高等学校文科教材

经济应用数学基础（二）

线性代数

（修订本）

赵树嫄 主编

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

中国人民大学出版社

高等学校文科教材

经济应用数学基础（二）

线性代数

（修订版）

赵树嫄 主编

中国人民大学出版社

高等学校文科教材

经济应用数学基础（二）

线 性 代 数

（修订版）

赵树嫄 主编

*

中国人民大学出版社出版
（北京西郊海淀路39号）

北京市丰台印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本：850×1168毫米32开 印张：8.125
1983年5月第1版 1988年9月第2版
1989年2月第8次印刷
字数：198 000 册数：602 001—682 000

*

ISBN 7-300-00423-7

O·16 定价：2.35元

再 版 说 明

《经济应用数学基础》是原教育部委托中国人民大学经济信息管理系数学教研室赵树嫄主持编写的高等学校财经专业试用教材，共分五册：第一册《微积分》，第二册《线性代数》，第三册《概率论与数理统计》，第四册《线性规划》，第五册《运筹学通论》。从1981年以来，由中国人民大学出版社陆续出版。

本套教材自出版发行后，被许多院校选作教材，也受到了自学财经专业课程的读者的欢迎，在一定程度上满足了当时教学的迫切需要。

目前，随着我国社会主义经济建设的发展和经济体制改革的深入，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视。很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作，相继增开了一些有关的必修或选修课程。近年来，高等学校财经专业学生队伍的构成和素质也有了很大的变化。这一切都对高等学校财经专业基础数学的教学提出了更高的要求，为此，我们将对本套教材陆续进行修订。

这次修订工作是在国家教委的支持与领导下进行的，并得到北京大学、北京经济学院、北京商学院、北京财贸学院、中央财政金融学院、对外经济贸易大学等兄弟院校有关同志的大力协助，对本套教材的修改提出了许多宝贵的意见。在此，我们表示衷心感谢。

第二册《线性代数》介绍了线性经济模型中有关的线性代数基本知识。书中有些内容加了 * 号，选用本教材时可根据教学需

要和学时安排略去不讲。

参加《线性代数》第一版编写与审阅的有：赵树嫄、马兴忠、胡富昌、陆启良，由赵树嫄任主编。参加第二版修改与审阅的有：赵树嫄、付维潼、胡富昌、金必先、陆启良，由赵树嫄任主编。褚永增对本书的修订做了大量工作并审核了全部习题答案。

本次修订对第一版的某些章节的体系进行了调整，补充了一些内容。在习题中增加了选择题，各章习题均分为（A），（B）两类，（A）类为计算、证明、应用等传统题型；（B）类为选择题，每题各有4个备选答案，其中至少有一个是正确的，请读者将正确答案前的字母都填在括号内，凡多填或漏填均算答案错误。习题答案附书后。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1988年3月

目　　录

第一章　行列式

§1.1　二阶、三阶行列式

读者在中学时已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义。在此，我们再进行简单的复习。

（一）　二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

二阶行列式表示的代数和，可以用画线（图1－1）的方法记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

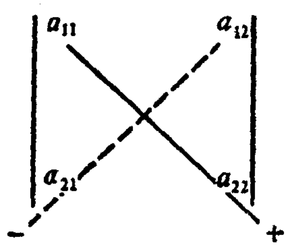

图　1-1

例1.
$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times2-(-1)\times3=13$$

例2. 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问：(1) 当 λ 为何值时 $D=0$，

(2) 当 λ 为何值时 $D\neq0$。

解：

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$$

$\lambda^2-3\lambda=0$，则 $\lambda=0$，$\lambda=3$。

因此可得

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时 $D=0$，

(2) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时 $D\neq0$。

（二） 三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.2)$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线（图1-2）的方法

记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

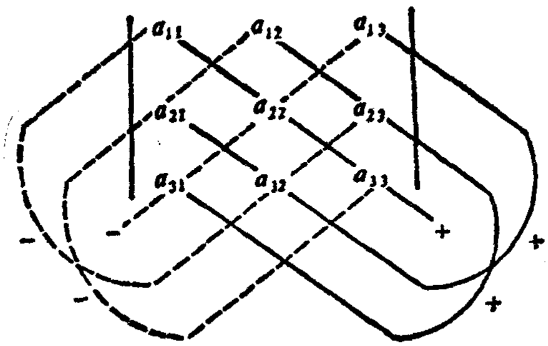

图 1-2

例1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 6 + 2\times 5\times(-1) + 3\times 4\times 0$

$$-1\times 5\times 0 - 2\times 4\times 6 - 3\times 0\times(-1)$$

$$= -10 - 48 = -58$$

例2. a，b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零。因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零。

例3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解：$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2-1$

$a^2-1 \Longleftrightarrow |a|>1$

因此可得

$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$。

§1.2 n 阶行列式

（一）排列与逆序

由数码 1，2，…，n 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个n级排列。

例如，1234 及 2431 都是 4 级排列，25413 是一个 5 级排列。

定义 1.1 在一个n级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为

$N(i_1i_2\cdots i_n)$

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$是奇数则称为奇排列，是偶数则称为偶排列。

例如，排列23154 中，2 在 1 前面，3 在1前面，5 在 4 前面，共有 3个逆序，即 $N(23154)=3$。所以 23145 为奇排列。

排列$12\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列。

例如，由 1，2，3 这 3 个数码组成的 3 级排列共有 $3!=6$ 种，其排列情况如表 1-1。

表 1-1

排列	逆序数	排列的奇偶性
1 2 3	0	偶排列
1 3 2	1	奇排列
2 1 3	1	奇排列
2 3 1	2	偶排列
3 1 2	2	偶排列
3 2 1	3	奇排列

在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的变换，称为一个对换，记为对换 (i_s, i_t)。

例如，对排列 21354 施以对换(1，4)后得到排列 24351。

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变。

证：

（1）首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形，设排列为

$$AijB$$

其中 A，B 表示除 i，j 两个数码外其余的数码；经过对换 (i, j)，变为排列

$$AjiB$$

比较上面两个排列中的逆序，显然，A，B 中数码的次序没有改变，并且 i，j 与 A，B 中数码的次序也没有改变，仅仅改变了 i 与 j 的次序，因此，新排列仅比原排列增加了一个逆序（当 $i<j$ 时），或减少了一个逆序（当 $i>j$ 时），所以它们的奇偶性相反。

（2）在一般情形，设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

经过对换 (i, j)，变为排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_s iB$$

新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s, j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$Ak_1k_2\cdots k_s jiB$$

再将 j 依次与 $k_s, \cdots, k_2, k_1$ 作 s 次相邻对换得到，即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到。由（1）的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反。

定理 1.2　n 个数码 $(n>1)$ 共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半。

证：n 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个。

设想将每一个奇排列都施以同一的对换，例如都对换 $(1, 2)$，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列，于是有 $p\leqslant q$；同理如将全部偶排列也都施以同一对换，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以得出 $p=q$，即奇偶排列数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个。

（二）n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

（1）二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和。两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列，当 j_1j_2 取遍了 2 级排列(12, 21)时，即得到二阶行列式的所有项（不包含符号），共为 $2!=2$ 项。

三阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的 3 个元素乘积的代数和。3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项（不包含符号），共为 $3!=6$ 项。

（2）每一项的符号是，当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。如在上述二阶行列式中，当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号；在上述三阶行列式中，当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号。

根据这个规律，可给出n阶行列式的定义。

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列。它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项。

一阶行列式$|a|$就是a。

行列式有时简记为$|a_{ij}|$。

由定理 1.2 可知：n阶行列式共有$n!$项，且冠以正号的项和冠以负号的项（不算元素本身所带的负号）各占一半。

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有$4!=24$项。

例如，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$行标排列为1234，元素取自不同行；列标排列为1234，元素取自不同列，且逆序数$N(1234)=0$，即元素乘积$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$前面应冠以正号，所以$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$为D的一项。

再例如，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$行标排列为1234，元素取自不同行；列标排列为4312，元素取自不同列，且逆序数$N(4312)=5$，即4312为奇排列，所以元素乘积$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$前面应冠以负号，即$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$为$D$的一项。

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$有两个元素取自第四列，所以它不是D的一项。

例1. 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中$a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

解：记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零，现在考察有哪些项不为零。一般项中第一个元素a_{1j_1}取自第一行，但第一行中只有 a_{11} 不为零，因而 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其它项均为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零，因第一个元素 a_{11} 已取自第一列，因此第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，其它项均为零；这样推下去，可得 $j_3=3$，$j_4=4$，…，$j_n=n$。因此，D中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零，其它项均为零。由于$N(1\ 2\cdots n)=0$，因此这一项应取正号，于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

我们称上面形式的行列式为下三角形行列式。

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

特殊情况：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中 $a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

这种行列式称为对角形行列式。

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积。

由行列式定义不难得出：一个行列式若有一行（或一列）中的元素皆为零，则此行列式必为零。

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替。

定理 1.3　n阶行列式$D=|a_{ij}|$的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列。

证：由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，因此，(1.4)式中的 n 个元素是取自 D 的不同的行不同的列。

如果交换(1.4)式中两个元素$a_{i_sj_s}$与$a_{i_tj_t}$，则其行标排列由$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$换为$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，由定理1.1可知其逆序数奇偶性改变；列标排列由$j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$换为$j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$其逆序数奇偶性亦改变。但对换后两下标排列逆序数之和的奇偶性则不改变，即有

$$(-1)^{N(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$$
$$=(-1)^{N(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

所以交换(1.4)式中元素的位置，其符号不改变。这样我们总可以