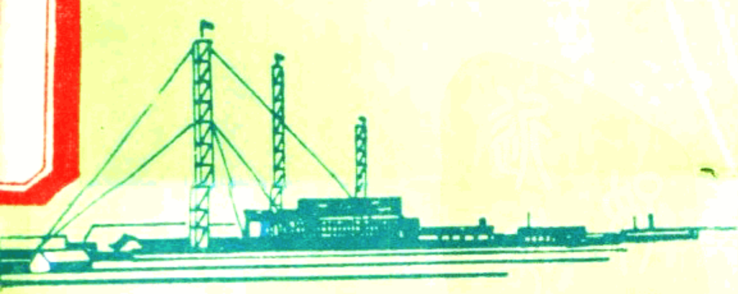
职业高级中学课本

数学

SHUXUE

（理工类）

下册



人民教育出版社

职业高级中学课本

（试用本）

数　学

（理工类）

下　册

人民教育出版社数学室编

•

人民教育出版社出版

天津教育出版社重印

天津市新华书店发行

天津新华印刷四厂印刷

•

开本787×1092　1/32　印张9.5　字数[illegible]

1987年1月第1版　　1989年5月第2次印刷

印数5001—7500

ISBN 7—107—00019—5/G·45（课）　定价：0.84元

说　明

一、为了适应中等教育结构调整和中等职业技术教育发展的需要，我们编写了这套职业高中数学教材，供三年制职业高中开设文化课用.

二、考虑到职业高中学生毕业后就业的广泛性和利于他们掌握在工作中进行技术革新，继续进修所必需的数学基础知识，进一步培养正确迅速的运算能力，发展逻辑思维能力和空间想象能力，从而提高分析问题和解决问题的能力，这套职业高中数学教材在确定教学内容和教学要求时，注意使数学的知识面适当宽一些，与《高中数学教学纲要》中的基本要求大体相当，在理论上和习题的难度上适当降低，着重基础知识的教学和基本技能的训练.

三、为了适应各地职业高中不同专业的需要，这套数学教材分理工和文史两大类，在教学内容的范围与程度上有所不同，并注意增加教学内容的弹性．每类教材分上、下两册，上册包括现行高中《代数》上册（乙种本，下同）和《立体几何》的主要内容，下册包括现行高中《代数》下册和《平面解析几何》的主要内容．考虑到有些职业高中或专业的特殊需要，在两类教材中都安排了一定的选学内容（用仿宋体字印出）．另

外还编有《电子计算机的初步知识》、《概率统计的初步知识》和《简易微积分》三本教材，供选用.

各职业高中可以根据自己的实际需要，灵活选用这些教材. 两年制的职业高中，或对数学知识需要较少的专业，可以只选学上册，也可以再选学下册中的部分内容.

四、这套教材是在高中数学乙种本的基础上进行改编的. 在教学时，教师可参阅与高中数学乙种本配套的教学参考书.

五、本书系理工类《数学》下册，内容包括数列、极限、数学归纳法，不等式，复数，排列、组合、二项式定理，直线的方程，圆锥曲线，参数方程、极坐标，共七章. 教学时间约需144课时.

本书习题分练习、习题、复习参考题三类. 其中练习供课堂上用，习题供课内、外作业用，题号前标有＊号的供选用；复习参考题供复习本章知识时选用.

六、本书由本社数学室编写. 参加编写工作的有蔡上鹤、高存明，由蔡上鹤任责任编辑. 全书由吕学礼校订.

在本书编写过程中，北京市教育局教学研究部职业教育室肖志仲同志，以及从事职业中学数学教学工作的杨春香、郭锡瀛、曹荣珍、陶冶、雷美瑞等同志对初稿提出了很多宝贵意见. 在这里，谨向这些同志表示感谢.

目　　录

第五章　数列、极限、数学归纳法

一　数列与数列的极限

5.1　数列

我们看下面的例子：

图 5-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层. 自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

图　5-1

自然数 1,2,3,4,5,…的倒数排列成一列数：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots. \tag{2}$$

$\sqrt{2}$的精确到 1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值排列成一列数：

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots. \tag{3}$$

—1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，……排列成一列数：

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots. \qquad (4)$$

无穷多个 1 排列成一列数：

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \qquad (5)$$

象上面的例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，……，第 n 项，……. 对于上面的数列(1)，每一项与它的序号有下面的对应关系：

项	4	5	6	7	8	9	10
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
序号	1	2	3	4	5	6	7

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项. 有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$. 例如，把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如，数列(1)的通项公式是 $a_n = n + 3 (n \leqslant 7)$，数列(2)的通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$. 如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用 1, 2, 3, …去代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项.

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**. 上面的数列(1) 是有穷数列，数列(2)，(3)，(4)，(5)都是无穷数列.

例 1 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$；　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-1,2,-3,4,-5.$$

例 2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $1,3,5,7$；

(2) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $-\frac{1}{1\cdot2},\frac{1}{2\cdot3},-\frac{1}{3\cdot4},\frac{1}{4\cdot5}$.

解：(1) 数列的前 4 项 $1,3,5,7$ 都是序号的 2 倍减去1，所以通项公式是 $a_n=2n-1$；

(2) 数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上 1，分子都是分母的平方减去 1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot2},\frac{1}{2\cdot3},-\frac{1}{3\cdot4},\frac{1}{4\cdot5}$的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为

正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练　习

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前5项：

(1) $a_n=n^2$;　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=5(-1)^{n+1}$;　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第7项与第10项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 2, 4, 6, 8;　　(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一个数列各写出一个通项公式：

(1) 2, 4, (　), 8, 10, (　), 14;

(2) 2, 4, (　), 16, 32, (　), 128, (　);

(3) (　), 4, 9, 16, 25, (　), 49;

(4) (　), 4, 3, 2, 1, (　), −1, (　);

(5) 1, $\sqrt{2}$, (　), 2, $\sqrt{5}$, (　), $\sqrt{7}$.

5.2 等差数列

考察上一节中提到过的数列(1):

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示．例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 −5.

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

例如，如果一个等差数列$\{a_n\}$的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2,$$

即

$$a_n=2n-1.$$

例 1 求等差数列8, 5, 2, …的第 20 项.

解： $\because\ a_1=8, d=5-8=-3,\ n=20,$

$$\therefore\ a_{20}=8+(20-1)\times(-3)$$
$$=-49.$$

例2 等差数列$-5, -9, -13,$ …的第几项是-401?

解： $a_1=-5, d=-9-(-5)=-4$, 设 $a_n=-401$, 则有

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第 100 项是-401.

例 3 梯子的最高一级宽 33cm，最低一级宽110cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列. 计算中间各级的宽.

解： 用$\{a_n\}$表示题中的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=33,\quad a_{12}=110,\quad n=12,$$
$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

$$\therefore\quad a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96, 103cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$. 所以

$$\boldsymbol{A=\frac{a+b}{2}}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 $3, 7, 11, \cdots$ 的第 4, 7, 10 项；
   (2) 求等差数列 $10, 8, 6, \cdots$ 的第 20 项；
   (3) 求等差数列 $2, 9, 16, \cdots$ 的第 n 项；
   (4) 求等差数列 $0, -3\frac{1}{2}, -7, \cdots$ 的第 $n+1$ 项.
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：
   (1) 已知 $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1；
   (2) 已知 $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d；
   (3) 已知 $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n；
   (4) 已知 $a_4=10$, $a_7=19$, 求 a_1 与 d.

下面通过具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

为了求出图 5-1 所示的钢管的总数，我们可以设想如图 5-2 那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管. 这样，每层的钢管数都相等，即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

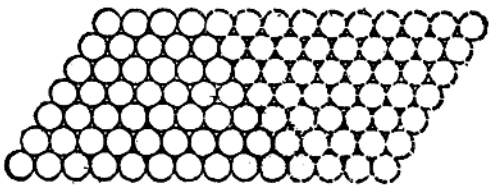


图 5-2

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是 $(4+10)\times 7$，所以所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]; \quad (1)$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)两式的两边分别相加，得

$$2S_n=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{ 个}}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$,所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 如图 5-3,一个堆放铅笔的V形架的最下面一层放 1 支铅笔,往上每一层都比它下面一层多放1支,最上面一层放 120 支. 这个V形架上共放着多少支铅笔?

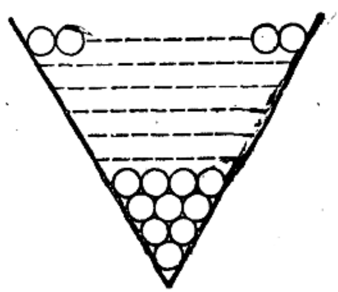


图 5-3

解: 由题意可知,这个V形架上共放着120层铅笔,且自下而上各层的铅笔数组成等差数列,记为$\{a_n\}$,其中 $a_1=1$, $a_{120}=120$. 根据等差数列$\{a_n\}$前 n 项和的公式,得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260.$$

答: V形架上共放着7260支铅笔.

例 5 求集合$M=\{m|m=7n, n\in N$, 且$m<100\}$的元素个数，并求这些元素的和.

解：∵ $$7n<100,$$

∴ $$n<\frac{100}{7},$$

$$n<14\frac{2}{7}.$$

由于满足上面不等式的自然数 n 共有 14 个，所以集合M中的元素共有 14 个. 将它们从小到大列出，得

$$7,\ 7\times2,\ 7\times3,\ \cdots,\ 7\times14,$$

即

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

这个数列是等差数列，记为$\{a_n\}$，其中 $a_1=7, a_{14}=98$. 因此，

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答：集合M共有 14 个元素，它们的和等于 735.

例 5 表明，在小于 100 的正整数中共有 14 个数是 7 的倍数，它们的和是 735.

例 6 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

证明：将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d, a, a+d$，这里 $a-d>0, d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长，所以根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

从而这三条边的长是$3d, 4d, 5d$.

因此，这三条边的长的比是3:4:5.

练　习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的S_n：

(1) $a_1=5, a_n=95, n=10$;

(2) $a_1=100, d=-2, n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{3}{2}, n=14$;

(4) $a_1=14.5, d=0.7, a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前n个数的和；

(2) 求自然数列中前n个偶数的和.

习题三十

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 3, 6, 9, 12;　　　　(2) 0, −2, −4, −6;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;

(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;

(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列$1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第10项，第31项及第48项；