丛书主编：希 扬

走向清华北大

同步导读

第二次修订版

高一 数学

试验修订本(下)

主编：戴佳珉

龍門書局

走向清华北大·同步导读

（第二次修订版）

高一数学

试验修订本（下）

主编　戴佳珉
编者　戴佳珉　宋　庆
　　　周鸿生

主编寄语

清华北大是科学家的摇篮——上清华北大，高中阶段强势准备，蓄势待发

——希扬

龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

走向清华北大同步导读．高一数学：试验修订本．下/希扬主编；戴佳珉分册主编；戴佳珉，宋庆，周鸿生编著．—修订版．北京：科学出版社；龙门书局，2003

ISBN 7-80160-154-8

Ⅰ．走…　Ⅱ．①希…②戴…③戴…④宋…⑤周…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第080279号

责任编辑：曾晓晖　夏少宁

封面设计：东方上林工作室

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http: www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2001年1月第一版　开本：850×1168　1/32

2003年1月第二次修订版　印张：5 3/4

2003年1月第四次印刷　字数：184 000

印数：95 001—165 000

定　价：7.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第四章 三角函数

知识要点提示

1. 角的概念的推广

(1) 任意角的定义

角是一条射线绕着它的端点旋转而成的图形.按射线旋转的方向可将角分为正角、零角和负角.角的概念推广后,角的集合和实数集合能够建立起一一对应的关系.

(2) 在直角坐标系内讨论角

使角的顶点和坐标系原点重合,角的始边和 x 轴的非负半轴重合,按角的终边的位置就可以把角分为象限角、终边在坐标轴上的角.

(3) 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个角集:

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}.$$

相等的角一定终边相同;终边相同的角不一定相等,它们相差周角的整数倍.

(4) 熟记象限角和终边在坐标轴上的角的集合.

例如第二象限角的集合记为

$$S=\{\alpha|90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}.$$

终边在 x 轴的角的集合记为

$$\begin{aligned}S&=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=180°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=n\cdot 180°,n\in \mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

2. 角的弧度制

(1) 角度制和弧度制

规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角.这种用度作单位来度量角的制度叫角度制.规定等于半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度的角,这种用弧度作单位来度量角的制度叫做弧度制.

(2) 角度制与弧度制的换算

$$180° = \pi \text{rad}.$$

熟记特殊角的度数与弧度数的对应表

表 4－1

度	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(3) 圆心角(的弧度数)、半径、弧长之间的关系

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

3 任意角的三角函数

(1) 定义:设角 α 终边上任一点的坐标为 $P(x,y)$,$|OP| = r = \sqrt{x^2+y^2}$,则

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\quad \csc\alpha = \frac{r}{y},\quad \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \sec\alpha = \frac{r}{x},\quad \tan\alpha = \frac{y}{x},\quad \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

以上六种函数统称为三角函数,由于角的集合与实数集合建立了一一对应的关系,三角函数可以看成是以实数为自变量的函数.

(2) 三角函数的几何表示——三角函数线

设角 α 的终边与单位圆交于点 P(如图 4－1),则有向线段 MP、OM、

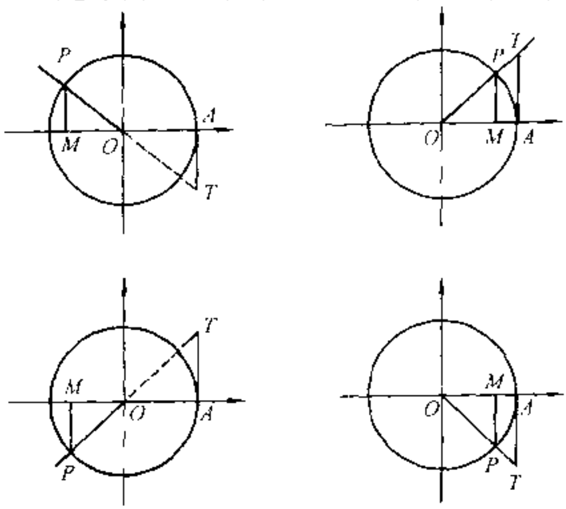


图 4－1

AT 的数值分别等于角 α 的正弦、余弦、正切值. 它们分别称为角 α 的正弦线、余弦线、正切线. 即：

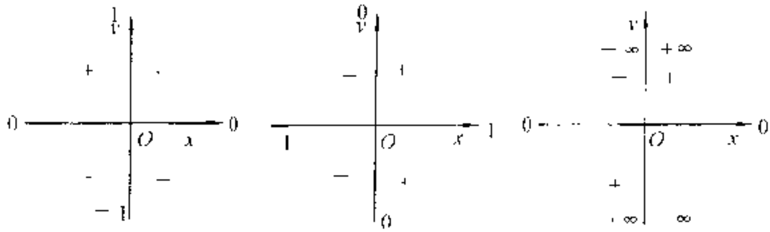
$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y=MP,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x=OM,$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

(3) 三角函数值在各个象限的符号

根据三角函数的定义或几何表示,可以推出三角函数值在各个象限的符号,它可以根据图 4-2 记忆.



$\sin\alpha$　　$\cos\alpha$　　$\tan\alpha$

图 4-2

也可以根据口诀"一全正、二 s 正、三 t 正、四 c 正"记忆.

4. 同角三角函数间的关系式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

5. 诱导公式

(1) 公式一：　$\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha,$

$\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha,$

$\tan(\alpha+k\cdot360^\circ)=\tan\alpha.\qquad(k\in\mathbf{Z}).$

(2) 公式二：　$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$

$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$

$\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha.$

(3) 公式三：　$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$

(4) 公式四：$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$，

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$，

$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$.

(5) 公式五：$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$，

$\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$.

利用诱导公式可以求任意角的三角函数值，一般步骤如下：

(1) 用公式三将负角的三角函数值转化为正角的三角函数值；

(2) 用公式一将大于 360°角的三角函数值转化为 0°到 360°角的三角函数值；

(3) 用公式二、四、五将大于 90°角的三角函数值转化为 0°到 90°角的三角函数值；

(4) 利用特殊角的三角函数值或查表即可求得.

6. 和角、差角、倍角公式

和、差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

倍角公式：

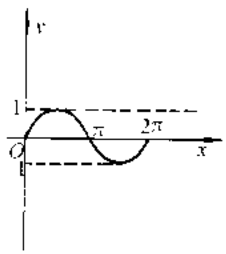
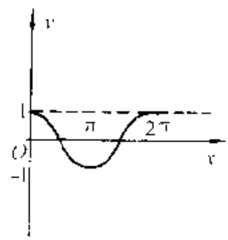
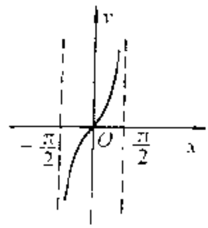
$$\begin{aligned}\sin2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha,\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha,\\ \tan2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{aligned}$$

它们的内在联系及推导过程如下：

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}S_{(\alpha-\beta)}\\ C_{(\alpha-\beta)}\end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c}S_{(\alpha+\beta)}\\ C_{(\alpha+\beta)}\end{array} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c}S_{2\alpha}\\ C_{2\alpha}\end{array} \arrow[d] \\
T_{(\alpha-\beta)} & T_{(\alpha+\beta)} \arrow[l] \arrow[r] & T_{2\alpha}
\end{tikzcd}$$

7. 三角函数的图象和性质见表 4－2

表 4－2

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbf{Z}$
值域	$y\in[-1,1]$	$y\in[-1,1]$	$y\in\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$
单调性	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上递增； $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$ 上递减，$(k\in\mathbf{Z})$	$[(2k-1)\pi,2k\pi]$上递增； $[2k\pi,(2k+1)\pi]$上递减， $(k\in\mathbf{Z})$	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 上递增，$(k\in\mathbf{Z})$
最值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$时， $y_{max}=1(k\in\mathbf{Z})$； $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$时， $y_{min}=-1(k\in\mathbf{Z})$	$x=2k\pi$时， $y_{max}=1(k\in\mathbf{Z})$ $x=\pi+2k\pi$时， $y_{min}=-1,(k\in\mathbf{Z})$	无

8 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象和性质

(1) 五点法作图

在函数的一个周期内，抓住函数的零点和最值点共五个特殊点，列出下

表并把计算出的 x、y 填入，描点绘图，然后左右扩展开来.

x					
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y					

(2) 三角函数的图象变换

将 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过下列变换，可以得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0)$ 的图象：

$$y=\sin x\xrightarrow{①}y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow{②}y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{③}y=A\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{④}y=A\sin(\omega x+\varphi)+b.$$

其中：

变换①是相位变换，即把原图象上所有点向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平行移动 $|\varphi|$ 个单位.

变换②是周期变换，即保持原图象上各点纵坐标不变，把图象上各点横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍.

变换③是振幅变换，即保持原图象上各点横坐标不变，把图象上各点纵坐标伸长($A>1$)或缩短($0<A<1$)到原来的 A 倍.

变换④是平移变换，即把原图象上所有点向上($b>0$)或向下($b<0$)平行移动 $|b|$ 个单位.

9. 已知三角函数值求角

(1) 已知三角函数值求角是求任意角的三角函数值的逆问题，求解的一般步骤是：

① 确定角 x 是第几象限的角；

② 如果函数值为正数，则先求出对应的锐角 θ；如果函数值为负数，则先求出与其绝对值对应的锐角 θ(可查表或用计算器)；

③ 写出 $(0,2\pi)$ 内对应的角：若 x 在第二象限，则表示为 $-\theta+\pi$；若 x 在第三象限，则表示为 $\theta+\pi$；若 x 在第四象限，则表示为 $-\theta+2\pi$；

④ 如果要求出 $(0,2\pi)$ 以外对应角，则可利用终边相同的角有相同三角函数值这一规律写出结果.

(2) 符号 $\arcsin\alpha$、$\arccos\alpha$、$\arctan\alpha$ 的意义

arcsinα 表示$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上符合条件 $\sin x=\alpha(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$的角 x；

arccosα 表示$[0,\pi]$上符合条件 $\cos x=\alpha(-1\leqslant\alpha\leqslant1)$的角 x；

arctanα 表示$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上符合条件 $\tan x=\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$的角 x

重点问题剖析

本章的重点是：任意角三角函数的概念，同角三角函数间的关系式，诱导公式及其运用，正弦、余弦的和角公式、正弦曲线的画法和正弦函数的性质．

本章的难点是：弧度制的概念，三角函数的恒等变换，周期函数的概念、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与正弦曲线的关系．

1．对弧度制的理解

（1）弧度制引入的必要性

把角的概念推广到任意角后，角的集合和实数集合建立起一一对应的关系，由于角度制是六十进制，要看出一个角和哪个实数对应，是很不方便的．例如 72°48′5″，需要几经周折化成$\left(72\frac{577}{720}\right)^\circ$，才可以看出它和实数$72\frac{577}{720}$相对应．这给我们研究三角函数带来了很大的麻烦，为了寻求角度集合和实数集合间一个简明的对应法则，我们需要引入角的一种新的度量制，这就是弧度制．在弧度制下，角所对应的实数就是这个角的弧度数．

（2）弧度制引入的合理性

当圆心角一定时，圆心角所对的弧长与半径成正比，与所取半径无关．因此用圆心角所对弧长与半径的比来度量这个圆心角是合理的．

（3）弧度制引入的优越性

弧度制下从角的集合到实数集合的一一对应法则非常简明．另外它简化了角度制下弧长公式和扇形面积公式：

$$l=|\alpha|r,$$

$$S=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}lr.$$

在后继学习中，在弧度制下还能得出一些简明、漂亮的关系式，如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$．

2．关于三角函数

三角函数是用角 α 终边上任一点 P 的坐标来定义的，由相似三角形的性

质可知，六个三角函数定义式中的比值$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{r}{x}$、$\frac{r}{y}$的大小都与P在角的终边上位置无关，而只与角的大小有关，它们都是以角为自变量、比值为函数值的函数. 在弧度制下，三角函数又可以看成是以弧度数为自变量或以实数为自变量的函数.

当我们将点P取在角α的终边与单位圆的交点处，就可以将三角函数用有向线段——三角函数线来表示. 三角函数线也可以看成是三角函数的几何定义.

三角函数的定义是学习本章的关键，是研究三角函数的基本出发点. 例如三角函数在各个象限的符号，既可以从定义式中坐标的符号推出，又可以从角的终边在各个象限三角函数线的数值看出；三角函数的定义域既可以从定义式各个比值中坐标允许值范围看出，又可以从三角函数线对应的终边允许的位置看出；公式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$既可以用定义式推出，又可以用三角函数线结合勾股定理推出.

三角函数的基础主要是几何中的相似形和圆. 它源于几何，又可以脱离几何图形代数化，它的研究方法主要是代数变形和图象分析，三角函数的研究把几何和代数联系了起来.

3. 同角三角函数关系式及其应用

(1) 掌握同角三角函数关系的等价形式，如：

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha),$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha},\quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha},$$

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

(2) 同角三角函数关系式的应用

① 已知某任意角的正弦、余弦、正切中的一个求其他两个，这里应特别注意开方运算时根号前正、负号的选取，应根据题设条件是否指明角所在的象限，确定最后结果是一组解还是两组解.

② 化简三角函数式. 化简是一种不指明答案的恒等变形，三角函数化为最简形式的标准是相对的，一般是指函数种类要最少；项数要最少；函数次数尽量低；能求出数值的要求出数值，尽量使分母不含三角形式和根式.

③ 证明简单的三角恒等式. 一般方法有三种：即由繁的一边证到简单的

一边;证明左、右两边等于同一式子;证明与原恒等式等价的式子,从而推出原式成立.

(3) 同角三角函数变换,要突出弦、切互化,回到三角函数的定义也不失为一种好的方法.同时也要注意灵活运用代数变形的各种手段,如消元法等.

(4) 同角三角函数变换的两种特殊技巧

① $\sin\alpha+\cos\alpha$、$\sin\alpha\cos\alpha$、$\sin\alpha-\cos\alpha$ 三个式子中,已知其中一个,可以求其他两个.这是由于这三个式子由下面两个关系式联系着:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha.$$

② 已知 $\tan\alpha=m\ (m\neq0)$,求有关 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的齐次分式如 $y=\dfrac{3\sin\alpha-4\cos\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值时,只要将其分子分母同除以 $\cos\alpha$,就可以得到 $y=\dfrac{3\tan\alpha-4}{2\tan\alpha+1}=\dfrac{3m-4}{2m+1}$.对于形如 $y=\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{a_1\sin^2\alpha+b_1\sin\alpha\cos\alpha+c_1\cos^2\alpha}$ 的齐次分式也可类似处理,分子分母同除以 $\cos^2\alpha$.

4 三角函数的诱导公式

三角函数的诱导公式实质上是三角函数的周期性和对称性.$\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$的诱导公式指明了三角函数的周期性,$-\alpha$ 的诱导公式指明了三角函数的奇偶性,其他诱导公式也分别指明了三角函数的对称性.例如 $\sin(\pi-x)=\sin x$ 指明了函数 $y=\sin x$ 的图象是轴对称图形,一条对称轴是 $x=\dfrac{\pi}{2}$;$\cos(\pi-x)=-\cos x$ 指明了函数 $y=\cos x$ 的图象是中心对称图形,它的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

在利用诱导公式求任意角的三角函数值时,不必拘泥于课本上列出的几个步骤,可以结合三角函数的性质灵活使用.如:

$\tan(-945^\circ)=\tan(-45^\circ-5\times180^\circ)=\tan(-45^\circ)=-\tan45^\circ=-1$,

$\sin(-690^\circ)=\sin(-690^\circ+720^\circ)=\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

5. 三角函数的恒等变换

三角函数的恒等变换,是运用三角公式,变换三角表达式中的函数、角度和结构,把一个表达式变换成另一个与它等价的表达式.三角恒等变换是代数式恒等变换的推广和发展,进行三角恒等变换,除了要熟练运用代数恒等变换的各种方法,还要抓住三角本身的特点,领会和掌握下列最基本最常见的变换:

(1) 公式变换

三角公式是三角恒等变换的基础,必须深刻理解公式、抓住公式的特点,熟练地将三角公式正向、逆向、变形和综合使用.

①正确理解公式中和、差、倍的相对性.

例如单角 α 可以看成是 $\alpha+\beta$ 与角 β 的差,又可以看成 $\alpha-\beta$ 与角 β 的和,$\frac{\alpha}{2}$ 可以看成是 α 的半角,又可以看成是 $\frac{\alpha}{4}$ 的倍角.这样我们在三角恒等变换的过程中,就能整体地把握角之间的关系,灵活使用公式.

② 抓住公式中角、函数、结构的特点.

例如在公式 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ 中,角减半则函数次数翻倍.第一种变形便于和因式分解相联系,后两种变形直接地将 $\cos2\alpha$ 用 α 的余弦或正弦表出.

又如在公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 中,涉及 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 的和与积,这个公式常常和韦达定理联用.

③公式的正向使用.

要特别注意一个三角函数式的多种表达形式和几个三角公式的联用.例如

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos2\alpha=\cos^2\alpha\tan^2\alpha.$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}.$$

④ 公式的逆向使用.如

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha,$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

⑤ 公式的变形使用.如

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta),$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

(2) 角度变换

角度变换是三角函数恒等变换的首选方法.在进行三角恒等变换时,对

角之间关系必须进行认真的分析.

①分析角之间的和、差、倍、分关系.如

$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha, 2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta), 2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$,

$n\alpha=\alpha+(n-1)\alpha$,

$\frac{\pi}{4}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

② 在数值角的三角函数式化简中,要特别注意是否能够产生特殊角.

③ 熟悉两角互余、互补的各种形式,如 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta=\pi$,正确使用诱导公式.

④ 引入辅助角进行角的变换.如

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

其中辅助角 φ 在哪个象限,由 a、b 的符号确定,φ 的值由 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ 确定.

下列特殊情况必须熟记:

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;

$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\alpha\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

(3) 函数变换

函数变换是指"弦化切"法和"切化弦"法.在同角三角函数变换中,弦切互化主要是应用公式 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;在非同角三角变换中,函数变换往往依赖于角度变换.

(4) 1 的变换.如:

$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha,\ 1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha,$$

$$1=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\tan\frac{\pi}{4},$$

$$1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

$$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{3\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}.$$

(5) 幂的变换

公式 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$常用来升幂和降幂，以便根据需要将三角函数式按一定方向进行变形.

6. 三角恒等变换的基本题型

三角恒等变换主要包括求值、化简、证明.

(1) 求值

常见的有给角求值、给值求值、给值求角.

① 给角求值的关键是正确地分析角间关系，准确地选用公式，要注意产生特殊角，同时把非特殊角的三角函数值相约或相消，从而求出三角函数式的值；

② 给值求值的关键是分析已知式与待求式之间角、函数、结构间差异，有目的地将已知式、待求式的一方或两方加以变换，找出它们之间的联系，最后求出待求式的值；

③ 给值求角的关键是先求出该角的某一三角函数值，其次判断该角对应函数的单调区间，最后求出角.

(2) 化简

化简有两种常见的形式：

① 未指明答案的恒等变形，这时应把结果化为最简形式.

② 根据解题需要将三角函数式化为某种特定的形式，例如一角一函数的形式，以便研究它的各种性质.

无论是何种形式的化简，都要切实注意角度变换、函数变换等各种变换.

(3) 证明

它包括无条件的恒等式和附加条件恒等式的证明.

① 无条件恒等式的证明. 证明时要认真分析等式两边三角函数式的特点、角度、函数、结构的差异，一般由繁的一边往简的一边证，逐步消除差异，最后达到统一. 对于较难的题目，可以用分析法帮助思考，或分析法和综合法联用.

② 有附加条件的恒等式的证明. 证明的关键是恰当地利用附加条件，要认真分析条件式和结论式中三角函数之间的联系，从分析过程中发现条件应怎样利用. 证明这类恒等式时，还常常用到消元法和基本量方法. 消元法即用代入、加减、乘除、平方后相加减等手段消去某些量；基本量方法就是适当选择其中可以独立取值的量作为基本量，把其他的量都用基本量表示出来，从