空间与迭代

——从微积分谈起

卢树铭　李延保　编著

出版社

空间与迭代

——从微积分谈起

卢树铭　李延保　编著

安徽教育出版社

（皖）新登字03号

空间与迭代
——从微积分谈起
安徽教育出版社出版发行
（合肥市金寨路283号）
新华书店经销　　合肥永青印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：12.5　字数：290,000
1992年8月第1版　　1992年8月第1次印刷
印数：2,500
ISBN7—5336—0897—6/G·1349
定价：6.35元

前　言

随着科学技术日新月异的发展，数学已经成为科学技术、工程技术的研究和应用中不可缺少的工具，除了传统数学的内容外，现代数学的观点和方法也愈来愈多地被应用到这些领域中.不少科技文献和工程技术文献中，愈来愈多地应用近代数学的方法来处理工程技术问题。因此，近代数学的有关知识，已成为高科技研究和应用中迫切需要的重要工具。作为现代数学基础之一的泛函分析，在我国工科院校中正日益普及，成为工科院校研究生或高年级学生的必修课或选修课。目前以工科院校为主要对象编写的泛函分析教材，虽然已出版不少，但这些教材与不具备实分析基础的工科学生或工程技术人员来说，是有一定的距离和难度的，况且篇幅一般说来都比较大，偏重于概念的阐述、理论的证明，然而对概念的产生、应用和背景则较少兼顾。对那些欲寻根求源力求深解和运用的学生来说，颇感不足。为了弥补上述不足，作者根据多年的教学经验和从事这方面研究的体会。编写了这本《空间与迭代——从微积分谈起》。力求以微积分及线性代数为起点，深入浅出地、系统地介绍泛函分析的基本内容，以便于一般工科高年级学生、研究生和工程技术人员阅读，或作为教材使用。

本书共分为三章，第一章以微积分中有关概念为起点，介绍了集合与映射；长度、测度与积分等有关内容；第二章以微积分和线性代数初步知识为起点、介绍度量空间、赋范空间和内积空间，闭性、完备性和紧性，线性算子与线性泛函，闭算子、伴随算子与无界算子，算子的谱等有关内容，第三章介绍压缩映射与

方程求解，Fourier级数与Fourier变换，并附有计算实例及计算程序。力求使本书在内容、论证、举例等方面都较一般教材丰富，对概念、方法、背景的阐述深入浅出便于阅读；力求使本书既是一本具有系统完整、理论严谨的理论书籍，又具有科普读物的特点。本书以泛函分析的基本内容为线索，极力把有关知识和现代数学的一些重要基础，如线性拓扑空间、广义函数、抽象测度论、积分方程及偏微分方程边值问题及无界算子谱理论等联系起来。本书还联系着泛函分析对与工程技术和一些应用学科有关的内容，如控制论、计算机算法等作了专门介绍。本书对见诸于通常教材的定理没有再给出或只给出简单扼要的证明，而对一般教材中没有涉及的证明及概念、方法的阐述则是较为详尽的。因此，本书对理论研究和实际应用来说，都有一定的参考价值。

本书可供工科院校、师范院校作为高年级学生和研究生教材，也可供从事应用学科研究的人员和工程技术人员参考。

本书编写过程中，得到南京大学马吉溥教授的热情帮助，在百忙之中帮助审阅全稿，并为本书作序，特在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，加之经验不足，书中缺点和错误，在所难免，敬请同行们批评指正。

卢树铭、李延保

1990年

序

现代科学发展的特点是相互渗透，形成了许多边缘学科。数学也随着在许多工程技术和科学理论上得到重要的应用，形成了现代数学新分支和理论。作为现代数学的基础之一的泛函分析，在我国工科院校中日益普及。目前，我国以理工科和师范等为对象编写的泛函分析教程已出版了很多。它们的共同点是精心组织，力尽用最小的篇幅来介绍必要的基础知识，同时又不失其严谨性和系统性。限于教材的篇幅，对概念的产生、应用和背景无法兼顾。这样对那些欲探根求源、力求深解和运用能力的学生，颇感不足。《空间与迭代——从微积分谈起》一书的作者，结合他们多年教学的经验和体会，弥补了现有教材的上述不足，作出了自己的奉献。该书在内容、论证、举例等方面都较一般教材丰实。对概念、方法，背景的阐述深入浅出，具有科普读物的特点，该书以泛函分析的基本内容为线，极力把有关知识和现代数学的一些重要基础，如线性拓扑空间、广义函数、抽象测度论、积分方程、偏微分方程边值问题及无界算子谱理论等联系起来。对与工程技术和一些应用学科有关的，如控制论、计算机算法等，联系泛函分析知识作了专门的介绍，这对深入学习、培养运用泛函分析知识的能力是很有启发性的，该书的书名，表露了作者的一番意图和特色。这本书中，对见诸于通常教材的定理没有再给出或只给出简单扼要的证明，而对一般教本中没有涉及的内容的证明和概

念，方法的阐述则是较翔实的。

本书，不论对正在学习或学过泛函分析的理、工科学生，都是很有益的读物。它对执教泛函分析课程的一些教师也是一本有益的教学参考书。我相信，本书将以它与现有教材不同的特有风格，受到读者的欢迎。

南京大学　马吉溥

1989.11.20

符 号 说 明

$\in$	属于
$\bar{\in}$、$\notin$	不属于
$\subset$、$\supset$	包含
$\not\subset$	不包含
$\to$	趋近于
$\mapsto$	映射到
$\Rightarrow$	(1)蕴含；(2)必要性
$\Leftarrow$	(1)被蕴含；(2)充分性
$\Leftrightarrow$	充分且必要，等价
$\exists$	存在着，有
$\forall$	对所有的，对任意的，对每一个
sup	上确界
inf	下确界
$\bigcup$	并(集)
$\bigcap$	交(集)
$\mathring{A}$	集A的内部
A'	集A的导集
$\overline{A}$	集A的闭包
$X_{X\times Y}$	X与Y的积集
$d(x,y)$	点x到点y的距离
$d(x,A)$	点x到集A的距离
$V(x_0,r)$, $V_r(x_0)$	点x_0的r邻域，开球

$V(x_0,r)$ $V_r(x_0)$	点x_0的r闭邻域，闭球
$S(x_0, r)$	点x_0为心，r为半径的球面
$\overline{z}$	复共轭
$\|z\|$	绝对值，复数的模
$\mathrm{Re}(z)$	实部
$\mathrm{Im}(z)$	虚部
$\varnothing$	空集
A^c	集A的余集
N	自然数集
R	实数集
C	复数集
R^n	n维欧氏空间
A^T	矩阵A的转置
A^*	算子A的共轭算子（伴随算子）
$f(A)$	集A的像
$f^{-1}(A)$	集A的原像
$\triangleq$	定义为
$B(X,Y)$	$X\to Y$的有界线性算子构成的空间
$C(X、Y)$	紧算子空间
$C_{[a\ b]}$	连续函数空间
$C_{[a\ b]}^{(k)}$	具有k阶连续导数函数空间
$L_{[a\ b]}^p$	p次幂（L）可积函数空间
l^p	$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|\xi_i\|^p$收敛的数列（$\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_n$，…）组成的数列空间
l^∞	有界数列空间

X^*	X的共轭空间
$\dim X$	X的维数
$\operatorname{dia} A$	集A的直径
$\operatorname{span} M$	M的正交补
$N(A)$	算子A的零空间
$R(A)$	算子A的值域
$D(A)$	算子A的定义域
$\Vert x \Vert$	向量x的范数
$\Vert f \Vert$	泛函f的范数
$\Vert A \Vert$	算子A的范数
$E \triangle F$	E与F的对称差
$\operatorname{supp} f$	f的支集

目 录

绂

第一章　从微积分中的概念谈起

§1.1　集合与映射

一、实直线R上有多少个点？

函数和极限是微积分学的主要研究对象，函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$　表明当x与x_0充分接近时，$f(x)$与常数a可以任意接近。但细想一下，点x是怎样沿着X轴趋向定点x_0的？假想从某个点x出发沿X轴向x_0逼近，x的下一个点是什么？由于直线上任意两个位置之间总存在着无穷多个中间的位置，故当人们一旦认为点x_1是x的下一个到达的点时，就必然有$|x_1-x|>0$，从而在x与x_1之间必然还夹有其它确定的点。

幸好，在研究极限问题时，人们更关心的是动点的变化趋势是否稳定，是否能无限地接近某个定值。

法国数学家柯西（A・L・Cauchy 1789—1857）给出了极限的$\varepsilon-\delta$定义，即

若对于$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

成立，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$以a为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$。

柯西的极限定义从“静态”的角度巧妙地避开了上面问题，给出了当$x\to x_0$时，$f(x)\to a$的极限过程的精确描述，继牛顿、莱布尼兹之后进一步奠定了微积分的基础。

然而，点x若连续地跑向点x_0时，其间究竟有多少点仍是人们十分关心的问题。

1900年巴黎国际数学大会上德国著名数学家希尔伯特(D.Hilbert 1862—1943)在他的著名的演说中列举了二十三个未解决的数学问题，其中第一个就是所谓的“连续统假设”，它的实质就是实数有多少的问题，或者说一条实直线上的点有多少的问题。

著名的数学家高斯（Gauss 1777—1855）曾设想过一条直线是由无穷多个点所组成，即直线上点的个数无法用有限数字来表示。

通常，称具有无穷多个元素的集合为**无穷集**。实数集、自然数集$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$、整数集$Z=\{0, -1, +1, -2, +2, \cdots\}$及直线上有理点集、无理点集都是无穷集。

对于集合使用的“无穷”这个词（如无穷多个元素、无穷集等）与微积分中所述的“无穷大”的意义是不同的。尽管它们都有“并非有限”的含义，但微积分中的无穷大（常用∞表示）只是变量可以无限制增大，可以超过任一有限值的略语，它常被用来代表一种正在演变中的、永远达不到最终状态的过程。因此，记号∞并不像1、$\sqrt{3}$、π这样意义的数，它不满足数的运算法则，如$a+a=2a$，$a-a=0$等等。因此，不能按照数的运算律对∞进行运算，事实上，∞更多地只能被看作是一种比喻。

但是，线段（a，b）中包含有无穷多个点，这里是真的、实在的“无穷”，其中每个元素都是很确定的。

十九世纪许多数学家都尽可能地回避“无穷”这一概念，同时又不得不暗暗地考虑同样为无穷集的数直线R和自然数集N哪一个点更多些？

如果我们把一个集合中元素的个数称为该集合的**基数**（或称为势），那末是否任何无穷集都具有相同的基数呢？

关键在于如何对无穷集进行计数。德国著名数学家康托（G. Canter 1845—1918）巧妙地应用“配对”（即一一对应）的思想找到了给无穷集计数的方法，并由此创立了“集合论”，成为现代数学奠基人之一。

他的思想是，如果教室中每张椅子上都坐着一个人，每个人也都有椅子坐，那末该教室中人的个数和椅子的张数一定是相等的。同样，对于两个无穷集如果能够成功地把它们的元素一一配对，那末就完全有理由说这两个集在数量上是相等的，或者说它们的基数是相等的。

定义1·1·1(集合的对等)　设A、B是二集合，若存在对应关系f，使将A中任意点x通过f在B中都有一点y与之对应，而B中任意点y也一定恰是A中某一点x通过f在B中的对应点，则称f建立了集A到集B上的**一一对应**，并称集A和集B是**对等的集合**。记作$A\sim B$。

若用$\bar{\bar{A}}$表示集A的基数，则集A与B对等也可记作

$$\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}。$$

规定　与集$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$对等的集合的基数为n，空集$\varnothing$的基数为0。

因此，可以认为凡基数为自然数或0的集合为**有限集**，否则便称为**无穷集**。

有限集的基数就是该集合中元素的个数，集合的基数正是有限集元素个数概念的推广。

由于对无穷集的计数是在比较中进行的，自然首先想到的是

那些与自然数集的元素具有相同个数的无穷集。

定义1·1·2（可列集） 凡与自然数集$N=\{1,2,\cdots\}$对等的集合称为**可列集**（或称为**可数集**），其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零）。

当集合A为有限集或可列集时，称集A为**至多可列集**。

显然集合A为可列的充分必要条件是A中元素可以排成一个无穷序列的形式，即

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$

例如，正偶数集：$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$

正奇数集：$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$

整数集：$\{0,-1,+1,-2,+2,\cdots\}$

都是可列集。

一个令人吃惊的事实是：一个无穷集可以和它的真子集对等，也就意味着可以和它的某个真子集看作具有“一样多”的元素，而这正是康托“配对”思想的核心，它反映了无穷集一个本质属性。

定理1·1·1（无穷集的特征性质） 集合A为无穷集的充分必要条件是它能与自己的一个真子集对等。

证明 〔必要性〕 设A为任一无穷集，从A中任取一个元素记为a_1，则$A-\{a_1\}$仍为无穷集，故在$A-\{a_1\}$中又可取出元素a_2，$A-\{a_1,a_2\}$仍为无穷集，从中又可取出元素a_3，这样继续下去便得到A中一列元素$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$

记 $\tilde{A}=A-\{a_1\}$，建立A与$\tilde{A}$的对应如下：$f:A\to\tilde{A}$，且

$$f(x)=\begin{cases}a^{n+1}, & \text{当} x=a_n \text{时；}\\ x, & \text{当} x\in A-\{a_1,a_2,\cdots\} \text{时}\end{cases}$$

显然，f为A到$\tilde{A}$上的一一对应，故$A\sim\tilde{A}$且$\tilde{A}$为A的真子集。

〔充分性〕 若有$\tilde{A}\subsetneqq A$且$A\sim\tilde{A}$，则