刘宏才 编

理论力学理论与解题指南

（上册）

机械工业出版社

理论力学理论与解题指南

（上 册）

刘宏才　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是为适应我国社会主义现代化建设和高等教育发展的需要编写的教学参考书。

全书分上、中、下三册。上册内容为运动学和静力学；中册内容为动力学；下册内容为动力学专题，其中包括虚位移原理和动力学普遍方程、拉格朗日方程、振动、质点在有心力场中的运动、非惯性参考系中的动力学、刚体动力学等，共六章。

本书各章内容均由基本理论、解题方法、习题解答三部分组成。

本书概念清晰、推理严谨、内容丰富、深入浅出。全书精心编选了千余道既有广度、又有深度的各类典型习题，通过习题分析与解答，把基本理论、解题方法与习题解答有机地融为一体。全书十分重视学科的科学性、全整性、系统性和实用性，启发读者的思维，开阔读者的视野，提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书对全日制大专院校、电视大学、职工大学、函授大学有关专业学生、青年教师、报考理工科研究生、自学青年以及工程技术人员都是一部具有很大实用价值的参考书。

理论力学理论与解题指南

（上 册）

刘宏才　编

*

责任编辑：贡克勤

封面设计：郭景云

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京市通县建新印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本787×1092 1/16·印张22·字数534千字

1990年11月北京第一版·1990年11月北京第一次印刷

印数　00,001—2,600　·　定价：4.40元

*

ISBN 7-111-00724-7/O·17　课

序

学工程的人都要学力学，有一系列的力学课程要学。头一门是理论力学，是入门的课。但是入门却不太容易。很多人也许会有跟我一样的经验，理论力学讲的道理比较基本和简单，好象很容易明白，可是一做习题，却是不知从何下手，苦思苦想，很多题还是做不出来。等别人做出来了，一看，也很简单，用的也都是自己明白的知识。以后学到材料力学和结构力学时，内容似乎逐渐复杂起来了，但是只要肯下力气，不怕习题做不出来。道理何在呢？基础的知识，看起来简单，用起来变化多端，神通无穷，它能解决多少问题，就要看你掌握的程度和创新的能力了。怎样才能掌握和创新呢？象理论力学这门课，单读书本是不行的，必须多做习题。在解题过程中，训练自己的思维能力，包括逻辑演释和归纳升华。通过多次认识上的重复，在脑子里烙下深刻的经验教训，像钻进题目的肚子里一样，用触角四处寻找破题的途径，这种训练对一个搞科学技术的人是非常有益的。多做习题，多实践，对学好各门课程都是有益的。对学好理论力学这类技术基础课，尤其必要。

刘宏才同志化了很大精力，参考了众多中外理论力学的教材与习题集，结合自己多年的教学经验，编写了这本《理论力学理论与解题指南》，要我提提意见。我虽然在年青时期受过理论力学多解题的好处，但对于理论力学近年的发展很是生疏，所以就转请我院工程力学系主任张锡成教授审阅一番。他告诉我这是一本很好的书，解题1021道，而就他所知，别的同类书籍，最多也只619道，此书可称大全了。而且，此书每一部分首先清楚扼要地给出有关的基本概念、定理和公式，然后叙述解题的一般方法、步骤，最后给出习题的解答，从主观上就是引导学生去掌握理论和它的应用，反映出作者把理论用于实际的经验、体会和技巧。对读者是很有益的书。

但是，对于怎样用好这本书，他和我有相同的观点：当学生有一本题解在身边，如果稍遇困难，不由自主地就去找题解，这样就会妨害学生的独立思考，并且可能因经常躲避艰苦的思维，养成依赖的习惯。又如果只是一道一道地读题解，而不是在自己作题百思不解时才去参考，以求得到指点和启发，同样不利于创造性思维的训练。这些都不是出版题解的目的。愿读者们能够在正确使用这本题解中得到最大的效益。

钱伟长

1985.10.10

前　言

理论力学是现代工程技术科学的理论基础之一，它的定律和定理被广泛地应用于各种技术科学之中。理论力学是高等院校理工科的一门技术基础课。由于理论力学的内容极其丰富，习题类型繁多，对于初学者来讲，最大的困难是应用理论解决各类具体问题。编者编写此书，是为了给广大青年向科学技术进军铺路筑桥，帮助和引导高等院校理工科学生，电大，职大、业大、函大学生以及自学青年全面、系统、深入地掌握理论力学理论，透彻地理解基本概念，独立地应用理论去解决力学问题。同时为从事理论力学教学的青年教师及有关的工程技术人员提供一本有用的参考书。

本书基本上是参照目前我国高等工科院校理论力学教学大纲编写的，考虑到不同读者的需要以及今后教学发展的要求，部分内容有所增减。

全书包括运动学、静力学、动力学和动力学专题四大部分。每章内容均由基本理论、解题方法、习题解答三部分组成。

基本理论部分简要叙述该章所涉及到的基本概念、定理和公式。着重指出作为学科本身的内在联系，使读者对该章内容有一个全面的了解，以作为该章解题的主要依据。

解题方法部分具体阐明该章内容所涉及到的习题类型；强调解决具体问题时应抓住哪些关键环节；指明解题过程中易出现错误的原因；求解每一类习题应遵循的思想方法和主要解题步骤。

习题解答部分共精选了各类典型习题千余道，并做了详细的解答。选编的习题既考虑到现行的教学大纲的要求，重视加强基本训练，基本题约占三分之一左右，通过这些习题，使读者初步掌握基本概念和基本方法；为进一步学习打好基础，又考虑到今后教学发展的要求，在深度和广度方面有所加强，选编了约三分之一左右难度较大的综合性习题，旨在提高读者分析解答综合问题的能力。为了开拓解题思路，部分习题按程序设计原则，做到一题多变，层层加深；一题多解，前后呼应，使知识不断系统化和深入化。为了照顾初学者和自学者阅读，各章习题的安排力求做到前一章的习题不涉及后一章的概念，由浅入深，由易到难，循序渐进。鉴于一般初学的人习惯于“算术式”推理，为培养其“代数式”的思想方法，选编的习题及解答一般均采用文字运算。为了使读者有章可循，解题步骤力求规范化，运算过程力求概念清晰、推理严谨、简捷明了。

本书着眼于理论力学的理论和实际应用，尽量把基本理论、解题方法、习题解答有机地融合为一个整体，从而培养读者独立地解决力学问题的能力。它既不是现行的某一种理论力学教材的学习指导书，也不是某一种理论力学习题集的解题指导书。

力学中涉及的单位均是一贯性单位，所以本书涉及的方程均采用一贯性单位下的数值方程，不注明具体单位。

在本书的编写过程中，编者得到了北京燕山石油化工公司领导、北京燕山石油化工公司教育处和职工大学领导的热情关怀与大力支持。

中国科学院学部委员、中国力学学会理事长、著名力学专家钱令希教授为本书写的序

言，语重心长，体现了老一辈科学家对年青一代的殷切希望。大连工学院工程力学系系主任张锡成教授审阅了书稿，并向编者提了许多宝贵建议。清华大学工程力学系陈光祖副教授花费了很多的时间和精力，逐字逐句地审阅、修改、校对了书稿。在编写过程中，编者还得到了王定顺、陈一雄、刘晓玲、王晓琴等同志的热情帮助，在此表示感谢。

编者希望能向广大读者奉献一本有实用价值的参考书，如果这本书能使广大读者得到裨益，就是编者最大的欣慰了。若书中有不妥或错误之处，恳望广大读者给予指教，编者将不胜感激！

刘宏才

1985年于北京

EAB38109

目　录

第一章　质点运动学

§1-1　基本概念、定理、公式

一、质点运动学的任务

质点运动学研究质点在空间的位置随时间变化的几何性质。不考虑引起质点运动状态发生变化的原因。

二、参考系

用来确定质点在空间位置的参考物体称为参考体，与参考体相固连的坐标系称为参考系。质点的位置只能相对于参考系而确定，同一个运动，相对于不同的参考系而具有不同的表现形式。

三、质点运动学研究的几个主要问题

1. 质点的运动规律。
2. 质点的运动轨迹。
3. 质点的运动速度。
4. 质点的运动加速度。

四、研究质点运动学的主要方法

1. 矢量法　一般进行理论分析时常采用的方法。
2. 直角坐标法　研究直线运动、平面曲线运动和空间曲线运动均可采用的方法。
3. 自然法　研究平面曲线运动时常采用的方法。
4. 极坐标法　研究平面曲线运动时常采用的方法。

五、运动方程

即质点的运动规律。由方程给出质点在空间上任一瞬时 t 所在的位置。

1. 矢量法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t) \\ &= x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

2. 直角坐标法

$$x=f_1(t) \qquad y=f_2(t) \qquad z=f_3(t)$$

3. 自然法

$$s=f(t)$$

4. 极坐标法

$$r=r(t) \qquad \theta=\theta(t)$$

六、轨迹

质点在空间运动所经过的路线，运动方程就是质点轨迹参数方程，其中参数为时间 t，

因此，从运动方程中消去参数 t 就得到轨迹方程。质点运动的轨迹一般为直线、平面 **曲线** 空间曲线。质点的运动轨迹若用直角坐标表示，则为

$$F(x,y,z)=0$$

若用极坐标表示，则为

$$F(r,\theta)=0$$

七、速度

点的矢径对时间的变化率。也就是说：质点的速度等于其矢径对时间的一阶导数。

1.矢量法

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}$$

2.直角坐标法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\\&=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\\v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dot{y}\\v_z&=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dot{z}\end{aligned}\right\}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

速度的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})&=\frac{\dot{x}}{v}\\\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})&=\frac{\dot{y}}{v}\\\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})&=\frac{\dot{z}}{v}\end{aligned}\right\}$$

3.自然法

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^0=\dot{s}\boldsymbol{\tau}^0$$

其中，$\boldsymbol{\tau}^0$为沿轨迹切线方向的单位矢量

速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{ds}{dt}\right|$$

速度的方向为

若$\frac{ds}{dt}>0$，质点沿弧坐标正向运动，方向与$\boldsymbol{\tau}^0$相同；若$\frac{ds}{dt}<0$，质点沿弧坐标负向运动，方向与$\boldsymbol{\tau}^0$相反。

4. 极坐标法

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

其中，$\boldsymbol{e}_r$为沿矢径的单位矢量；$\boldsymbol{e}_\theta$为垂直矢径的单位矢量。

速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2}$$

5. 柱面坐标法

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{i}+r\dot{\theta}\,\boldsymbol{j}+\dot{z}\,\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{i}$为沿r方向的单位矢量；$\boldsymbol{j}$为在r所在平面且垂直于$\boldsymbol{i}$的单位矢量；$\boldsymbol{k}$为沿z方向的单位矢量。

速度的大小为

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2+\dot{z}^2}$$

6. 球面坐标法

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{i}+r\dot{\theta}\boldsymbol{j}+r\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$为球面坐标的单位矢量，它们相互垂直组成右手坐标系，$\boldsymbol{i}$沿矢径$\boldsymbol{r}$的方向，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$分别指向θ和φ增大的方向。

速度的大小为

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2+(r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$$

八、加速度

质点的加速度是速度对时间的变化率。也就是说：**质点的加速度等于其速度矢量对时间**

的一阶导数，或等于其矢径对时间的二阶导数。

1. 矢量法

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

2. 直角坐标法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\dot{v}_x\boldsymbol{i}+\dot{v}_y\boldsymbol{j}+\dot{v}_z\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}\\a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{y}\\a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_z=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{z}\end{aligned}\right\}$$

加速度的大小为

$$\begin{aligned}a&=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\\&=\sqrt{\dot{v}_x^2+\dot{v}_y^2+\dot{v}_z^2}\\&=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\end{aligned}$$

加速度的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}$$

3. 自然法

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$$

其中，e_τ为沿轨迹切线方向的单位矢量，e_n为沿轨迹法线正方向的单位矢量。a_τ为切向加速度，a_n为法向加速度。ρ为曲线的曲率半径。

加速度的大小为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dot{v}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{s}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

加速度的方向为

$$\mathrm{tg}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_n)=\frac{|a_\tau|}{a_n}$$

4.极坐标法

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)^2+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

$$=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)^2+\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\right]^2}$$

5.柱面坐标法

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

6.球面坐标法

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\boldsymbol{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

$$+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{k}$$

§1-2 解题方法

一、质点运动学问题的几种类型

1.给定运动条件，求运动方程、轨迹、速度和加速度。解此类问题时，将动点放在一般

位置进行研究。首先确定一个坐标系，然后应用几何方法，将动点的位置表达为时间的函数，便得到质点的运动方程。由运动方程消去参数 t 则得到轨迹方程。将运动方程对时间 t 求微分则可得到质点运动的速度和加速度。由速度和加速度的表达式代入给定的时间，就可得到给定的某一瞬时质点运动的速度和加速度的值。

2.已知质点运动的速度或加速度的变化规律，求质点的运动方程和轨迹。解此类问题时，应用积分的方法。由加速度的变化规律进行积分求出速度的变化规律；再由速度的变化规律进行积分求出质点的运动规律，即运动方程；最后由运动方程消去参数 t 便得到轨迹方程。在积分过程中，积分常数由质点运动的初始条件及边界条件来确定。

3.已知质点运动的某一种表达式，求另一种表示方法中的运动规律、速度和加速度。解此类问题时，要熟悉质点运动的各种表示方法之间的相互关系，然后应用这些关系进行适当的变换。

二、解题步骤

1.由运动条件求质点运动方程问题

（1）选取适当的坐标系。

（2）将动点放在一般位置上，并标记流动坐标。

（3）选一适当的参变量，此参变量与时间 t 的关系比较明显。

（4）用几何方法找出流动坐标与所选的参变量之间的关系。

（5）用时间 t 代替所选用的参变量，即可得到运动方程。

2.由运动方程求速度、加速度问题

（1）将运动方程对时间 t 求导，得到速度变化规律。然后把给定的时间代入，即可得到所求瞬时动点速度的大小和方向。

（2）将速度变化规律方程对时间 t 求导，得到加速度变化规律。然后将给定的时间代入，即可得到所求瞬时动点加速度的大小和方向。

特别注意的是不能用某瞬时的速度值求导得加速度。这是因为速度是时间的单值函数，每一个确定的瞬时，有一个确定的速度值，而此确定的值对时间 t 求导将为零，并不等于该瞬时的加速度。另外，在矢量式求导中，不随时间变化的单位矢量对时间 t 的导数为零，而随时间变化的单位矢量对时间 t 的导数不为零。

3.由加速度的变化规律求质点的运动方程问题

（1）由加速度的变化规律进行积分运算，求出速度的变化规律。再由速度的变化规律律进行积分运算，求出质点的运动规律。

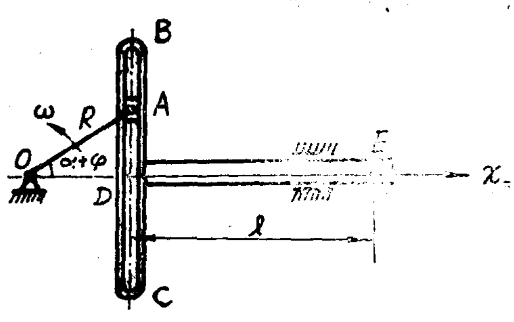
（2）若使用不定积分，则积分常数由初始条件及边界条件确定，使最后所得的方程不包含积分常数。若使用定积分，则用初条始件先确定积分的上下限，然后再积分。

（3）特别注意的是不可用某瞬时的加速度值进行积分来得到速度的变化规律。同时也不可用某瞬时的速度的值进行积分来得到运动规律。

§1-3 习题与解答

【题1】 曲柄滑道机构如图所示。曲柄 $OA=R$，以匀角速度 ω 绕 O 轴旋转。销子 A 在

滑道BC中滑动，带动连杆DE，$DE=l$。当运动开始时，OA与水平线的交角为α。求连杆上E点的运动方程、速度、加速度。



题1附图

解：取坐标轴Ox如图所示。

$$x=OE=OD+DE=R\cos(\varphi+\alpha)+l$$

因 $\varphi=\omega t$

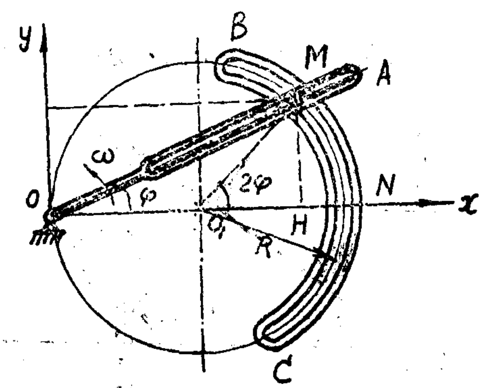
故 运动方程：$x=R\cos(\omega t+\alpha)+l$

速度：$v=\dfrac{dx}{dt}=-R\omega\sin(\omega t+\alpha)$

加速度：$a=\dfrac{dv}{dt}=-R\omega^2\cos(\omega t+\alpha)$

由于E点的坐标是按余弦函数的规律变化的，而E点的速度和加速度也是按正弦函数或余弦函数的规律变化的，所以此机构又称为正弦机构。

［题 2］ 摇杆滑道机构如图所示，滑块M同时在固定的圆弧槽BC中和在摇杆OA的滑道中滑动。BC弧的半径为R，摇杆OA的转轴处在通过BC弧所在的圆周上。摇杆绕O轴以等角速度ω转动，当运动开始时，摇杆在水平位置。求滑块M的运动方程、速度和加速度。



题2附图

解：方法（一）直角坐标法

取坐标Oxy如图所示。

$$x=OH=OO_1+O_1H=R+R\cos2\varphi$$
$$=R(1+\cos2\varphi)$$

$$y=MH=R\sin2\omega$$

因 $\varphi=\omega t$

故 M的运动方程：
$$\left.\begin{aligned}x&=R(1+\cos2\omega t)\\y&=R\sin2\omega t\end{aligned}\right\}$$

M的速度

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}[R(1+\cos2\omega t)]=-2R\omega\sin2\omega t$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(R\sin2\omega t)=2R\omega\cos2\omega t$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-2R\omega\sin2\omega t)^2+(2R\omega\cos2\omega t)^2}=2R\omega$$

M的加速度：

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-4R\omega^2\cos2\omega t$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-4R\omega^2\sin2\omega t$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(-4R\omega^2\cos2\omega t)^2+(-4R\omega^2\sin2\omega t)^2}=4R\omega^2$$

方法（二）自然法

M的运动方程： $s=\overset{\frown}{NM}=2R\varphi=2R\omega t$

M的速度： $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2R\omega t)=2R\omega$

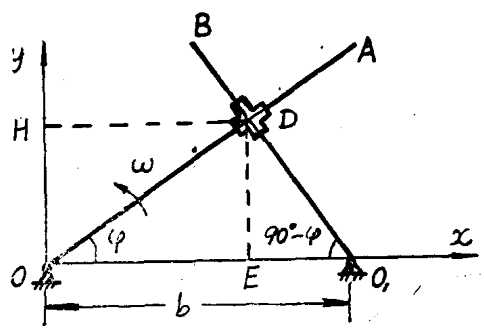
M的加速度：$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2R\omega)=0$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(2R\omega)^2}{R}=4R\omega^2$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=a_n=4R\omega^2$$

比较直角坐标法和自然法，可见当质点运动的轨迹为已知的曲线时，应用自然法求解较为方便。

［题3］ OA和O_1B两杆分别绕O和O_1轴转动。用十字形滑块D将两杆联结。在运动过程中，两杆始终保持相交成直角。已知$OO_1=b$；OA以等角速度ω转动，开始时处于水平位置。求滑块D的运动方程、速度和加速度。



题3附图

解：取坐标Oxy如图所示。

因为 $x=OE=OO_1-EO_1=b-O_1D\cos(90°-\varphi)$

$=b-b\sin\varphi\cos(90°-\varphi)$

$=b(1-\sin^2\varphi)=b\cos^2\varphi$

$$y=DE=OD\sin\varphi=b\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=\frac{1}{2}b\sin2\varphi$$

且 $\varphi=\omega t$

所以 D的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}x&=b\cos^2\omega t\\ y&=\frac{1}{2}b\sin2\omega t\end{aligned}\right\}$$

D的速度：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b\cos^2\omega t)=-2b\omega\cos\omega t\sin\omega t=-b\omega\sin2\omega t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}b\sin2\omega t\right)=b\omega\cos2\omega t$$