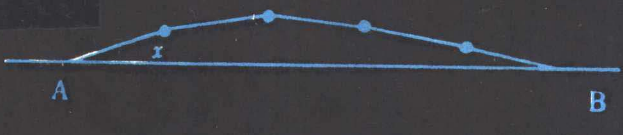
Matrix Methods for Engineers and Scientists

科技人员用的矩阵方法

【英】S·巴尼特 著
刘则刚 潘鼎坤 译
陕西科学技术出版社



科技人员用的
矩阵方法

[英] S·巴尼特 著

刘则刚
潘鼎坤 译
孙家永 校

陕西科学技术出版社

责任编辑　赵生久

科技人员的写作方法

（英）S·巴尼特　著

刘则刚　潘鼎坤　译

孙 家 永　校

陕 西 科 学 技 术 出 版 社 出 版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　　国营五二三厂印刷

787×1092毫米　32开本　8.5印张　170千字

1985年10月第1版　　1985年10月第1次印刷

印数：1—15,000

统一书号：13202·79　　定价：1.80元

内容及作者简介

《科技人员用的矩阵方法》是一本大学教科书，它为理工科学生提供了矩阵方法的一种新颖、简捷的讲法。本书没有通过线性代数里传统的、形式的方式① 来讲矩阵，而是用了一种非抽象的讲法，并且着重弄清解一些对于应用有价值的课题。本书用尽量少的严格证明来给出清晰的讲解，而且包含了大量附有答案的问题和习题。

机械、电机、土木、化工、控制和生产管理工程以及材料科学、物理、化学等等学科的大学生和研究生都将会发现这种广而不繁的取材对于他们学习初级或中级数学课程的需要来说是完全合适的。本书对数学、计算科学、运筹学和数理经济等方面的大学生也是极为有用的。

S·巴尼特毕业于曼彻斯特大学，攻读应用数学，并在拉夫巴勒大学得到哲学博士，………，由于他在矩阵理论及其应用方面的工作，曼彻斯特大学于1976年授予他科学博士。S·巴尼特博士曾经被邀请在加拿大、捷克斯洛伐克、以色列和美国各大学中开设许多讨论式的课程，在 1974—75 年间，他是加拿大安大略省京斯顿城奎因大学的客座数学教授。

①所谓形式的方式是指用公理化体系的形式论证的方式——译者注。

前 言

矩阵代数对所有在实际工作中应用数学的人来说确实是一个不可缺少的实用工具。并且，它比微积分学简单，因而常常得到学生们的欢迎。本书为理工科学生提供了一本最新式的、简明易懂的教程。它是在作者多年从事矩阵方法的教学以及对应用矩阵问题进行积极研究的基础上写成的。本书在内容的处理上不抽象，不完全按照常规，并注重于应用上有价值的课题。力求做到说理清楚明了，因此常常利用简单情况来验证结果的成立，而不用一般的证明方法。在绪论性的第一章中，说明在实际中如何产生矩阵概念。在紧接着的三章中，讲了关于矩阵代数、矩阵性质、线性方程组的唯一解、行列式以及逆矩阵等一系列基础内容。本书的后半部包含秩和方程组的非唯一解、特征值和特征向量、二次型和矩阵函数等一系列进一步的内容。选取的材料多是标准的，不过也包括了一些有趣且有用的资料（例如友矩阵，克罗内克乘积），这些内容在初级课本中是经常被删去的。书内自始至终列举应用例题。计算方面一个经常出现的主题就是简单而有效的高斯消元法，它在不同的形式下被用来求方程组的解（第三章和第五章）、三角形分解（第三章）、行列式、逆矩阵（第四章）和秩（第五章）的计算以及关于二次型符

号性质的检验（第七章）。此外，在第六章中还介绍了几个数值计算迭代格式。

课文中的问题，对于了解本书的题材是十分重要的，因而读到时都应当着手去解出它们（一条明显的真理是：不能用阅读数学书籍来学习数学，正象不能用观看演员演奏来学习演奏乐器一样）。每章末的习题也同样重要，不过比课文中的问题要难一些，所以不要求在第一次阅读时去做全部习题。我还利用习题导出了一些进一步的结果和应用。

最后，必须承认，矩阵除了在应用中的作用外，其理论也具有它自已的特殊魅力，这些年来它给了我很多乐趣。某些书，例如米尔斯基（Mirsky）的书（1963）和贝尔曼（Bellman）的书第一版（1970），都给了我很大的教益，所以我希望这本书在表达某些题材的感染力上能稍有成就。

我感谢那些在我准备这个手稿当中提出宝贵建议的那些同事（应当特别指出的是蒂姆·克罗宁，约翰·格兰特和约翰·马鲁拉斯）。我感谢温·史密斯不辞辛苦地为我打出了出色的打字原稿。对于 J. B. 赫利韦尔教授使布拉福大学在提供资料方面给予大力支持，史蒂夫·蒂尔在绘图方面的工作和约翰·马鲁拉斯帮助审阅校样，我也一并向他们表示衷心的感谢。

S·巴尼特写于布拉福①

1976年6月

①布拉福是位于英格兰北部的一个城市——译者。

记　号

$A=[a_{ij}]$	在第 i 行第 j 列处的元素为 a_{ij} 的矩阵。
$a=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$	n 维行向量，a_i 是它的第 i 个分量。
A^T	A 的转置 $=[a_{ji}]$。
$b=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$	n 维列向量。
$\bar{A}$	A 的复数共轭矩阵 $=[\bar{a}_{ij}]$。
A^*	A 的共轭转置 $=[\bar{A}]^T$。
$\mathrm{diag}[d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn}]$	$n\times n$ 对角矩阵，当 $i\neq j$ 时 $d_{ij}=0$。
I_n	$n\times n$ 单位矩阵 $=\mathrm{diag}[1,1,\cdots 1]$。
$A\otimes B$	A 和 B 的克罗内克乘积。
$tr(A)$	$n\times n$ 矩阵 A 的迹 $=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$。
$\dot{x}$	$dx/dt=[dx_1/dt,\cdots,dx_n/dt]$。
$\ddot{x}$	d^2x/dt^2
(Ri)，(Cj)，(Lk)	A 的第 i 行，第 j 列，第 k 排。

$\det A$, $\|A\|$	方阵 A 的行列式。
PDi	行列式的第 i 条性质（第 4.1.2 节）。
$\mathrm{adj}A$	A 的伴随矩阵。
A^{-1}	A 的逆矩阵。
$R(A)$	A 的秩。
$\|x\|$	向量 x 的欧氏范数 $=(\Sigma\|x_i\|^2)^{1/2}$。
$\|A\|$	A 的欧氏范数 $=(\Sigma\Sigma\|a_{ij}\|^2)^{1/2}$。
(4.39)	参看第四章方程 (4.39)。

目　　录

第一章

矩阵概念如何产生

用到矩阵的领域是很多的，在这一章中，我们特意选取其中几个不同的题目而叙述之。

例题 1.1 假设四种罐头食品 F_1, F_2, F_3, F_4 的价格（以某种货币单位计算）在三个不同的超级市场 S_1, S_2, S_3 上有如表 1.1 中所示：

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

表 1.1

例如 F_3 这一种食品的价格在超级市场 S_2 中是 13. 在 S_1 中每种食品买一盒的总价是 $17+7+11+21=56$，类似地，在 S_2 是 56，在 S_3 是 60.

在表 1.1 中的矩形数表叫做矩阵，在这个情形里共有三行和四列. 当存在两个集合（上面是食品和超级市场），且它们的元素被一组数（上面是价格）相联系，像上述那样，便一定会得到矩形数表.

例题1.2 表 1.2 给出四个美国城市间的距离（以英里

计），这是常见的许多路程图的格式的一个例子。

	芝加哥	纽约	旧金山	华盛顿
芝加哥	0	841	2212	704
纽约	841	0	3033	224
旧金山	2212	3033	0	2835
华盛顿	704	224	2835	0

表 1.2

这里的数表有同样的行数与列数，因而叫做方阵。这些零所在的线构成这个方阵的主对角线。还要注意，表 1.2 的数关于这个对角线来说是对称的，例如，由纽约市到旧金山的距离即可由第二行第三列相交处的数给出，也可由第三行第二列相交处的数给出。以后我们将会看到这种对称矩阵具有一些有趣的性质。

例题 1.3 图 1.1 叫做网络，它表示一个国家中的两个机场 A_1，A_2 与另一个国家里的三个机场 B_1，B_2，B_3 间的通航关系。在每条连线上的数字表示飞经这段航程上的不同航空公司的数目，例如提供由 A_2 到 B_2 的航班的有两个航空公司。可将这些信息表示如下：

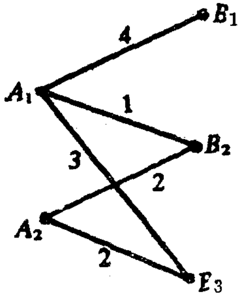


图 1.1 例题 1.3 各机场间的通航关系

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (1.1)$$

在这个矩形数表外面加上方括号，这是矩阵的标准记号。

例题 1.4 在图 1.2 中所表示的电路中的电流 i_1，i_2，i_3 可以证明满足方程组

$$\begin{aligned}(R_1+R_4+R_5)i_1-R_4i_2-R_5i_3&=E_1\\ -R_4i_1+(R_2+R_4+R_6)i_2-R_6i_3&=E_2\\ -R_5i_1-R_6i_2+(R_3+R_5+R_6)i_3&=E_3.\end{aligned}\qquad(1.2)$$

在这些方程中，i_1，i_2，i_3 是要求解的三个未知数，其它参数的值都是已知的。因方程组（1.2）中不含有这些 i 的非一次幂或其乘积，故叫它为线性方程组。利用矩阵记号可把方程组（1.2）表示成更加简明的形式如下：

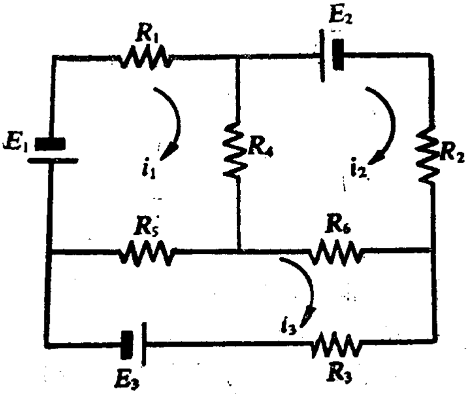


图 1.2 例题 1.4 的电路

$$\begin{bmatrix}(R_1+R_4+R_5) & -R_4 & -R_5\\ -R_4 & (R_2+R_4+R_6) & -R_6\\ -R_5 & -R_6 & (R_3+R_5+R_6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}.\qquad(1.3)$$

在现阶段，我们仅仅把（1.3）看作是（1.2）的另一种写法，这种写法是把方程组中的系数与未知数分开来记录的，具有少用记号的优点．但是我们要在第二章中才会明白这种表示法所具有的基本意义．目前线性方程组在许多应用中出

现，它们的解法构成了这本书的一个主题。

例题 1.5 一个炼油厂由两种原油 C_1 和 C_2 提炼成两个等级的汽油："高级的"和"低级的"。有两个可能的配料工艺过程可以利用，且对于每一轮生产流程的输入量和产量如表 1.3 所示。因之，如果工艺过程 1 和 2 的生产流程的次数分别是 x_1 和 x_2，那末原油 C_1 的总用量是 $3x_1+5x_2$，高级汽油的总产量是 $4x_1+5x_2$，等等。

	输入量		产量	
	原油C_1	原油C_2	高级汽油	低级汽油
生产过程1	2	4	4	6
生产过程2	5	2	5	3

表 1.3

原油 C_1，C_2 可利用的最大量分别是 170 个单位和 200 个单位。这两个生产过程每一轮的利润是 2.1 单位和 2.3 单位。今需要生产至少 150 个单位的高级汽油和至少 110 个单位的低级汽油，条件是使总利润 $2.1x_1+2.3x_2$ 达到极大。用数学的术语来说，这意味着我们必须确定 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$ 且满足

$$\left.\begin{array}{l}3x_1+5x_2\leqslant 170\\4x_1+2x_2\leqslant 200\end{array}\right\}\text{原油输入量的约束}$$

$$(1.4)$$

$$\left.\begin{array}{l}4x_1+5x_2\geqslant 150\\6x_1+3x_2\geqslant 110\end{array}\right\}\text{生产要求}$$

这是线性规划（LP）问题的一个简单例题。容易变换这些线性不等式为方程组。例如，如果我们规定未被使用的原油 C_1 为 x_3，那末，

$$x_3 = 170 - 3x_1 - 5x_2,$$

并且（1.4）中的第一个不等式含有 $x_3 \geqslant 0$ 的意思。所以这个不等式可代以方程

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 170, \qquad (1.5)$$

其中新变量 x_3 像 x_1 和 x_2 一样必是非负的。

类似地，这个问题的其他三个约束变为

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 200 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_5 &= 150 \\ 6x_1 + 3x_2 - x_6 &= 110, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

且所有的 x_4，x_5，x_6 都是非负的。在（1.5）和（1.6）里，未知数个数(六个)多于方程个数(四个)。这是 LP 问题的一个典型特点，而 LP 问题成为矩阵应用的一个重要领域。

可把（1.5）和（1.6）写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 200 \\ 150 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

例题 1.6 设 P 是平面中的一点，它具有笛卡儿坐标 x_1 和 x_2，并设 O 是原点，如图 1.3a 所示。假定 OP 沿反时针方向旋转一个 θ 角使得 P 运动到 $P' \equiv (x_1', x_2')$，如图 1.3b 所示。因为 $OP = OP'$（譬如说 $= r$）我们有 $x_1 = r\cos\alpha$，$x_2 = r\sin\alpha$ 和

$$\begin{aligned} x_1' &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \end{aligned}$$