多元微积分学

兰·赛奇 著　　黄守德　雷德秀 译

湖 北 教 育 出 版 社

多元微积分学

兰·赛奇 著　　黄守德　雷德秀 译

湖 北 教 育 出 版 社

多元微积分学

兰·赛奇 著

黄守德 雷德秀 译

*

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

武汉大学出版社印刷总厂印刷

850×1168毫米32开本 16.5印张 1插页 405,000字

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数：1－4,000

统一书号：7306·457 定价：3.80元

序

黄守德与雷德秀两同志合译的美国兰·塞奇编著的《多元微积分学》,用向量及矩阵讲述分析内容。寓意清新,推证简洁。在讲述势函数、海赛矩阵、映照等方面,言少意明,倍觉精当。特别用分析方法证明经典理论中的不动点定理,更是独具一格。

此书中译版将在我国基础数学教学方面发生积极的作用。余故乐为之序。

李国平

一九八四年二月八日

前　言

本教材是作为多元微积分的课本而编写的。如果安排在《初等微积分教程》之后，根据讲授内容的选择，本教材可供一学期或一学年使用。

作为一个学期的教材，前八章提供了适当的内容。如果仍有剩余时间，教师可根据自己的意见，从中选取一部分教材讲授。如第十一章中的极大值——极小极，或者第十二章开始部分的高阶导数及泰勒公式等。

前八章彼此联系相当密切，后面的很多内容都是前面内容根据链式法则直接推导的结果。其核心思想是对于一个给定的多元函数，如果我们要考察其在P、Q两点的值，我们就用一条曲线（通常用一条线段）把这两点联结起来，于是在此曲线上找出函数值。据此，我们就能把多变量中的很多种问题简化为单变量的问题和方法。例如切平面，方向导数，能量守恒定律，泰勒公式都是用这种方式处理的。

作为一个学期的教材，比较起其它内容来说，格林定理就更应该包括进来，因为它给我们提供了一个变量和两个变量的微分和积分的非常精巧的结合技术，这个公式在实践中经常用到，因而有必要熟练地掌握。

作为一学年的教材，本书的剩余部分为第二学期提供了足够的材料。这一部分包括有三个课题。它们在逻辑上是彼此独立的，因而顺序也是可以任意的。因为从整体上说需要有计划性。所以这些章节总是要确定一定的顺序，但是在逻辑上这种选择是任意的。从教学的角度出发，本书所编排的顺序对绝大部分人来

说可能是最好的。

这三个课题是：

a)三重积分和曲面积分，这些是第七章和第八章内容的继续。

b)极大值—极小值和泰勒公式，这些是微分曲线和正交性的继续，并继续通过多元函数在曲线上或线段上的值来分析二元和多元函数，由此把对某些性质的研究简化为对一元函数的研究。

c)矩阵和行列式，这些组成了函数的线性部分，并影响如逆映射定理和变量替换公式的某些性质。

不同的教师，可根据自己的意见来确定这三个课题的先后顺序。对于经济方面的应用，三重积分和曲面积分的内容放在极大值—极小值和泰勒公式中的二次型之后进行会更合理一些。所采用的仅限于运用链式法则的推论进行运算的技能。

我认为重要的是即使在初始阶段，学生们应该能够象进行多项式的运算一样进行微分运算。因而第十章第四节能在早期进行，并给出泰勒公式在一般情况下的证明，而把理论性强得多的第十章第五节全部略去。泰勒公式的证明所用的专业知识是简易的，虽然证明过程中也避免了使用符号上的混乱，但仍然可能引起学生某些困难，其原因在于这个证明所涉及的概念对学生来说略微有点抽象。（不妨试试不用导数的幂的形式来叙述这一定理！）

本书中我只收进了对于微积分直接有用的那一部分线性代数。这个部分为一个学期的微积分所需的线性代数提供了合适的内容。许多微积分教程仍然强调分析方面的体系。仅少数内容需要涉及矩阵和线性变换的概念，及强调线性逼近的重要性部分。比方说从一个空间变换到另一个空间的链式法则。而我认为这些是第二学期微积分课程的核心部分，有助于学生很快地熟悉这些最重要的基本概念，并知道在实践中怎么应用。多年以前，在微积分教程里没有引进线性代数的内容。而近年来，所包括的内容

可能又过多了一点，超过了实际需要。我试图在本书中做到选材适量。

本书中收有一些证明。总的说来，我们的方针是收进为说明基本原则所必不可少的，并在技巧上并不复杂的证明。这些证明都很短，学生们在学习时不会有太大的困难。例如势函数的唯一性，能量守恒定理，当势函数存在时积分与所选择的路线无关，最简单情况下的格林定理等等的证明都是如此。

别的证明，如链式法则的证明，或势函数局部存在的证明根据老师和学生的兴趣可在课堂上给出或省略。为了方便，这些证明都收在每章节的末尾。

自前版以来，我们又增加了很多给出答案的例题，并扩充了某些练习的答案，其中包括多种解答。这样做，使课文的篇幅更简短些。这些新编进的解答，也可以看作是题目和答案不在一起的例题。学生在解题时可以先自己独立思考，如果遇到困难，再参看答案。

在附录中我收进了级数和傅立叶级数两章，可使学生对于第二年的高等微积分有一个粗略的了解。

康涅新狄州　新港

兰·塞奇

1979年1月

目　录

第一章　向　　量

向量的概念，对于研究多变量函数是一个基本的概念，它对于下面所讨论的内容提供了几何依据。因此我们将对向量的几何和代数性质进行全面的讨论。

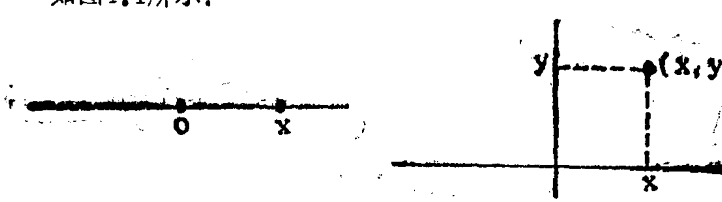
这部分所有陈述和证明的一个值得注意的特点是，它们在三维空间中的证明与在二维空间中的证明相比，难易程度没有什么区别。由于需要同时讨论$n=2$和$n=3$，因此对于某些情况我们不妨用不确定的n来代替，另外对于物理学和经济学，习惯于使用n似乎更为有益。然而为了教学的方便，全书中我们总是首先对于$n=2$和$n=3$的特殊情况给出定义和公式，这样读者可以根据自己的意愿来决定是否省略一般n的情况。

第一节　空间点的定义

我们知道只要选择了长度单位，一个数可以用来表示直线上的一个点。

一个数对(x, y)可以用来表示平面上的一个点。

如图1.1所示：



(a)直线上的点　　(b)平面上的点

图 1.1

我们现在说一个三元数组(x, y, z)可以用来表示空间（即三维空间）的一个点。为此我们只需要再增加一个数轴。

如图1.2所示：

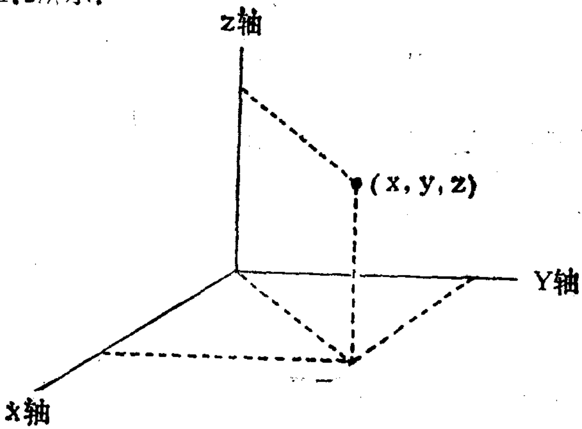


图 1.2

我们也能够用(x_1, x_2, x_3)代替x, y, z。直线可以叫做一维空间，平面可以叫做二维空间。

这样我们可以说单个数表示一维空间的一个点。一个数对表示二维空间的一个点。一个三元数组表示三维空间的一个点。

尽管我们不能进一步绘出更高维空间的图形来，但我们仍然可以设想四元数组

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

并且规定这是四维空间的一个点。一个五元数组是五维空间的一个点。然后还有六元数组，七元数组，八元数组……

如果n为整数，由此我们定义n维空间的一个点对应着一个n元数组

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

我们用一个大写字母X表示这样的一个n元数组，同时尽量用小写字母表示数，用大写字母表示点，则我们称数$x_1, x_2, \cdots, x_n$

为点X的坐标。例如，在三维空间，2是点（2，3，－4）的第一个坐标，－4是它的第三个坐标。我们用R_n表示n维空间。

本书的例题的大部分都取$n=2$或$n=3$。这样读者能通过此书想象出这两种情况中的任何一种情况的几何意义。不过，必须作三点说明。

第一，尽管我们也经常对于某些结果的公式分别地重复讨论$n=2$和$n=3$的情况，为了避免大量的重复，有必要用一个记号来代替这两种情况。

第二，没有比假设$n=2$或3所得的定理或公式更为简单的了。

第三，$n=4$的情况在物理学中确实存在。

例1 三维空间的一个典型例子当然是我们生活的这个空间。我们选择了原点和坐标系后，就能够根据3个坐标描述点（物体，质点等等）的位置。而且正如很久以前人们所知我们可以很容易地把它推广到四维空间，用第四个坐标作为时间，时间原点的选择纯粹是任意的，可以确定为比方说基督诞辰（如果我们能够精确确定太阳系的诞生或地球的诞生，以它们作为这原点，可能会更方便）。那么具有负时间坐标的点是一个公元前的点，具有正时间坐标的点是一个公元后的点。

然而不要得出“时间是第四维”的概念。上述的四维空间仅是一个可能的例子。再如，在经济方面，人们使用一个完全不同的空间。比方说，在工业中耗费美元数当做坐标。我们可以用与下列工业相对应的坐标来表示一个7维空间：

1、钢铁　2、汽车　3、农业　4、渔业　5、化学
6、服装　7、运输

假定每年以百万元为计算单位，那么在这个七维空间中的一个点：

（1,000,800,550,300,700,200,900）

意味着在那一年里钢铁工业花费了十亿美元，化学工业花费了

七亿美元。

我们现在来定义点的加法。假若A，B是两个在三维空间中的点，

$A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 和 $B=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

则定义$A+B$这个点的坐标是

$A+B=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$。

例2 在平面上，若$A=(1,\ 2)$，$B=(-3,\ 5)$，则

$A+B=(-2,\ 7)$

在三维空间中，若$A=(-1,\pi,3)$ 和$B=(\sqrt{2},7,-2)$，则

$A+B=(\sqrt{2}-1,\ \pi+7,\ 1)$

用一个自然数n来代替2维空间和3维空间这两种情况，这些点就可以写成

$A=(a_1,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,\ \cdots,\ b_n)$，于是我们定义$A+B$这个点的坐标是

$(a_1+b_1,\ \cdots,\ a_n+b_n)$。

从定义我们知道它们满足下列法则：

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$。
2. $A+B=B+A$。
3. 如果我们设

$$O=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

是所有坐标为零的点，那么对于所有A，有

$$O+A=A+O=A.$$

4. 设$A=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$，$-A=(-a_1,\ \cdots,\ -a_n)$。那么

$$A+(-A)=O.$$

所有这些性质是非常简单的，并且是正确的，因为这些性质

对于数来说是正确的，而n元数组的加法是通过它们的是数的各分量相加来定义的。

注意 不要把数0与n元数组（0，…，0）混淆。我们通常用0表示n元数组，并且也称它为零，因为在实践中不可能产生问题。

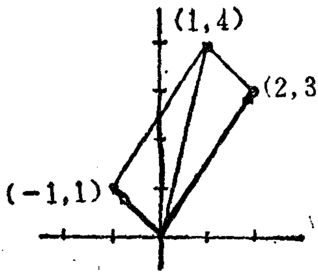


图 1.3

我们现在在平面上用几何方法说明点的加法和点与数的乘法（你可想象在三维空间中的情形）。

例3 设$A=(2,\ 3)$和$B=(-1,\ 1)$。那么

$A+B=(1,\ 4)$。

这图看来象平行四边形(图1.3)。

例4 设$A=(3,1)$和$=B$（1，2），那么

$A+B=(4,\ 3)$。

我们又看到这个加法的几何图形象平行四边形（图1.4）。

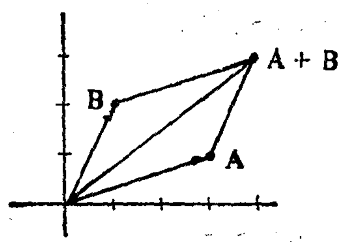


图 1.4

图形象是平行四边形的理由能根据平面几何证明如下：我们从原点$O=(0,\ 0)$出发向右移动一个单位，再向上移动两个单位，到达$B=(1,\ 2)$，要到达$A+B$，我们从A出发，并且也同样向右移动一个单位，再向上移动两个单位。这样在O、B之间和在A、$A+B$之间的线段是两个勾股分别相等的直角三角形的斜边，并且平行。因此，正如图1·5所示，上述两线段不仅平行而且长度相等。

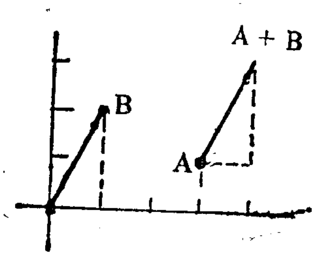


图 1.5

例5：又若$A=(3,1)$，则$-A=(-3,-1)$。如果我们把它们画出来，可以看出$-A$和A方向相反，我们可以把$-A$看作是A通过原点的反射。

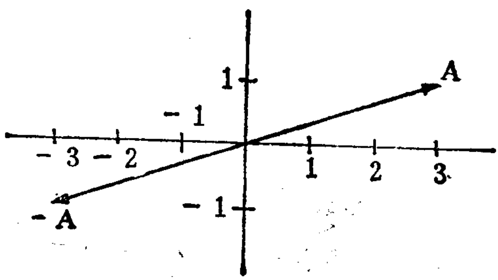


图 1.6

我们现在研究A与数的乘法。如果C是任意数，我们定义$C>A$这点的坐标是

$$(Ca_1, \cdots, Ca_n).$$

例6 如果$A=(2,-1,5)$，$C=7$，那么

$$CA=(14, -7, 35).$$

容易证明下列法则：

5. $C(A+B)=CA+CB$。

6. 若C_1、C_2是任意数，则

$(C_1+C_2)A=C_1A+C_2A$ 以及

$(C_1C_2)A=C_1(C_2A)$。

还要注意到