成人高考数学辅导

史连生　王汉华　编著

海洋出版社

成人高考数学辅导

史连生 王汉华 编著

海洋出版社

1986年·北京

内容简介

本书是根据教育部新制定的《全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》，为帮助参加各类成人高等学校招生考试人员进行系统复习、牢固掌握知识、取得较为理想的考试成绩而编写的．主要内容包括代数、三角函数、立体几何和解析几何，每一部分都精选了相当数量的练习题，并附有较为详细的解答．本书作者史连生、王汉华长期从事教学工作，具有丰富的成人教学经验．

责任编辑：彭　慧
责任校对：刘兴昌

成人高考数学辅导
史连生　王汉华　编著

海洋出版社出版　(北京市复兴门外大街1号)
新华书店北京发行所发行　人民卫生出版社印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：13　字数：287千字
1986年11月第一版　1986年11月第一次印刷
印数：29800册

统一书号：7193·0808　定价：2.30元

封面设计：晓　可

统一书号：7193·0808
定　　价：2.30 元

目 录

第一部分 代数……………………………………（1）

第一章 有关的预备知识………………………（1）

第二章 函数…………………………………………（9）

第三章 不等式与不等式组……………………（49）

第四章 数列…………………………………………（69）

第五章 数学归纳法………………………………（87）

第六章 排列与组合………………………………（103）

第七章 二项式定理………………………………（121）

第八章 复数…………………………………………（139）

第二部分 三角函数……………………………（182）

第一章 基础知识的复习…………………………（182）

第二章 有关解三角形的基本知识……………（184）

第三章 关于角的弧度制…………………………（186）

第四章 任意角的三角函数………………………（193）

第五章 三角函数的性质…………………………（203）

第六章 两角和、差的三角函数及其推论……（215）

第七章 反三角函数和简单的三角方程………（234）

第三部分 立体几何……………………………（244）

第一章 直线和平面………………………………（244）

第二章 多面体和旋转体…………………………（283）

第四部分 解析几何……………………………（324）

第一章 曲线和方程………………………………（324）

第二章 直线…………………………………………（338）

第三章 圆锥曲线…………………………………（349）

第四章 极坐标和参数方程………………………（395）

第一部分　代　　数

第一章　有关的预备知识

一、实系数一元二次方程的根与系数的关系

（一）方程　$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$，a、b、c 均为实数）的根是 x_1、x_2，则当 $b^2-4ac\geqq 0$ 时，$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；而当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实根.

（二）方程　$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根分别是 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

（三）方程　$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$，a、b、c 是实数），

1．$b^2-4ac\geqq 0$ 时，方程有两个实根；

(1)　$\dfrac{c}{a}>0$ 时两根同号，$\dfrac{c}{a}<0$ 时两根异号.

(2)　$\dfrac{c}{a}>0$ 且 $-\dfrac{b}{a}>0$ 时两根皆正，$\dfrac{c}{a}<0$ 且 $-\dfrac{b}{a}<0$ 时两根异号.

2．方程有两个实根则 $b^2-4ac\geqq 0$.

方程没有实根则 $b^2-4ac<0$.

练 习 一

(1) 已知方程 $x^2+px-6=0$ 有一个根是1，求 p 的值及另一个根.

(2) 解方程：$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$.

(3) 方程 $ax^2-12x+9=0$ 有两个实根，求实数 a .

(4) 证明方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 有两个实根，其中一个比 a 大，而另一个比 a 小.

(5) 已知 $2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$ 两根异号，求实数 m 的范围.

(6) 如果 $ax^2+bx+c=0$，a 、b 、c 是奇数，证明这个方程没有整数解.

二、二次三项式

（一）多项式(整式)的元和次 多项式 x^2+5x+6 是关于 x 的二次式；$x^2+y^2-2xy+3x-y-1$ 是关于 x 的二次式，也可看作关于 y 的二次式；$x^4+x^2-2ax+1-a^2$ 是关于 x 的四次式，也可看作关于 a 的二次式.

（二）二次三项式的因式分解 ax^2+bx+c（$a\neq0$）的根（即是使得 ax^2+bx+c 为 0 的 x 值）若是 x_1、x_2，则：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

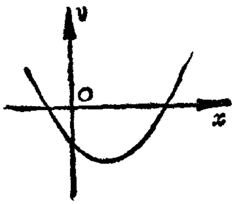
（三）二次三项式的最大值或最小值

$$\because\quad ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

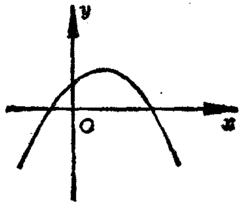
$\therefore$ 当 $a>0$ 时，ax^2+bx+c 有最小值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

当 $a<0$ 时，ax^2+bx+c 有最大值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

（四）二次三项式的图象



$a>0$



$a<0$

图 1-1

练　习　二

(1) 分解因式：

① $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$；

② $\sqrt{2}\,x^2+4\sqrt{3}\,x-2\sqrt{2}$；

③ $x^2-2y^2-xy+3y-1$；　④ $x^4+x^2-2ax+1-a^2$；

⑤ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(2) 证明：若 ax^2+bx+c（$a>0$、$c>0$）是完全平方式，则 $b^2-4ac=0$. 并且试证明它的逆命题也正确.

(3) 写出适合 $\sin A=x^2-2x+\dfrac{3}{2}$ 的锐角 A 的范围.

(4) 指出 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$），当 $b^2-4ac<0$ 时图象的大致位置。

练习一答案

(1) **解法①：**

$\because$ 1是方程 $x^2+px-6=0$ 的根，

$\therefore$ $1^2+p\cdot1-6=0$，

$\therefore$ $p=5$，　　　另一根 $x_2=-6$.

解法②：

$\because$ $x^2+px-6=0$ 有实根，

$\therefore$ $p^2+24\geqq0$，

$\therefore$ $-p=x_2+1$，

$-6=x_2\cdot1$，

$\therefore$ $x_2=-6$，$p=5$.

(2) 原方程变形为：

$$2x^2+b-2\sqrt{2x^2-3x+2}-3x-3=0,$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0,$$

令 $y=\sqrt{2x^2-3x+2}$，

$\therefore$ $y^2-2y+1=0$，　$\therefore$ $y=1$，

$\therefore$ $2x^2-3x+2=1$，

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4},$$

$\therefore$ $x_1=1$、$x_2=\frac{1}{2}$，经检验都是方程的根.

(3) **解：** $\because$ 方程有实根，

$\therefore$ $a\neq0$，$12^2-4\times9a\geqq0$，

即 $0<a\leqslant4$ 或 $a<0$.

(4) **解法①：** 设 $y=x-a$，

原题化为 $y(y-b)=1$，

$y^2-by-1=0$，

$\because$ $a=1$，$c=-1$，

$\therefore \quad b^2-4ac>0 \qquad$ 且$\because \quad \dfrac{c}{a}=-1$,

$\therefore$ 方程 $y^2-by-1=0$ 有两个实根，且两根异号，从而问题得证.

解法②：方程变形为

$x^2-(2a+b)x+a^2+ab-1=0$,

$\because \quad (2a+b)^2-4a^2-4ab+4=b^2+4>0$,

$\therefore$ 方程有两个不等实根.

而 $x=\dfrac{2a+b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}=a+\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}$

$\because \quad \sqrt{b^2+4}>|b|\geqslant 0$,

$\therefore \quad b+\sqrt{b^2+4}>0, \quad b-\sqrt{b^2+4}<0$,

从而得知 $a+\dfrac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}>a$,

而 $a+\dfrac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}<a$，从而本题得证.

(5) **解**：从题：

$$\begin{cases} 2(m+1)\neq 0, & ⓐ \\ (4m)^2-8(m+1)(3m-2)>0, & ⓑ \\ \dfrac{3m-2}{2(m+1)}<0. & ⓒ \end{cases}$$

从ⓐ、ⓒ知 $-1<m<\dfrac{2}{3}$， 又由ⓑ $-2<m<1$,

从而得出 $-1<m<\dfrac{2}{3}$.

(6) **证**：若 m 是方程的解，

则 $m(am+b)=-c$,

当 m 是偶数时，$m(am+b)$ 是偶数，

当 m是奇数时，am 是奇数，$am+b$ 是偶数，所以 $m(am+b)$ 是偶数.

而这都与 $m(am+b)=-c$矛盾

∴ 方程不可能有整数解.

练习二答案

(1) ① $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=(x^2-a^2)(x^2-b^2)$

$$=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$$

② 对$\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}$先求根.

$$\because\quad x=\frac{-4\sqrt{3}\pm 8}{2\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{3}\pm 4}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(x-\frac{-2\sqrt{3}+4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\cdot\left(x-\frac{-2\sqrt{3}-4}{\sqrt{2}}\right).$$

③ $x^2-2y^2-xy+3y-1=x^2-yx-2y^2+3y-1$,

求根： $x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+4(2y^2-3y+1)}}{2}$

$$=\frac{y\pm\sqrt{9y^2-12y+4}}{2}$$

$$=\frac{y\pm(3y-2)}{2},$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{y+3y-2}{2}=2y-1,$$

$$x_2=\frac{y-3y+2}{2}=-y+1,$$

$$\therefore\quad x^2-2y^2-xy+3y-1=(x-2y+1)(x+y-1).$$

④ $x^4+x^2-2ax+1-a^2$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - (x^2 + 2ax + a^2)$$

$$= (x^2 + 1)^2 - (x + a)^2$$

$$= (x^2 + 1 + x + a)(x^2 + 1 - x - a)$$

$$= (x^2 + x + a + 1)(x^2 - x - a + 1).$$

本题的一般解法是

$$x^4 + x^2 - 2ax + 1 - a^2$$

$$= -[a^2 + 2ax - (x^4 + x^2 + 1)],$$

求根： $$a = \frac{-2ax \pm \sqrt{4x^2 + 4x^4 + 4x^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-2ax \pm 2\sqrt{(x^2 + 1)^2}}{2}.$$

$$= -ax \pm (x^2 + 1),$$

$\therefore \quad a_1 = -x + x^2 + 1,$

$\quad a_2 = -x - x^2 - 1,$

$\therefore \quad x^4 + x^2 - 2ax + 1 - a^2$

$$= -[(a - x^2 + x - 1)(a + x^2 + x + 1)]$$

$$= (x^2 - x - a + 1)(x^2 + x + a + 1).$$

⑤ $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

$$= (b - c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2$$

$$= (b - c)\ [a^2 - (b + c)a + bc]$$

$$= (b - c)(a - b)(a - c).$$

(2) **先证：** $b^2 - 4ac = 0$ 时，$ax^2 + bx + c$ 是一完全平方式.

$\because \quad b^2 - 4ac = 0$，$\therefore \quad ax^2 + bx + c$ 有等根2，

$\therefore \quad ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 2) = [\sqrt{a}\ (x - 2)]^2$，

再证：$ax^2 + bx + c$ 是完全平方式时，则$b^2 - 4ac = 0$，

$\because \quad ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}\ x \pm \sqrt{c}\ )^2$

$$= ax^2 \pm 2\sqrt{ac}\ x + c,$$

$\therefore \quad b = \pm 2\sqrt{ac}$,

$\therefore \quad b^2 - 4ac = 0$.

(3) $\because \quad x^2 - 2x + \dfrac{3}{2} = (x-1)^2 + \dfrac{1}{2}$,

$\therefore \quad 30^\circ < A < 90^\circ$.

(4) 开口向上，与 x 轴没有交点.

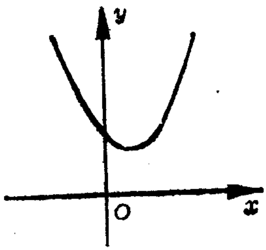


图 1-2

第二章 函 数

一、集 合

（一）集合的实质是不定义概念，我们常常通俗地把它理解为具有某种属性的一些对象的全体．但是，我们在给出一个集合时，要明确两点：

1．确定性．即任一元素属于或不属于给出的集合是十分明确的．例如：对于自然数集N，我们就可确定：$1\in N$，$0\notin N$，$\sqrt{2}\notin N$．

2．集合内的同一元素是不能重复出现的．

（二）几个重要概念（定义请参阅一般中学课本）

1．子集：A是B的子集，记作$A\subseteq B$；特别的，A是B的真子集，记作$A\subset B$．

2．集合的相等．若$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，

则$A=B$．

从定义出发，若欲证：$A\cap B=B\cap A$，只有证明$A\cap B\subseteq B\cap A$．

$B\cap A\subseteq A\cap B$，才能断定$A\cap B=B\cap A$．

3．交集和并集 （略）．

4．全集与补集 （略）．

5．几个值得注意的问题 （选读）．

(1) 属于即“$\in$”，这个记号是界说元素与集合的关系，$\subseteq$或$\subset$（包含）这个记号是界说集合与集合的关系，例如：$1\in N$ 是对的，$1\subseteq N$ 是错的．但$\{1\}\in N$ 又是错的，$\{1\}\subseteq N$ 则是对的．

(2) ϕ是空集，它和$\{0\}$不是一回事.

(3) 理解“定义”这个词的正确含义.

例如：集合A中的元素都属于集合B，定义为$A \subseteq B$. 反之，若已知$A \subseteq B$，则集合A的元素一定都属于集合B.

练　习　三

(1) 把下面给出的两个集合用正确的符号连结起来：

① O_N，　　② $\lg 5\_\_R$（实数集），

③ N_R，　　④ ϕ_A（A是任何一个集合），

⑤ $A \cup B\_\_B \cup A$.

(2) 已知集合A、B、C，且$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，求证$A \subseteq C$.

(3) 求0、1、2这三个元素组成的集合的一切子集和总数.

(4) 已知$A=\{0、1、2\}$，$B=\{2、4、6\}$，求$A \cup B$、$A \cap B$.

(5) 已知$A=\{0、1、b、3\}$，$B=\{a、2、4\}$，且$A \cap B=\{1、2\}$，求a、b的值.

二、函　　数

（一）几个重要函数的复习

1. 正比例函数.

定义　函数$y=kx(k \neq 0)$叫做正比例函数.

图象　函数$y=kx$（$k \neq 0$）的图象是过原点（0，0）及点（1，k）的一条直線.

性质　$k>0$是上升（增）函数，

$k<0$是下降（减）函数.

需要指出的是，函数的增、减不是说图象的几何性质，

而指的是：若 $x_2>x_1$，有 $kx_2>kx_1$，即 $y_2>y_1$，则 $y=kx$ 是增函数．也就是说，若 $x_1<x_2$ 时有 $y_1<y_2$，则函数 y 是增函数．

例题（一）：若 y 和 x 成正比例，x 和 z 也成正比例，那么 y 和 z 之间有什么函数关系？

解：$\because$ y 和 x 成正比例，　$\therefore$ $y=kx$ $(k\neq0)$；

$\because$ x 和 z 之间也成正比例，　$\therefore$ $x=k'z$ $(k'\neq0)$，

$\therefore$ $y=kx=kk'z$，

$\because$ $kk'\neq0$，　$\therefore$ y 和 z 也成正比例．

例题（二）：圆柱的体积 $V=\pi r^2h$．r 是底面半径，h 是圆柱的高，当高不变时 V 和 r 之间成不成正比例？v 和 r^2 呢？V 和底面面积呢？（解答从略）

例题（三）：证明 $y=3x$ 是增函数。

证：设 $x_2>x_1$，即是 $x_2-x_1>0$，

则 $y_2-y_1=3(x_2-x_1)>0$，

$\therefore$ $y_2>y_1$

$\therefore$ $y=3x$ 是增函数。

2．反比例函数．

定义　函数 $y=\dfrac{k}{x}$ （$k\neq0$ 的常数）叫做反比例函数．

图象（略）

性质　$k>0$，　$y=\dfrac{k}{x}$ 是减函数，

$k<0$，　$y=\dfrac{k}{x}$ 是增函数．

（请自己证明）。

3．一次函数．

定义　函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$ 叫做 x 的一次函数．

图象（略）

性质 $k>0$，函数是增函数，

$k<0$，函数是减函数.

例题（四）：若一次函数 $y=kx+b$ 的图象过（0，1）和（4，5）两点，求出 k 和 b 的值.

解：∵ 直线 $y=kx+b$ 过点（0、1）、（4、5），

$$\therefore \quad \begin{cases} b=1, \\ 4k+b=5. \end{cases}$$

∴ $k=1$，$b=1$.

例题（五）：若 y 是 x 的一次函数，x 是 z 的一次函数，那么 y 和 z 之间有什么函数关系？

（解答从略）

例题（六）：求出函数 $y=3x+1$，($|x|\leqslant 2$) 的最大值或最小值.

解：∵ $y=3x+1$ 是增函数，且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，

∴ y 的最大值 $=3\times 2+1=7$，

y 的最小值 $=3\times(-2)+1=-5$.

4. 二次函数（请参阅二次三项式部分）.

定义 函数 $y=ax^2+bx+c$，($a\neq 0$) 叫做 x 的二次函数.

图象

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \end{aligned}$$

顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，

对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$，