杆件结构计算原理及应用程序

李为鑑　马文华　周纯铮　盛佐人　陈勃昌 编著

上海科学技术出版社

杆件结构计算原理及应用程序

李为鑑 马文华
周纯铮 盛佐人 陈勃昌 编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是专为建筑结构设计人员掌握电算技术而编写的。主要内容包括：用电子计算机对杆件结构进行内力分析和配筋计算所必需的线性代数基本知识、常用的一些计算方法以及结构静力分析和动力分析的基础理论知识，分章介绍了计算平面框架、排架、平面屋架、空间网架和弹性地基梁等五种常见结构的数学力学模型、通用程序及其使用方法，并介绍了高层建筑框架-剪力墙体系空间协同工作分析的矩阵方法和空间杆件及薄壁杆系结构分析的矩阵方法。

本书可供建筑结构设计人员和高等院校有关专业师生参考。

杆件结构计算原理及应用程序

李为鑑　马文华
周纯铮　盛佐人　陈勃昌　编著

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本787×1092 1/16　印张35.25　字数846,000
1982年7月第1版　1982年7月第1次印刷
印数 1—8,300

统一书号：15119·2185　　定价：（科五）4.30元

前　　言

近十年来，电子计算机已逐步在我国建筑设计系统得到推广应用，取得了十分可喜的成绩．广大设计人员从烦琐的手算工作中解脱出来，越来越多地用电子计算机进行结构计算，这确是设计工作中的一个飞跃．

自 1974 年以来，我们开始用电子计算机进行建筑结构应力分析的计算，在较短时间内，研究并通过了好几个常用的杆件结构内力分析的程序，如平面框架程序、空间网架程序、平面屋架程序、弹性地基梁程序等，并很快地得到实际的应用．在此基础上，我们又相继完成了更多的应用程序．

为了推广使用几个常用程序，在有关单位的支持下，我们曾在上海为设计人员举办过若干期短训班，收到了良好的效果．广大设计人员除了学会使用程序计算具体任务外，还希望能进一步掌握杆系结构数学力学模型的建立、有限元法的基本思路和有关计算方法的推导以及编制程序的技巧．为此，我们自 1978 年开始编写这本著作，从写出初稿到修改定稿共花费一年多的时间、现将此书献给我国广大建筑设计人员．如果本书能在理论和实践这两个方面给大家有所借鉴的话，这将使我们感到莫大的宽慰．近几年来，在国家建工总局设计局的主持下，组织全国主要建筑设计院和有关高等院校讨论并制订了建立“全国建筑结构标准程序库”的计划，本书可作为标准程序库有关结构程序的理论基础．

本书共分九章．

第一章矩阵代数及计算方法．主要介绍线性代数的基本知识，以及建筑结构计算中常用的一些计算方法，如：解线性代数方程组的三角分解法和 QR 方法；求特征值及特征向量的乘幂法、雅可比方法和多向量迭代法等．通过这一章的学习，读者可以较直接地学到与建筑设计有密切关系的某些计算方法以及与这些计算方法相适应的线性代数基本知识．

第二章结构静力分析．着重介绍了各种结构的单元刚度矩阵、坐标变换以及结构总刚度矩阵的形成，还介绍了荷载的移置和杆件的内力分析．这些内容是作为第四章到第九章的力学基础而撰写的，而且也是建筑系统中杆件结构普遍适用的基础理论．为解决带刚域端杆件的问题，专门写了“各种带刚域端杆件的刚度变换”一节，这就使杆件结构静力分析的内容更加完整．

第三章结构动力分析．着重介绍各种杆件的振动以及结构简约刚度矩阵和简约振动，同时还介绍了扭转振动和地震力的计算．这些内容同样是结构动力分析中普遍适用的基础理论．

第四章到第八章依次介绍了平面框架、排架、平面屋架、空间网架和弹性地基梁．本书所以将框架程序作为首先介绍的一个计算程序，这是因为在建筑结构中，平面框架是最常遇见的．详细地了解和掌握平面框架程序，不仅对正确理解和使用框架程序是重要的，而且对进一步掌握第五章到第九章中其他结构的计算程序也是有很大帮助的．正因为如此，这一章的内容是写得比较详尽的．除了介绍用有限元法求解在荷载作用下框架结构的内力和配筋的全过程外，还通过对几段程序的剖析，介绍了编制程序的一些技巧，这些对读者自己动

手编制程序或根据实际情况修改已有的程序都将是有益的.

第九章高层建筑. 主要介绍了框架-剪力墙体系空间协同工作分析的矩阵方法和空间杆件及薄壁杆系结构分析的矩阵方法. 这一章是为适应我国发展高层建筑的需要而编写的.

此外, 第四章到第八章的各章中都介绍了相应的源程序及其使用说明. 这些程序都是实际可用的、经过较长时期考验的. 除平面屋架程序外, 其它程序在经过修改和扩充后都已被编入全国建工系统标准程序库. 虽然这些程序都是在TQ-16机上用ALGOL算法语言写的, 然而, 读者完全可以用别的语言将它们移植到别的机器上. 书中提供的计算例题可以用来作为考例.

本书由复旦大学李为鑑执笔写第四、第八章, 马文华执笔写第二章, 陈勃昌执笔写第一、第六章, 上海工业建筑设计院周纯铮执笔写第三、第五以及第九章的第二部分, 盛佐人执笔写第七以及第九章的第一部分, 并由李为鑑、马文华负责对全书内容进行统一和协调. 由于我们的水平有限, 书中难免存有错误和不妥之处, 敬希广大读者指正.

本书得到上海工业建筑设计院高级工程师朱民声的指导, 并提了不少宝贵的意见, 作者谨此表示衷心的谢意. 胡蓉同志也为本书做了一定的工作, 在此表示感谢.

一九八〇年七月于上海

目　　录

第 一 章

矩阵代数及计算方法

§1-1 矩阵及其基本运算

1。矩阵

在计算中，常常碰到如下的线性代数方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1-1}$$

其中 a_{11}、a_{12}、$\cdots$、a_{1n}、$\cdots$、a_{n1}、$\cdots$、a_{nn} 是方程组的系数①，都是已知的；b_1、b_2、$\cdots$、b_n 也是已知数值，称为方程组的右端项；x_1、x_2、$\cdots$、x_n 是需要求解的未知数；n 称为方程组的阶数.

对上述方程组的系数，我们可以把它排成一个表，在表外面加上一对方括号：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-1-2}$$

这样一种数表称为矩阵．其中每一个数称为这个矩阵的元素．矩阵中同一横排的元素集合称为矩阵的行，从上到下依次称为第一行、第二行、……等等．矩阵中同一竖列的元素集合称为矩阵的列，从左到右依次称为第一列、第二列、……等等．矩阵(1-1-2)的第 i 行第 j 列的元素就是 a_{ij}. 如果某个矩阵的第 i 行第 j 列的元素是 k_{ij}，我们就把这个矩阵简记为(k_{ij}). 这样，式(1-1-2)的矩阵就可简记成(a_{ij})．往往也可用大写英文字母[A]、[B]、[C]等等来表示矩阵.

式 (1-1-2) 的矩阵的行数为 n，列数也是 n．在一般情况下，矩阵的行数与列数可以不一致．如果一个矩阵的行数为 m，列数为 n，则称这个矩阵是 $m\times n$ 阶．例如矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

是 2×2 阶，而矩阵

$$[B]=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 10 & 14 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

是 3×2 阶．方程组 (1-1-1) 的未知数 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 和右端项可以分别排成如下所示的数表：

① 本章中，除了特别说明外，所有的数都限制在实数域内。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1-1-3}$$

它们都是 $n\times1$ 阶矩阵.

如果矩阵 $[A]=(a_{ij})$ 和矩阵 $[B]=(b_{ij})$ 的阶数相同（即它们有相同的行数和相同的列数），并且它们所有对应位置的元素相等，即对所有满足 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $1\leqslant j\leqslant m$（n、m 分别是矩阵$[A]$或$[B]$的行数与列数）的 i、j，成立 $a_{ij}=b_{ij}$，称矩阵$[A]$和 $[B]$ 相等，记作 $[A]=[B]$.

如果一个矩阵的元素都是零，则称这个矩阵为零矩阵.

行数与列数相等的矩阵称为方阵. 它的行数（或列数）也可称为这个方阵的阶. 例如，式(1-1-2)就是一个 n 阶方阵.

在方阵中，行号与列号相同的那些元素称为对角线元素，简称为对角元. 在式 (1-1-2) 中，元素 a_{11}、a_{22}、…、a_{nn} 就是对角元.

对角元上边的所有元素全为零的方阵称为下三角阵（或左三角阵）. 反之，对角元下边的所有元素全为零的方阵称为上三角阵（或右三角阵）. 如果方阵 $[A]=(a_{ij})$ 是下三角阵，则$[A]$形如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

也就是说，当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$. 如果方阵$[A]=(a_{ij})$是上三角阵，则$[A]$形如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

也就是说，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$.

一个方阵，如果除了对角元外其它元素都为零，则称这种方阵为对角阵. 它形如：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上面这个对角阵一般记作 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

在 ALGOL 程序中，矩阵一般存放在二维数组中较为方便. 例如，矩阵

$$[B]=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 10 & 14 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

可存放在数组 $B[1:3, 1:2]$中，其中 $B[1, 1]=3$, $B[1, 2]=-7$, $B[2, 1]=10$, $B[2, 2]=14$, $B[3, 1]=5$, $B[3, 2]=0$. 数组中第一个下标是矩阵中的行号，第二个下标是矩阵的列号，对应关系十分明显. 当然矩阵也可存放在一维数组中. 例如上述的矩阵可以存放在一

维数组 $C[1:6]$ 中. 如果按行存放, 那么依次为 $C[1]=3$, $C[2]=-7$, $C[3]=10$, $C[4]=14$, $C[5]=5$, $C[6]=0$. 不过,这样存放没有任何好处,对应关系不如按二维数组存放那样明显. 然而,对于一个三角阵,由于它的对角元以上或以下部分都是零,不用存放,故用一维数组来存放三角阵可以节省存贮单元. 例如,矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&5&0\\7&9&8\end{bmatrix}$$

可以用一个一维数组 $D[1:6]$ 来存放. 仍用按行存放的办法. 那么, $D[1]=1$, $D[2]=4$, $D[3]=5$, $D[4]=7$, $D[5]=9$, $D[6]=8$. 这样存放只需占用 6 个存贮单元. 如果用二维数组存放, 就要占用 9 个存贮单元. 一般来说, 用一维数组存放一个 n 阶三角阵, 只需占用 $n(n+1)/2$ 个存贮单元. 因此, 用一维数组存放三角阵虽然比较麻烦,但可大大节省存贮单元. 用一维数组按行存放一个下三角阵,那么,矩阵的第 i 行第 j 列元素将存放在数组的第 $i(i-1)/2+j$ 个单元中($i\geqslant j$). 公式 $i(i-1)/2+j$ 称为地址公式. 用一维数组按行存放一个上三角阵,那么,矩阵中第 i 行第 j 列($i\leqslant j$)的元素的地址公式为

$$(i-1)(2n-i)/2+j$$

其中 n 是上三角阵的阶数.

对于对角阵,只要用一维数组来存放它的对角元就可以了.

2. 行列式

对于二阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

数值 $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ 称为方阵$[A]$的行列式. 记作 $\det([A])$ 或

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

对于三阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

它的行列式是

$$\det([A])=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

其中 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$、$-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$

分别称为元素 a_{11}、a_{12}、a_{13} 的代数余子式.

下面给出代数余子式的一般定义:

把 n 阶方阵 $[A]$ 的任意 k 行和任意 k 列划去以后剩下的 $n-k$ 阶方阵的行列式称为方阵$[A]$的 $n-k$ 阶子式. 将元素 a_{ij} 所在的行和列(即矩阵 $[A]$ 的第 i 行和第 j 列)划去以后得到的 $(n-1)$ 阶子式乘上$(-1)^{i+j}$ 就是元素 a_{ij} 的代数余子式. 利用代数余子式的概念可以定义更高阶的行列式: 一个方阵的行列式等于这个方阵的第一行的元素分别乘上它们相应的代数余子式后再相加所得的数值. 例如,四阶方阵

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

的行列式可以这样求得:

$$\det([B])=b_{11}B_{11}+b_{12}B_{12}+b_{13}B_{13}+b_{14}B_{14}$$

其中 B_{11}、B_{12}、B_{13}、B_{14} 分别是元素 b_{11}、b_{12}、b_{13}、b_{14} 的代数余子式:

$$B_{11}=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{12}=-\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$B_{13}=\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{14}=-\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{vmatrix}$$

可以证明,也可按其它的行(或列)来展开. 例如

$$\det([B])=b_{21}B_{21}+b_{22}B_{22}+b_{23}B_{23}+b_{24}B_{24}$$

其中 B_{21}、B_{22}、B_{23}、B_{24} 分别是元素 b_{21}、b_{22}、b_{23}、b_{24} 的代数余子式.

在 § 1-3 中,我们将进一步指出,如果 $[A]=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det([A]) & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}\det([A]) & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

其中 A_{jk} 是元素 a_{jk} 的代数余子式.

根据行列式的意义,容易看出三角阵或对角阵的行列式等于它的对角元的乘积. 事实上,如果$[A]$为下三角阵:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

根据行列式的定义,按$[A]$的第一行展开,得

$$\det([A])=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 矩阵的基本运算

(1) 矩阵的加法

两个矩阵相加就是它们的对应元素相加. 也就是说,如果矩阵 $[A]=(a_{ij})$ 和矩阵 $[B]=(b_{ij})$有相同的行数和列数,把它们的对应元素相加,得到一个新矩阵 $[C]=(c_{ij})$,其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. 矩阵$[C]$称为矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的和,记为$[C]=[A]+[B]$.

在 ALGOL 程序中,矩阵的加法是这样实现的:如果数组 $A[1:M, 1:N]$存放 $M\times N$ 阶矩阵$[A]$,数组 $B[1:M, 1:N]$存放 $M\times N$ 阶矩阵$[B]$,通过语句:

FOR $I:=1$ **STEP** 1 **UNTIL** M **DO** **FOR** $J:=1$ **STEP** 1 **UNTIL** N **DO**

$C[I, J]:=A[I, J]+B[I, J]$;

就把矩阵[A]与矩阵[B]的和存放在数组 $C[1:M, 1:N]$ 中.

与矩阵的加法一样,两个矩阵相减就是它们的对应元素相减.

显然,矩阵加法满足交换律和结合律,即

$$[A]+[B]=[B]+[A] \quad \text{(交换律)}$$

$$([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C]) \quad \text{(结合律)}$$

(2) 数与矩阵的乘法

数 k 与 $m\times n$ 阶矩阵 $[A]=(a_{ij})$ 相乘就是矩阵的每个元素与这个数相乘,即

$$k[A]=k\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

(3) 矩阵与矩阵的乘法

两个矩阵相乘是这样规定的:设 $[A]=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 阶矩阵, $[B]=(b_{ij})$ 是 $n\times r$ 阶矩阵,则由元素

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1、2、\cdots、m,\ j=1、2、\cdots、r)$$

组成的 $m\times r$ 阶矩阵 $[C]=(c_{ij})$ 称为矩阵 $[A]$ 和矩阵 $[B]$ 的积,记作 $[C]=[A]\cdot[B]$ 或 $[C]=[A][B]$. 特别要注意的是[A]的列数一定要与[B]的行数相同.

例如,若 $[A]=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, $[B]=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

则 $$[C]=[A][B]=\begin{bmatrix} 3\cdot1+5\cdot5+2\cdot7 & 3\cdot4+5\cdot3+2\cdot6 \\ 8\cdot1+7\cdot5+4\cdot7 & 8\cdot4+7\cdot3+4\cdot6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 42 & 39 \\ 71 & 77 \end{bmatrix}$$

容易证明,矩阵的乘法满足结合律:

$$([A][B])[C]=[A]([B][C])$$

矩阵的加法和乘法满足分配律:

$$([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$$

但要注意,矩阵的乘法不满足交换律,即[A][B]一般不等于[B][A]. 而且,如果[A][B]有意义的话,[B][A]还不一定有意义.

利用矩阵的乘法,可以把方程组(1-1-1)用矩阵形式来表示. 如用[A]表示矩阵(1-1-2), $\{X\}$ 和 $\{B\}$ 分别表示式(1-1-3)所示的未知数矩阵和右端项矩阵,则式(1-1-1)可改写成

$$[A]\{X\}=\{B\} \tag{1-1-4}$$

在 ALGOL 程序中,矩阵的乘法可以这样实现:如果数组 $A[1:M, 1:N]$ 和数组 $B[1:N, 1:R]$ 分别存放矩阵[A]与[B],通过语句:

```
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO FOR J:=1 STEP 1 UNTIL R DO
BEGIN W:=0; FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO
W:=W+A[I, K]*B[K, J]; C[I, J]:=W
END;
```

就把矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的积$[A][B]$存放在数组$C[1:M,\ 1:R]$中。

可以证明[1]，方阵的积的行列式等于它们行列式的积，即

$$\det([A]\cdot[B])=\det([A])\cdot\det([B])$$

(4) 单位阵

对角元为1的对角阵称为单位阵. 一般用$[I]$来代表单位阵，即

$$[I]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

如果$[A]$是n阶方阵，$[I]$是n阶单位阵，显然有$[A][I]=[I][A]=[A]$。

(5) 转置阵

如果把矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

的第一行、第二行、……分别变成第一列、第二列、……，这样得到的矩阵称为矩阵$[A]$的转置阵，记作$[A]^T$，即

$$[A]^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

例如，矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

的转置阵是

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

容易证明：$([A][B])^T=[B]^T[A]^T$. 事实上，如记$[B]^T$的第j行第k列元素为$\tilde{b}_{jk}$，则$\tilde{b}_{jk}=b_{kj}$，b_{kj}为$[B]$的第k行第j列元素. 同样$[A]^T$的第k行第i列元素$\tilde{a}_{ki}=a_{ik}$，a_{ik}为$[A]$的第i行第k列元素. 因此，$[B]^T[A]^T$的第j行第i列元素为$\sum_k \tilde{b}_{jk}\tilde{a}_{ki}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$，它等于$[A][B]$的第$i$行第$j$列元素，即$[B]^T[A]^T=([A][B])^T$。

(6) 逆阵

对于方阵$[A]$，如果存在方阵$[B]$使

$$[A][B]=[B][A]=[I]$$

则称$[B]$为$[A]$的逆阵. $[A]$的逆阵记作$[A]^{-1}$.

n阶方阵$[A]=(a_{ij})$存在逆阵的充要条件是$\det([A])\neq 0$. 事实上，如果方阵$[A]$的行列式不等于零，记$D=\det([A])$，A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式，则方阵

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}$$

就是方阵$[A]$的逆阵. 反之,如果方阵$[A]$的逆阵存在,则$[A][A]^{-1}=[I]$, 从而$\det([A])\cdot\det([A]^{-1})=\det([A][A]^{-1})=\det([I])=1$. 因此$\det([A])\neq 0$. 另外, 我们从中还可看到$\det([A]^{-1})=1/\det([A])$. 一般也称存在逆阵的方阵为非奇阵, 也就是说, 行列式值不等于零的方阵是非奇阵.

容易证明:

$$([A]^{-1})^{-1}=[A]$$

$$([A][B])^{-1}=[B]^{-1}\cdot[A]^{-1}$$

$$([A]^{-1})^T=([A]^T)^{-1}$$

对于方程组(1-1-4), 如果系数阵$[A]$的逆阵$[A]^{-1}$存在并已求出, 方程组的解就很容易求得. 事实上, 只要用$[A]^{-1}$左乘方程组(1-1-4)的两边, 等式左边为

$$[A]^{-1}[A]\{X\}=[I]\{X\}=\{X\}$$

而等式右边为

$$[A]^{-1}\{B\}$$

因此方程组(1-1-4)的解就是

$$\{X\}=[A]^{-1}\{B\} \tag{1-1-5}$$

(7) 对称阵

对于方阵$[A]$, 如果$[A]^T=[A]$, 则称$[A]$是对称阵. 如果对称阵$[A]$的第i行第j列元素是a_{ij}, 则$a_{ij}=a_{ji}$.

(8) 正交阵

对于方阵$[A]$, 如果$[A]^T=[A]^{-1}$, 则称$[A]$是正交阵.

(9) 正定矩阵

n阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的左上角元素组成的矩阵, 例如

$$[a_{11}]、\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}、\cdots、\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为$[A]$的主子矩阵. 主子矩阵的行列式称为$[A]$的主子行列式.

如果方阵$[A]$是对称的, 而且它的所有的主子行列式都大于零, 则称$[A]$是正定的. 显

然，正定矩阵是非奇的.

(10) 相似矩阵

如果存在一个非奇阵$[G]$，使$[A]=[G]^{-1}[B][G]$，则称矩阵$[A]$与$[B]$相似. 显然，如果$[A]$与$[B]$相似，则$[B]$与$[A]$也相似. 这是因为，如果非奇阵$[G]$使$[A]=[G]^{-1}[B][G]$，则$[B]=[G][A][G]^{-1}=([G]^{-1})^{-1}[A][G]^{-1}$，而$[G]^{-1}$是一个非奇阵，因此，根据矩阵相似的定义，$[B]$与$[A]$相似. 对相似矩阵有如下一些性质：

1) 如果$[A]$与$[B]$相似，$[B]$与$[C]$相似，则$[A]$与$[C]$相似. 事实上，如果存在非奇阵$[G_1]$、$[G_2]$，使$[A]=[G_1]^{-1}[B][G_1]$，$[B]=[G_2]^{-1}[C][G_2]$，则$[A]=[G_1]^{-1}[G_2]^{-1}[C][G_2][G_1]=([G_2][G_1])^{-1}[C]([G_2][G_1])$，而矩阵$[G]=[G_2][G_1]$是非奇阵，因此，$[A]$与$[C]$相似.

2) 如果$[A]$与$[B]$相似，则$\det([A])=\det([B])$. 事实上，如果$[A]=[G]^{-1}[B][G]$，则$\det([A])=\det([G]^{-1}[B][G])=\det([G]^{-1})\det([B])\det([G])=\det([G]^{-1})\det([G])\cdot\det([B])=\det([B])$.

(11) 分块矩阵

有时为了方便起见，用一些纵线和横线把矩阵$[A]$划分成几块，其中每一块都是一个小矩阵，可以分别用一个符号来代替，例如

$$[A]=\begin{bmatrix}5&18&9&4&7&3\\6&2&3&5&6&1\\7&4&7&6&4&1\\5&7&9&3&5&0\\12&3&1&0&8&4\\8&6&9&1&4&2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:ccc:cc}5&18&9&4&7&3\\6&2&3&5&6&1\\\hdashline 7&4&7&6&4&1\\\hdashline 5&7&9&3&5&0\\12&3&1&0&8&4\\8&6&9&1&4&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}[A_{11}]&[A_{12}]&[A_{13}]\\[A_{21}]&[A_{22}]&[A_{23}]\\[A_{31}]&[A_{32}]&[A_{33}]\end{bmatrix}$$

其中

$$[A_{11}]=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}、[A_{12}]=\begin{bmatrix}18&9&4\\2&3&5\end{bmatrix}、[A_{13}]=\begin{bmatrix}7&3\\6&1\end{bmatrix}$$

$$[A_{21}]=[7]、[A_{22}]=[4\ \ 7\ \ 6]、[A_{23}]=[4\ \ 1]$$

$$[A_{31}]=\begin{bmatrix}5\\12\\8\end{bmatrix}、[A_{32}]=\begin{bmatrix}7&9&3\\3&1&0\\6&9&1\end{bmatrix}、[A_{33}]=\begin{bmatrix}5&0\\8&4\\4&2\end{bmatrix}$$

这种被划分成一些小块的矩阵$[A]$称为分块矩阵. 分划出来的小块称为$[A]$的子矩阵或子块. 当然矩阵的分块可以根据需要任意划分. 例如矩阵$[A]$也可这样划分：

$$[A]=\left[\begin{array}{c:ccc:cc}5&18&9&4&7&3\\\hdashline 6&2&3&5&6&1\\7&4&7&6&4&1\\\hdashline 5&7&9&3&5&0\\12&3&1&0&8&4\\\hdashline 8&6&9&1&4&2\end{array}\right]$$

矩阵$[A]$分块的一般形式是：