质对物体的阻力, 其方向与物体运动方向相反, 其大小与物体运动速度有关, 其效果是阻碍物体的运动。一般表示为

$$R=f(v)$$

§5-2 解题方法

一、判断问题的类型

质点动力学问题应用动力学基本方程求解时, 对每一个具体的问题, 首先应当认真分析题意, 明确物体运动情况哪些方面是已知的, 哪些方面是未知的。物体的受力哪些方面是已知的, 哪些方面是未知的。经过分析, 判断是属于哪一类动力学问题。

二、受力分析是研究力学问题的关键

在分析物体受力时主要采用隔离体法。将所研究的物体从整体中隔离出来, 简化为质点, 在其上标明所受的力, 正确地画出受力图。分析力时, 要对每一个力, 搞清楚这个力是什么物体作用于所研究的物体上的。因为“力是物体间的相互作用”。离开这一基本概念, 就有可能在受力图上多画了力或漏掉力, 这样都会得出错误的结果来。因此, 画完受力图之后应当进行一次认真细致地检查。

三、建立坐标系

进行运动分析时, 要建立一个坐标系, 而这个坐标系必须是惯性坐标系。因为只有在此惯性坐标系中我们才能应用动力学基本定律。若在非惯性坐标系中直接应用牛顿定律, 就会得出错误的结果来。至于具体是采用直角坐标系, 还是采用自然法、极坐标法, 要根据具体问题来确定。一般情况, 我们总是先写出矢量方程, 然后按受力图中选取的坐标写出相应的投影式。

四、质点动力学两类基本问题

1. 第一类问题 已知质点的运动 (包括质点的运动规律、速度、加速度等), 求作用于质点上的力。此类问题称为动力学正问题。

2. 第二类问题 已知作用于质点上的力, 求质点的运动 (包括质点的运动规律、速度、加速度等) 此类问题称为动力学逆问题。

此外, 由于质点受约束作用, 其运动和受力两者都有已知量和未知量, 有时也把此类问题称为动力学第三类问题。

五、解动力学问题的基本方法

解动力学第一类问题时, 应用微分方法。解动力学第二类问题时, 应用积分方法。为了能正确地建立质点运动微分方程, 在选择坐标时, 最好能使坐标原点与质点的初始位置相重合; 在画受力图时, 一方面要正确无误地画出研究对象所受的全部力, 另一方面要给予每一个已知力和未知力标明一个确定的代数符号。对微分方程进行积分时, 可以使用不定积分或

定积分, 其积分常数, 或积分限对于自由质点的运动, 完全可由给定的初始条件来确定。对于非自由质点, 其运动不仅取决于初始条件, 而且与约束的性质有关。这一点在解质点的约束运动问题时要格外注意。

求解未知量的方程式要有足够的数目, 使每一个未知量都能从方程式中得到解答。在用“ λ -乘子”法求解质点的约束运动问题时, 要把约束方程和运动方程联立求解。在解出最后结果后, 要对结果的数学表达式进行必要的讨论, 重新解释具体的力学过程, 并进一步探讨其内部的联系, 以便有可能把题中所设条件下得到的结论推广到较一般的情况中去。

六、解题主要步骤

1. 认真分析题意, 搞清哪些是已知量, 哪些是未知量, 以便在解题过程中能充分而灵活地应用题意中已知的物理条件。
2. 选择研究对象, 把研究对象从总体中分离出来, 画出隔离体图。
3. 受力分析, 画受力图。
4. 选取适当的坐标系, 写出运动微分方程。
5. 求解方程。
6. 对结果进行分析、检验、讨论。

七、应用动力学基本定律时必须搞清楚的几个问题

1. 定律中所谓的质点是一个理想化了的模型。质点只有质量而没有大小。物体的大小是相对而言的。当研究地球绕太阳运行的轨道时, 我们可以把地球作为一个质点。当研究火车在铁路上的运动规律时, 我们可以把火车作为一个质点。但当研究火车车轮本身运动规律时, 就不能把车轮作为一个质点了。同样, 当我们研究炮弹在空中飞行轨道时, 我们把炮弹作为质点, 但当我们研究炮弹在飞行中如何自旋的时候, 就不能再把炮弹作为质点了。

2. 运动第一定律表明了任何物体都有保持它原来运动状态的属性, 即具有惯性。要想改变物体原有的运动状态, 就必须有力的作用。这就说明了力是改变物体运动状态的原因。

3. 运动第二定律中质点所受的力是合力。如果几个力同时作用在该质点上, 那么产生的加速度矢量是每一个力单独作用时产生的加速度矢量和。这就是力的独立性作用原理。

4. 运动第二定律中力和加速度的关系是瞬时关系。力是使质点产生加速度的原因。只有力作用时, 才产生加速度。力改变时, 加速度也随之同时改变。当力不变时, 加速度也不变。当力为零时, 加速度亦为零。同时, 力和加速度关系是矢量关系。也就是说, 加速度方向始终和力的方向一致。

5. 运动第三定律中的作用力和反作用力没有主、从之分, 受力的物体本身就是施力的物体, 而施力的物体同时也是受力的物体。作用力与反作用力总是成对出现: 同时产生, 同时存在, 同时消失。作用力和反作用力由于是分别作用于两个不同的物体上, 所以不能构成平衡力系。

6. 动力学基本定律的应用是有一定范围的, 它要求物体运动的速度远小于光速, 而物体的质量远大于基本粒子的质量。

§5-3 习题与解答

【题315】质量为 m 的质点作直线运动, 已知其运动规律为 $x=at^4+bt^3+ct$ 。其中 a 、 b 、

c 均为常量。求作用于质点上的力。

解：由运动规律微分得

$$\dot{x} = 4at^3 + 3bt^2 + c$$

$$\ddot{x} = 12at^2 + 6bt$$

由牛顿定律得

$$F = m\ddot{x} = 6m(2at^2 + bt)$$

【题316】质量为 m 的质点作直线运动，已知其运动方程为 $x = \frac{v_0}{2\sqrt{k}}(e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t})$ ，其中 v_0 为初速度， k 为常量。求作用于质点上的力。

解：由运动方程微分得：

$$\dot{x} = \frac{1}{2}v_0(e^{\sqrt{k}t} + e^{-\sqrt{k}t})$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{k}v_0(e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t}) = kx$$

由牛顿定律得 $F = m\ddot{x} = kmx$

【题317】质量为 m 的质点以 $x = (1 + \frac{1}{2}t)\sin t$ 的规律作直线运动，求作用于质点上的力。

解：由运动方程微分得

$$\dot{x} = \cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t$$

$$\ddot{x} = -\sin t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\sin t$$

$$= \cos t - (1 + \frac{1}{2}t)\sin t$$

$$= \cos t - x$$

由牛顿第二定律得作用于质点上的力

$$F = m\ddot{x} = m(\cos t - x)$$

【题318】质量为 m 的质点沿轴运动，其运动规律为 $S = e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi)$ 其中 k, ω, φ 均为常量。求质点所受力与 S 及速度的关系。

解：质点的速度

$$v = \frac{ds}{dt} = -ke^{-kt}\sin(\omega t + \varphi) + e^{-kt}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= e^{-kt}[-k\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)]$$

质点的加速度

$$\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} = -ke^{-kt}[-k\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)] \\
&\quad + e^{-kt}\omega[-k\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)] \\
&= -kv - k\omega e^{-kt}\cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi) \\
&= -kv - ke^{-kt}[-k\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)] \\
&\quad - k^2 e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 e^{-kt}\sin(\omega t + \varphi) \\
&= -2kv - (k^2 + \omega^2)s
\end{aligned}$$

质点所受作用力

$$F = ma = -m[(k^2 + \omega^2)s + 2kv]$$

[题319] 质量为 m 的质点在平面中运动规律为

$$r = a_0 \sin t i + b_0 \cos t j$$

其中 a_0 、 b_0 均为常量。求作用于质点上的力。

解：质点的速度

$$\begin{aligned}
v &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(a_0 \sin t i + b_0 \cos t j) \\
&= a_0 \cos t i - b_0 \sin t j
\end{aligned}$$

质点的加速度

$$\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(a_0 \cos t i - b_0 \sin t j) \\
&= -(a_0 \sin t i + b_0 \cos t j) \\
&= -r
\end{aligned}$$

质点所受作用力

$$F = ma = -mr$$

[题320] 质量为 m 的质点，在已知力 $F_0 \sin \omega t$ 的作用下沿 x 轴运动。其中 F_0 、 ω 均为常量。当运动开始时， $t=0$ ， $x=x_0$ ， $v=v_0$ ，求质点运动规律。

解：此题是已知作用力，求质点运动。属动力学第二类问题，应用积分的方法。

质点运动微分方程

$$m \ddot{x} = F_0 \sin \omega t$$

即

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \sin \omega t$$

积分，初始条件， $t=0$ ， $v=v_0$

$$\int_{v_0}^v m dv = \int_0^t F_0 \sin \omega t dt$$

$$mv - mv_0 = \frac{F_0}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

$$v = v_0 + \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)$$

由于 $v = \frac{dx}{dt}$

所以 $dx = vdt = [v_0 + \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)]dt$

积分, 初始条件, $t=0, x=x_0$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t [v_0 + \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)]dt$$

解得质点运动规律

$$x = x_0 + (v_0 + \frac{F_0}{m\omega})t - \frac{F_0}{m\omega^2} \sin\omega t$$

【题321】 质量为 m 的质点沿 x 轴作直线运动, 所受的力为 $F = F_0 - kt$, 其中 F_0, k 均为常量。当运动开始时, $t=0, x_0=0, v_0=0$, 求质点运动规律。

解: 根据牛顿第二定律得质点运动微分方程

$$m\ddot{x} = F_0 - kt$$

即

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 - kt$$

$$dv = \frac{1}{m}(F_0 - kt)dt$$

积分, 初始条件, $t=0, v_0=0$

$$\int_0^v dv = \frac{1}{m} \int_0^t (F_0 - kt)dt$$

得

$$v = \frac{1}{m}(F_0 t - \frac{1}{2}kt^2)$$

由于

$$v = \frac{dx}{dt}$$

所以

$$dx = vdt = \frac{1}{m}(F_0 t - \frac{1}{2}kt^2)dt$$

积分, 初始条件, $t=0, x_0=0$