漫谈拓扑学

江苏科学技术出版社

拓扑学通俗读物

漫谈拓扑学

〔苏〕B.Γ.波尔金斯基
B.A.叶夫来莫维奇 著
高国士 译

江苏科学技术出版社

漫 谈 拓 扑 学

〔苏〕B.Г波尔金斯基 B.A.叶夫来莫维奇 著
高国士 译

出版：江苏科学技术出版社
发行：江 苏 省 新 华 书 店
印刷：盐 城 市 印 刷 厂

开本787×1092毫米 1/32 印张 4.5 字数 90,000
1983年10月第1版 1983年10月第1次印刷
印数1—8,500册

书号 14196·065 定价 0.50 元

责任编辑 沈绍绪

В.Г.БОЛТЯНСКИЙ И В.А.ЕФРЕМОВИЧ

ОЧЕРК ОСНОВНЫХ ИДЕЙ ТОПОЛОГИИ

本书根据苏联《数学教学》杂志2（1957）—6（1961）译出

内 容 提 要

这是一本拓扑学的通俗读物.作者通过几何直观深入浅出地阐明拓扑学的基本概念与基础知识。全书分三部分:第一部分是基本概念，第二部分是点集拓扑学，第三部分是组合拓扑学。对于希望略知拓扑学面貌的读者可以随意浏览；对于想学拓扑学的读者，本书是一良好的入门读物；对于已学过些拓扑学的读者可于此吸取感性材料。所以本书可供广大读者阅读或学习。

译者序

拓扑学(topology)是几何学的年青分支之一。它成为一门独立的学科只不过是近半个多世纪的事。但是拓扑学概念的起源要上溯到数学家欧拉(Euler)的时代，他在1752年发表的关于多面体的顶点数、棱数和面数的关系式及其推广至今还是代数拓扑学(algebraic topology)的中心内容。

拓扑学所研究的是几何图形经过连续形变后仍能保持的性质。这种形变非常剧烈，足使几何图形的所有度量以及射影性质全部消失，而仍能保持着的那些性质却是那么丰富多采、光怪陆离、引人入胜。但是作为一门数学，必须具有严格的表述形式，象通常的拓扑学教材那样，以致生动有趣的几何事实被一大堆定义、定理及公式所淹没。初学者常感晦涩难懂，不得入门。本书作者通过几何直观，通俗地、深入浅出地叙述拓扑学的基本概念(不给以数学论证)，值得向读者推荐。

拓扑学在今天不仅作为一门基础理论学科已渗透到数学的许多其它分支中去，而且在电工学、桁架力学等技术科学中也取得了广泛的应用。对于只需了解拓扑学含义的读者，本书可供随意浏览，当不乏新奇之感。对于想学拓扑学(包括想知道拓扑学在工程技术上的应用及想进入拓扑学研究领域)的读者，本书是一良好的入门读物。具备了丰富的直观基础，进而阅读拓扑学教材或专著时，对严格的数学论证就会感到亲切有味，较能接受。

本书分三部分：第一部分是基本概念。从连续性概念出

发介绍一些简单的拓扑不变量及有趣的几何事实，为第三部分作准备。第三部分是组合拓扑学，主要介绍两个重要的拓扑不变量——同伦群与同调群，它们都要借用代数学中群的概念(见书末附录)。所以这一部分近代称为代数拓扑学。这两个拓扑不变量十分重要，现已分别扩展为代数拓扑学的两大分支——同伦论(homotopy)与同调论(homology)。二十世纪以来，集合论方法在拓扑学中的运用形成了点集拓扑学(point set topology)，这是本书第二部分的内容。其中度量空间、拓扑空间等内容的发展，形成近代的一般拓扑学(general topology)。

译者水平有限，错误难免，请读者指正。

高国士

目　　录

第一部分　基本概念

第一章　拓扑学的对象

拓扑学——最新的几何学科之一，它的创立与欧拉(Euler)、潘加来(Poincaré)、弗雷协(Fréchet)、黎斯(Reisz)和其他学者的名字分不开。拓扑学作为独立的数学分支还不过半个世纪之久。

每一数学分支的发展，基本概念贯穿着这部门的所有知识，并且可以说确定了这门数学分支的面貌。那么，引进怎样的基本概念来创立这门新科学——拓扑学呢？这就是连续性概念。连续性概念在数学分析中并不是基本概念，它从属于其它概念，所以多少不能得到完全发展。而在拓扑学中连续性概念得到了完全的、各方面的发展。

§1　连续函数与连续映象

在数学分析中，我们遇到各种各样的函数，而较常见的是连续函数。在拓扑学中，函数概念与连续性概念得到进一步的扩展。

当我们说y是x的函数，记作$y=f(x)$时，这就是说y依赖于x，也就是对x的每一个值，规定了y的某一确定的值与之对应。函数可以由公式给出（例如$y=\lg(x^2+1)$），也可以通过某些图形的几何性质来给出（如果圆周的半径是已知的，则弓

形的弧长是弓形面积的函数)，或以其它任何方式给出。此后我们考察函数$y=f(x)$，总是指y是以某种方式依赖于x的。

函数$y=f(x)$可能不是对所有的实数x而是仅对一部分实数有意义。例如函数$y=\lg x$仅对x的正值有意义；函数$y=\arcsin(\lg x)$仅对介于$\frac{1}{10}$与10间的数(包括端点)有意义。一般说，每一个函数$y=f(x)$有它的定义域，也就是使函数有意义的所有x的值的集合。

给出函数——这就是对某集合A(定义域)的每一点x规定了另一集合B的确定的点$f(x)$与之对应。函数的这样一般的理解可以叙述为在集合A上给定了在集合B中取值的函数，或者说给定了由集合A到集合B的映象。

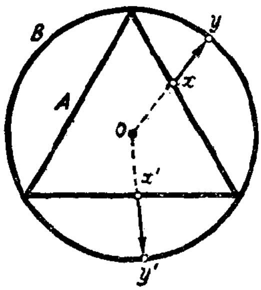


图1

当讲到一个集合到另一个集合的映象时，所考察的集合并不只是由实数组成。例如设集合A是等边三角形的边上的点所成集合，集合B是这三角形的外接圆周上的点所成集合(图1)。把三角形边上的点映成圆周上的点的中心投影就是集合A到集合B的一个映象。

现在转到连续函数概念。函数$y=f(x)$称为在点x_0是连续的，如果对于与x_0相差很小的x的值，函数值$f(x)$与$f(x_0)$也相差很小。说得更精确些，函数$f(x)$在点x_0是连续的，如果对任意数$\varepsilon>0$，可以找到这样的数$\delta>0$，使任何与x_0的距离小于δ的点x所对应的值$f(x)$与$f(x_0)$的距离小于ε。为了使这定义有意义，必须在集合A及集合B上规定两点间的距

离。在数（实数或复数）的情况，点a、b的距离可以取作$|a-b|$。

与点x_0的距离小于δ的所有点所成集合U称为点x_0的δ-邻域。同样，与点$f(x_0)$的距离小于ε的所有点所成的集合V称为点$f(x_0)$的ε-邻域。这样，数直线上某些点的邻域就是以这点为中心的不大的开线段（不包括端点）。如果A是球面，x_0是它的北极，则x_0的邻域U是球冠（图2）。球冠取得愈小，点x_0的邻域U愈小。对展布在空间的任何图形A，它的点x_0的δ-邻域是图形A的位于以x_0为中心以δ为半径的球的内部的部分。

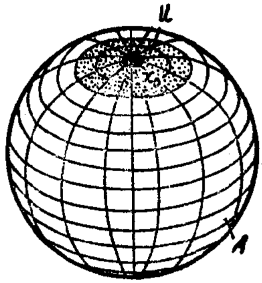


图2

借助于邻域这一术语，连续映象可以定义如下：映象f在点x_0是连续的，如果对点$f(x_0)$（在集合B中）的任意小的邻域V总能找到点x_0的（在集合A中）的邻域U，使U中所有点（经映象f）的象都落在邻域V的内部。换言之，整个邻域U映到邻域V内。

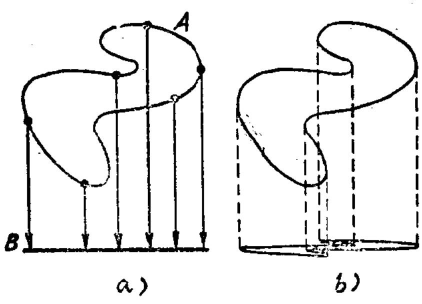


图3

容易看到，图1所描绘的映象在集合A的每一点x_0是连续的。

如果集合A到集合B的映象f在集合A的每一点x_0是连续的，则简称映象f是连续的。

在直观上，连续映象把集合A中彼此“靠近”的点映成集合B中彼此“靠近”的

点。也就是经过映象不会发生破裂，不会破坏集合A的完整性。注意，可以有集合A的不同的点映成集合B的同一个点，可能出现"叠合"的情况。

设在平面上有曲线A及直线B，曲线A到直线B的投影是集合A到集合B的连续映象（图3a），这一映象出现了"叠合"，描绘如图3b)。

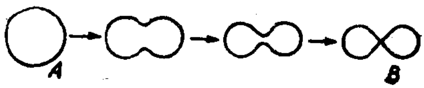


图4

考察圆周到图形"∞"的连续映象(图4)，它把圆周上的两个不同的点映成图形"∞"的同一个点。

§ 2 同胚映象

连续映象不会出现"破裂现象"，但可能出现"叠合"情况。有一种非常重要的映象，它既不会出现"破裂"，也不会出现"叠合"，这种映象称为同胚映象。我们较详细地研究这一概念。

集合A到集合B的映象f称为是双方单值的（即一一对应的），如果集合B的每一点y正好是由集合A的一个点映成。所以双方单值的映象不会把集合A的两个不同的点映成集合B的同一个点，不会出现"叠合"现象；此外，集合B的每一点都为集合A的某一点所对应着，也就是集合A映成整个集合B，而不是集合B的一部分。对于由集合A到集合B的双方单值映象f，可以定义由集合B到集合A的逆映象：对集合B的每一点y，规定集合A的这样的一点x与之对应，使得这点x经映象f的象就是y。这逆映象表示为f^{-1}。

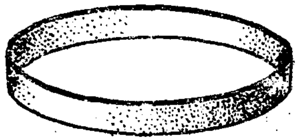
前面图1所示三角形边界到圆周的中心投影是双方单值

映象。

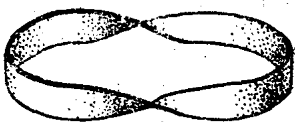
图形A到图形B的映象f称为同胚映象(或同胚的)，如果，第一，这映象是双方单值的，及第二，又是双方连续的，也就是不仅是映象f是连续的，而且逆映象f^{-1}也是连续的。上述图1所示三角形边界到圆周的映象就是同胚映象。

两个图形A及B，其中一个同胚地映为另一个，则称图形A及B是彼此同胚的。例如，三角形(或多角形)的边界与圆周是同胚的。

两个同胚图形在直观上可设想为由某些坚固而有弹性的材料制成，允许作任何的拉长与弯曲，但不能撕破和叠合。如果我们可以通过上述做法把一个图形"安放"在另一个图形上，则这两个图形是同胚的。但是不能设想任何两个同胚的图形总可以在空间通过上述做法把一个图形"安放"到另一个图形上去。例如图5a)所示的图形(同胚于圆柱体的侧面的带)及图5b)所示的图形(扭转2π的带)是同胚的(为什么?)，但是不能在空间通过拉长、变形(不撕断、粘合)把一个"安放"到另一个上去。这一事实的严格证明是不简单的。



a)



b)

图5

把图形的同胚概念与全等概念加以比较是有益的。在几何学里考察称为运动的一些特殊形式的映象，也就是象刚体那样的位移，不变动图形各部分相对间的距离(不扭弯、伸长、压缩图形的某些部分)。两个图形，如果可以借助于运动把一

个转移到另一个则称这两个图形是全等的(或合同的)，也就是(从几何学观点看)这两个图形是一样的，没有区别的。在拓扑学里考察的映象，比运动更一般，即所谓同胚映象，这种映象并不保持距离不变，而是保持图形中点的分布的连续性(也就是不容许撕破与叠合)。从拓扑学的观点看，两个同胚的图形是一样的，没有区别的。

下面列举一些彼此同胚的图形。

球面，正方体的面，圆柱体的表面，椭球面等都是同胚的，但是它们与圆环面(图6a)象汽车轮胎那样的曲面)不是同胚的。秤锤(图6b)的曲面和圆环面同胚。如把俄文字母看作曲线，则字母Г，Л，М，П，С是同胚的，字母Е，У，Т，Ч，Ш，Ц，Э也是同胚的，但与前面那些字母不同胚。字母О不同胚于任何其它的俄文字母。

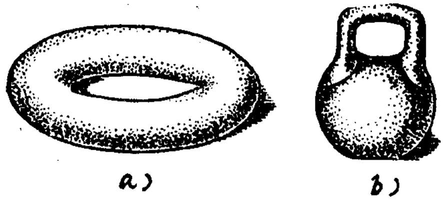


图6

再考察一个同胚的例。设A'是以O为中心的半圆周，B是切于半圆周且平行于直径pq的直线(图7)，由中心O的投影把半圆周上的点映成直线上的点。除半圆周的端点p、q外，其他的点对应着直线上的确定的点。去掉半圆周的端点p、q，我们得到

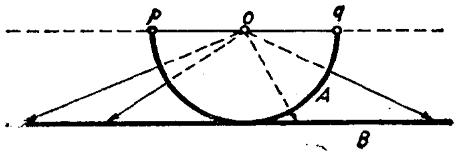


图7

图形A，它同胚地映成(投影)直线B．所以，直线同胚于没有端点的半圆周，而半圆周同胚于线段(可以把它拉直)．所以直线同胚于没有端点的线段（或称为开线段）．

最后的例，我们设A是去掉左端点的线段，f是把这线段连接成圆周B的映象(图8)．这映象是双方单值的(并没有出现

图8

两点的叠合，因作为集合A的线段正好只有一个端点)．同时容易看出又是连续的。但是，这映象不是同胚的，因为逆映象f^{-1}在点a(对应着线段A的右端点)是不连续的：在集合B上在点a的左边无限靠近点a的点x，线段A上和它对应的点并不靠近线段的右端点，也就是通过映象f^{-1}把图形B"撕破"了。

§ 3 拓扑不变量

现在已不难阐明拓扑学研究些什么。因为从拓扑学的观点，两个彼此同胚的图形是算作一样的，所以拓扑学所感兴趣的仅是当一个图形转变为与它同胚的图形时所保持的性质．事实上，两个"拓扑的"一样的图形应该具有"拓扑的"一样的性质。经过同胚映象而不变的图形的性质称为图形的拓扑性质或拓扑不变量。从拓扑学的观点研究图形，就是研究图形的拓扑性质，这就是拓扑学所从事研究的。

三角形的边界具有三个顶点，这性质不是拓扑不变量，因为正方形的边界(与三角形边界同胚)具有四个顶点，而圆周(也和三角形边界同胚)没有顶点。

图形的怎样的性质是拓扑不变量？此外，术语“图形”(这里采用它完全是为了直观)应怎样理解？不阐明这些问题，或多或少不能对拓扑学有一个清楚的概念．我们准备在后面阐明这些重要问题．

第二章　最简单的拓扑不变量

§4　拓扑不变量的作用

为了断言两个图形是彼此同胚的，只要实际上得到从一个图形到另一个图形的同胚映象就行了．我们在前面证明三角形的边界同胚于圆周，以及直线与开线段同胚，正是用这种方法．

但是，怎样证明两个图形不是同胚呢？我们找不到一个图形到另一个图形的同胚映象不足以证实这样的同胚映象并不存在．前面我们说过球面不同胚于环面，字母O不同胚于其他俄文字母，字母Г与T不是同胚的，读者甚至并不怀疑球面与环面不是同胚的．但是，不怀疑是一件事，严格地证明这一事实是另一件事．

为了证明两个图形不是彼此同胚要利用拓扑不变量．比较经常采用的是以数的形式(或其他代数对象的形式)出现的不变量，因为用这样的不变量比较方便．例如，如果我们建立了某种法则，使得相应于每一图形有一个确定的数，并且对应于两个同胚图形的数是相等的．那末，这个数就表示为图形为同胚映象所保持的性质，也就是，这个数是拓扑不变量．如果与两个图形A和B对应的数是不同的，则它们是不可能同胚的．