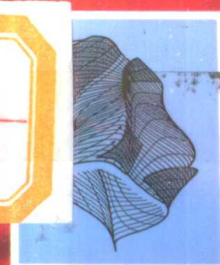
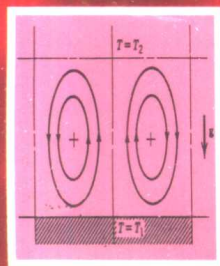
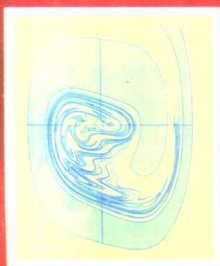


冯 奇 沈荣瀛 编著

工程中的混沌振动
Gong Cheng Zhong De
Hun Tun Zhen Dong

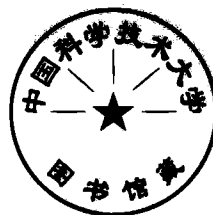
工程中的混沌振动



上海交通大学出版社

工程中的混沌振动

冯 奇 沈荣瀛 编著



上海交通大学出版社

内 容 提 要

混沌学是 20 世纪末新兴的基础理论之一,普及这一理论对人类走向 21 世纪具有重要的意义。本书深入浅出地阐述了非线性动力学的许多基本概念和近年来的发展,着重介绍了混沌振动的识别方法和数学建模,并通过汽车齿轮传动的工程实例说明了混沌振动的具体建模方法。全书共有七章:导论,非线性动力学基本概念,混沌振动的识别及几种混沌模型,离散动力学,分形和分维,随机混沌,应用实例。

本书可供大专院校师生,自然科学和社会科学工作者,工程技术人员和关心混沌学的广大读者阅读和参考。

工程中的混沌振动

冯 奇 沈荣瀛 编著

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

常熟市印刷二厂·印刷

开本:787×1092(mm) 1/16 印张:10 字数:247 千字

版次:1998 年 12 月 第 1 版

印次:1998 年 12 月 第 1 次

ISBN 7-313-02130-5/TK·060

定价:17.00 元

本书任何部分文字及图片,如未获得本社书面同意,
不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

(本书如有缺页、破损或装订错误,请寄回本社更换。)

前 言

混沌学是非线性科学的一个分支,是 20 世纪末叶新兴的基础理论之一,目前它已渗透到自然科学和社会科学的各个领域。混沌学的研究向人们揭示了关于形态和结构的崭新世界。另一方面科学技术发展引起一场工业革命,例如由于材料科学的发展,在许多实际工程结构中,已用高分子材料、复合材料代替传统的金属材料,这就使广大工程技术人员面临新科学挑战,因此非线性科学不再是属于少数理论工作者的专利,而应该得到较为广泛的普及。然而,目前国内关于混沌学的研究尚停留在数学阶段,虽然已出版了一些有关混沌动力学的著作,但绝大多数的论著是有关动力系统的数学理论,尚缺乏适合于广大工程技术人员阅读的书籍,这对于普及非线性科学是不利的。为了面向 21 世纪经济发展的需要,提高我国工程技术人员科学素质是十分必要的。本书写作的意图就是为了使广大的工程技术人员了解混沌振动的基本知识,从而在实际工作中识别混沌振动,并能采用新的数学工具对工程结构和系统进行分析及建模等。

80 年代中期国外曾出版了大量的有关混沌动力学和非线性动力学的著作,这些著作中绝大多数是为有一定研究基础的读者准备的,数学上有一定深度,不易为广大的工程技术人员所理解。本书写作借鉴了这些著作,并从中摈弃了深奥的数学理论,努力做到由浅入深地阐明基本概念,使广大读者容易入门。本书写作中强调了应用性,一方面在书中介绍了如何识别混沌振动和几种典型的混沌模型;另一方面又通过应用实例,详细地向读者介绍如何从一个实际模型出发,应用较新的数学工具,建立不同的混沌振动模型。希望通过本书的介绍,使读者既能掌握混沌动力学的基本知识,又能了解混沌振动领域的较新动态,并能结合工程实际加以应用。

本书共分七章。第 1 章导论为全书的概述,重点阐明混沌动力学发展的历史、术语和数学工具。第 2 章为非线性动力学基本概念,从比较线性振动与非线性振动的根本区别着手,详细地阐述了各类吸引子及其他基本概念。第 3 章介绍了如何识别混沌振动的方法。为了便于读者进行数学建模,介绍了 11 种较为成熟的混沌振动模型。差分方程是描述混沌振动的一种较新的数学工具,它较微分方程更适合计算机运算,因此在第 4 章中介绍了离散动力学的基本知识,由于该章相对比较数学化,对此无兴趣的读者可以跳过这一章。第 5 章介绍了分形和分维的基本知识。由于在工程实际问题中,随机性是不可避免的,因此第 6 章介绍了目前还

属较新的内容,随机混沌。与第4章相类似,应用工作者也可以跳过第5和第6章,直接阅读第7章。第7章通过汽车齿轮传动中的 Rattling 问题,分别介绍了确定性离散模型和随机离散模型的建立方法,这些模型分别展示了确定性混沌和随机混沌的性质。上述这些章节的论述已基本上覆盖了混沌动力学的基本内容,读者不难应用本书介绍的理论和方法解决具体问题。

由于混沌学是一门尚在发展的科学,涉及领域很广,限于笔者水平,谬误之处在所难免。尤其对于一些基本概念的阐述,笔者常感功力不足,因此在此敬请读者批评指正。

冯 奇、沈荣瀛

1998年3月

目 录

1. 导 论	1
1.1 什么是混沌动力学	1
1.2 历史的回顾	2
1.3 杜芬振子的混沌动力学	3
1.4 吸引子和分叉	8
1.5 映射和流	10
2. 非线性动力学基本概念	16
2.1 非线性现象概述	16
2.1.1 线性无阻尼自由振子	16
2.1.2 非线性无阻尼自由振子	17
2.1.3 线性有阻尼自由振子	18
2.1.4 非线性有阻尼自由振子	20
2.1.5 线性有阻尼强迫振子	20
2.1.6 非线性有阻尼强迫振子:周期吸引子	22
2.1.7 非线性有阻尼强迫振子:奇怪吸引子	23
2.2 自治系统中点吸引子	23
2.2.1 有阻尼线性振子	23
2.2.2 非线性摆	25
2.3 自治系统中的极限环	29
2.4 强迫振子的周期吸引子	30
2.4.1 庞加莱映射	31
2.4.2 线性共振	31
2.4.3 非线性共振	32
2.4.4 庞加莱映射的吸引域	34
2.5 强迫振子的混沌吸引子	35
3. 混沌振动的识别及几种混沌模型	38
3.1 混沌振动的识别	38
3.1.1 系统中的非线性元件	39
3.1.2 随机输入源	39
3.1.3 时间历程的观察	39
3.1.4 相轨线	40
3.1.5 傅立叶谱	41

3.1.6	庞加莱映射图	42
3.1.7	通往混沌的路径	44
3.1.8	李雅普诺夫指数和分维	46
3.2	几种确定性混沌振动的数学模型	47
3.2.1	冲击转子	48
3.2.2	碰撞系统	49
3.2.3	摩擦系统	50
3.2.4	刚体动力学问题	55
3.2.5	双势阱问题	55
3.2.6	摆的混沌	56
3.2.7	球摆	57
3.2.8	气弹颤振	57
3.2.9	流动中的热对流	59
3.2.10	Moore 和 Spiegel 的热对流模型	59
3.2.11	超音速机翼颤振	60
3.2.12	流动系统中的混沌动力学	61
4.	离散动力学	62
4.1	映射的稳定性和分叉	62
4.1.1	引言	62
4.1.2	一维映射的稳定性	63
4.1.3	一维映射的分叉	65
4.1.4	二维映射的稳定性	71
4.1.5	二维映射的分叉	75
4.2	一维和二维映射的混沌性质	76
4.2.1	一般概述	76
4.2.2	一维映射理论	78
4.2.3	分叉通往混沌	80
4.2.4	一维映射的分叉图	82
4.2.5	埃农映射	84
5.	分形和分维	86
5.1	分形的概念	86
5.1.1	中间三分之一康托集合	86
5.1.2	科契雪花曲线	87
5.2	分维	88
5.2.1	经典维数	88
5.2.2	豪斯道夫维数	88
5.2.3	相似维数	89

5.2.4	容量维数	90
5.2.5	关联维数	91
5.2.6	其他维数	92
5.3	逻辑斯蒂映射	92
5.4	随机分形	94
5.5	布朗运动和布朗表面	96
5.5.1	布朗运动	96
5.5.2	布朗表面	98
5.6	非整数阶微积分	99
6.	随机混沌	102
6.1	混沌随机过程及规则随机过程	102
6.1.1	随机混沌响应的概率密度函数性质	102
6.1.2	混沌随机过程的定义	103
6.2	对于噪声系统的庞加莱映射	106
6.2.1	庞加莱映射的定义	106
6.2.2	平均庞加莱映射	107
6.2.3	噪声摄动的杜芬方程	108
6.3	通往混沌的噪声路径	112
6.3.1	噪声对逻辑斯蒂方程的效应	112
6.3.2	拟周期激励的非线性振子通往混沌的噪声路径	112
7.	应用实例	120
7.1	带有“空隙”单元的系统建模	120
7.1.1	“空隙”模型	120
7.1.2	简单的物理现象	122
7.1.3	运动微分方程	122
7.2	Rattling 振动的确定性模型与混沌运动	124
7.2.1	传动机构	124
7.2.2	运动方程	125
7.2.3	映射方程	127
7.3	Rattling 振动的随机混沌模型	132
7.3.1	离散的随机模型	132
7.3.2	随机混沌性质讨论	138
7.3.3	二级传动的随机模型	141
7.4	小结	145
附	录	147
参	考文献	148

1. 导 论

1.1 什么是混沌动力学

自 70 年代开始,学术界掀起一股“混沌”热,众多学科的科学家人纷纷进入这一领域进行研究,从而混沌学的研究取得了不少突破。混沌学的研究向人们揭示了关于形态和结构的崭新世界,例如,声学混沌、光学湍流、化学反应的混沌变化、太阳系中的行星的混沌轨道、地震的混沌特性、天气长期预报的“蝴蝶效应”、商业周期中隐含着有序性、股市细微分散的交易与大规模变动情况之间的重要关系等等,都无不与这门新学科相联系。

那么究竟什么是混沌?混沌的英文名为“chaos”,根据大英百科全书,“chaos”一词来自希腊文“chaos”,其原意是指先于一切事物而存在的广袤虚无的空间。后来,罗马人把混沌解释为原始的无形的空间,而由所谓的造物主把秩序与和谐注入其中。在现代用语中,混沌表示一种无序和不规则状态。在物理学中,典型的混沌现象是大气湍流。迄今为止,普遍认为流动的机理是非随机的,因为对于任意的流动单元,其运动方程能被确定地表达出来。根据这样的描述,在低速时,流动的模式是完全规则的,并且可通过方程的解进行预报;但当速度超过某临界值时,流动变为湍流,这个从有序转变为无序的过程是混沌的一个例子。在目前广泛流行的文献中,混沌是一个科学术语,它表示一类在确定性系统中发生的类随机运动。

研究动力学中混沌问题的学科称为混沌动力学,它与牛顿建立的经典动力学是不同的。按照牛顿动力学的观点,凡作用于质点上的力,当其初始状态已知,则质点的运动可以预报。但事实上,已经发现,即使是最简单的动力系统,其运动也不可能长期预报,这种运动就是混沌运动。在此,首先必须区分两类运动,即随机运动和混沌运动。对于前者,输入力或某些系统参数是不确定的,仅知道其统计规律和某些统计量;而对于后者,系统是完全确定的,无任何随机性,但它的运动却不可预报。混沌的存在性或运动的不可预报性首先由庞加莱(Henri Poincare, 1854~1912)从物理学的经典问题中发现。庞加莱将拓扑学引进到动力系统的研究中,并由此发现混沌运动展示了一种被称为分形结构的新的几何性质。本书目的之一是让读者掌握如何发现在混沌振动中的分形结构,并用来度量这类类随机运动。

一般情况下,当某些强非线性因素存在时,混沌振动便可能发生。但应当注意,非线性只是产生混沌振动的必要条件,而不是充分条件。那么在什么情况下会导致混沌振动?下面介绍几种在连续介质物理学中的混沌源:

- A. 系统带有非线性电子元件或非线性弹簧元件;
- B. 存在非线性阻尼或摩擦;
- C. 构件之间存在孔隙,或可以发生摆动以及具有有界弹簧或双线性弹簧单元;
- D. 存在与流动相关的力;
- E. 非线性边界条件;
- F. 非线性反馈控制力;

G. 非线性电阻、电路元件、二极管等;

H. 非线性电磁力。

在连续介质力学中,非线性效应通过不同的形式表现出来。例如在运动学中,对流加速度、向心加速度和科氏加速度;在材料力学中,应力与应变之间的非线性关系;在边界条件中,流动的自由表面,与约束相关的变形;与几何非线性有关的结构大变形,如梁、板、壳的大变形以及非线性体力等。根据现有的文献报道,力学和电学中经常出现的混沌振动有下列几种:

A. 带孔隙的弹性结构的振动;

B. 带有孔隙或可摆动的机械系统振动;

C. 气动弹性力学问题;

D. 机车车辆的车轮动力学问题;

E. 大型的三维结构的振动;

F. 摩擦系统动力学;

G. 转子或陀螺系统动力学;

H. 带有二极管的简单电路系统;

I. 反馈控制电路。

以上指出的只是许多已被发现的混沌振动现象中的一小部分,第3章将对力学系统的混沌振动模型作专门的介绍。

目前,混沌学的研究具有一定的新闻价值,连美国的“纽约时报”及“新闻周刊”也刊登关于混沌动力学的研究动态。尽管如此,目前对于混沌学的研究还只停留在数学阶段。那么为什么工程技术人员也应该了解混沌振动呢?实际上,工程技术人员已经自觉或不自觉地接触了混沌,不过它们一直被作为噪声或湍流理解而已。在工程设计中,工程技术人员常采用安全系数预防随机的及未知的因素。工程技术人员需要了解混沌的目的,首先是为了识别混沌振动;其次,非线性动力学的发展带来概念的更新,在考察及测定振动和噪声时,可采用新的分析工具,如分维及李雅普诺夫指数等概念;第三,应该指出有许多新的物理现象首先是由工程师发现的,如在非线性动力学中有重要贡献的范德波(Van der pol),就是荷兰的一个电气工程师,他在1927年曾与“混沌”有一面之缘。本书的目的之二就是试图让广大的工程技术人员了解混沌学的知识,从而掌握新的分析手段。

1.2 历史的回顾

为了比较全面地了解混沌动力学的发展,有必要对此作一简短的历史回顾。非线性动力学中有关天体力学,如行星姿态的研究是一个非常古老的问题,与之匹配的是同样具有久远历史的学科即几何学。但长期以来,这两门学科一直独立地、平行地、互不相关地发展着。直至上个世纪末,几何动力学的创建才结束了这种状态。庞加莱被公认为几何动力学的创始人。他超越了同辈学者,以惊人的洞察力察觉当时处于发展阶段的拓扑学研究对动力学的发展是非常有用的。由庞加莱建立的理论基础,后来由 G. D. Birkhoff(1884~1944)发展巩固。庞加莱发现,按照哈密顿方程进行演化的某些力学系统可能展现混沌运动。但不幸的是许多物理学家仅把他的发现当成一种罕有的特例,因此,在本世纪以前,庞加莱思想似乎很少冲击应用动力学。这是因为庞加莱所研究的问题是天体力学中提出的,并且仅限于哈密顿保守系统。

与保守系统相对应的是耗散系统,它具有如下性质:当经过长时间的运动后,轨线在相空间中所占据的体积将强烈地收缩,使相空间中轨线的拓扑结构变得简单。这意味着,复杂的动力系统,甚至由偏微分方程描述的无限维系统最终能用低维系统来描述,例如:库埃特流动、化学反应动力学等。这些研究结果将有助于了解更为复杂的耗散系统。这样的低维模型是由常微分方程的初值问题描述的。一个著名的例子是受周期力激励的有阻尼非线性强迫振子,设它的位移为 x ,则有方程

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x^3 = B \cos t. \quad (1.1)$$

这里“ $\cdot$ ”表示对时间的微分, α, B 是常系数。杜芬(Duffing)^[1]深入地研究过这个非线性方程的特性,因此(1.1)式称为杜芬方程。

第二个重要例子是瑞利—范德波方程:

$$\ddot{y} + \alpha(y^2 - 1)\dot{y} + \omega_0^2 y = A \sin \omega t. \quad (1.2)$$

方程(1.2)是由瑞利(Lord Rayleigh)引入的^[2],并由范德波在1927年应用于电回路进行理论和实验两方面的研究。对于常系数 $\alpha \gg 1$ 及 $A = 0$,则该方程描述自激张弛振动。范德波了解到张弛振动是十分敏感地取决于干扰力的激励频率 ω ,以及相同的强迫振子在不同的初始条件下,可能导致不同的亚谐振动。此外,范德波和 Van der Mark 在《自然杂志》上报道在电振子的实验中发现了不规则噪声,即首次察觉浑沌。

关于范德波方程的详尽数学分析是由 Cartwright 和 Littlewood^[3]及 Levinson^[4]进行的。他们得出一个重要的结论,即范德波方程可能存在两种不同的最终运动状态,且这两种运动状态之间的瞬变是迟疑不定的,即到达其中一种运动状态之前可能要经过一段任意长的时间。1963年 Smale 通过一个相空间图像,几何地再现了这种复杂的瞬变性质^[5]。他证明了忽略随机因素,这些迟疑不定的瞬变过程是由在相空间中全体轨线相对简单的伸展和折叠决定的。此外,Smale 吸收了 Andronov 关于动力学中结构稳定性思想,证明了它的定性图形——Smale 马蹄,在方程(1.2)中有典型的小摄动作用时依然存在。因此,这种随机性和结构之间似矛盾而又和谐的结合,现在称之为浑沌,它在非线性动力学中似乎经常发生。

在此期间,应用动力学家在耗散系统的简单模型中发现了浑沌性质。例如,洛伦兹(Lorenz)^[6]受天气预报的气象问题启发,研究了在流体中的瑞利—贝纳尔对流(Rayleigh-Benard Convection)的一个简化模型,给出了第一个浑沌动力学的具体例子,现称之为洛伦兹吸引子。在日本, Hayashi 作了开创性的工作^[7,8],他以一个非线性电路模拟杜芬方程(1.1),获得了详细的拓扑形象,并采用庞加莱映射进行分析,他的工作导致了 Ueda 对于杜芬方程(1.1)平稳状态的浑沌性质的研究^[9]。在下一节中,以 Ueda 的工作为基础,详细介绍浑沌动力学的一些基本概念。

1.3 杜芬振子的浑沌动力学

令方程(1.1)中 $\alpha = 0.05, B = 7.5$,具体考虑这一特定方程的性质

$$\ddot{x} + 0.05 \dot{x} + x^3 = 7.5 \cos t. \quad (1.3)$$

这个方程可以作为机械工程及结构系统在简谐干扰力激励下作大位移振动的结构运动的

力学模型。过去,这个方程的研究是集中在基频共振与亚谐共振的很窄的参数区域。在本书讨论中,阻尼的大小和激励力的幅值都是预先选定的,这些参数值范围是落在由 Ueda 识别的典型混沌区中。图 1.1 给出了初始条件 $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 4$, 方程(1.3)利用数值积分得到的混沌吸引子的时间历程曲线。这一曲线随着对时间的积分始终为一个参差不齐的图形,虽然时间历程的波形在非规则的时间间隔中重复某一图形,表明它有循环性质,但是它从不精确地再现,因此运动是非周期性的。产生这种现象的原因是,当两个完全相同的系统从两个非常接近的初始条件开始运动,这两个运动将以指数率相互发散。如果初始条件完全相同,那么由于方

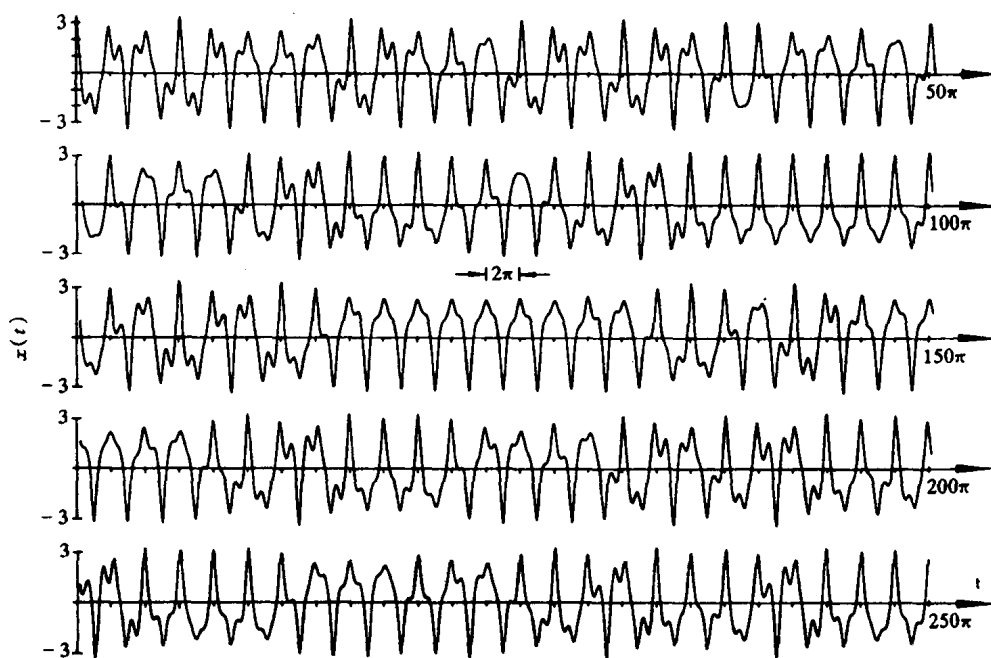


图 1.1 稳态混沌响应的时间序列

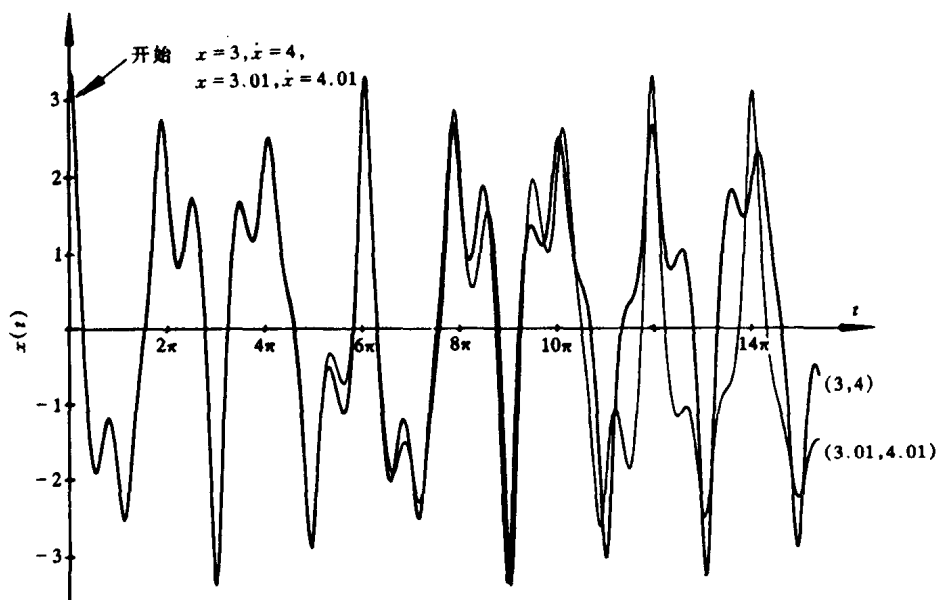


图 1.2 由两个毗邻初始条件出发的两个运动的发散的波形图

程的确定性,将保证两个运动在所有时间都完全相同。但是在实际的物理系统中初始条件中必定存在某些不确定性,因此,名义上相同的运动的发散性在混沌区是不可避免的。这可以通过图 1.2 给以说明:从两个毗邻的初始状态出发,对方程(1.3)进行数值积分,其中一个初始状态为 $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 4$, 而另一个有轻微的扰动,即 $x(0) = 3.01, \dot{x}(0) = 4.01$ 。这两个运动在最初一段时间内,互相重合,但很快地变为互不相关。这种从两个毗邻的初始状态出发,相同的运动发散现象在 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 沿轨线展开的相投影图 1.3 中显现得更充分,这两个运动在开始一段时间重合后便发散并且变为无关。在图 1.3 中,由点 A 开始的任意一条轨线,在简谐激励 $7.5\cos t$ 作用下,运动经整整一个循环后,其终点状态记作 B ; 同样 a 是 $x(0) = 3.01, \dot{x}(0) = 4.01$ 初始状态的起点,轨线终点状态记作 b , 那么在 B 及 b 之间距离与 A 及 a 之间的距离相比是增加的,这表示运动是发散的。

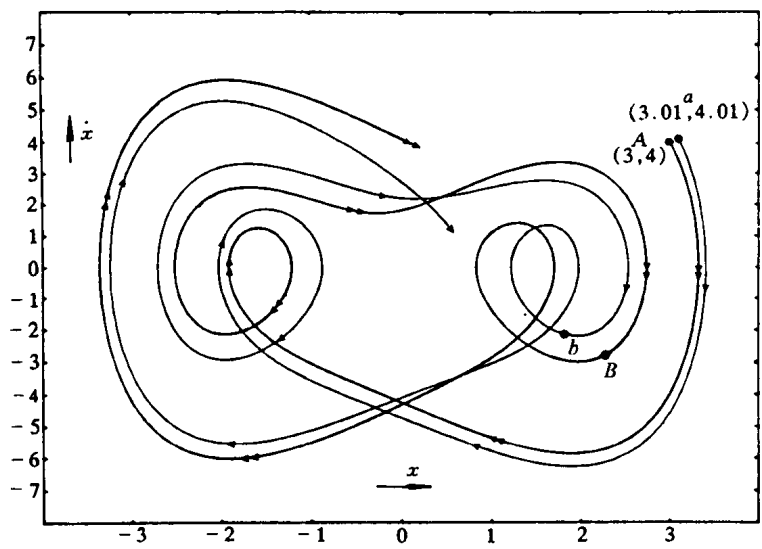


图 1.3 由两个毗邻初始条件出发的两个运动发散的相投影图

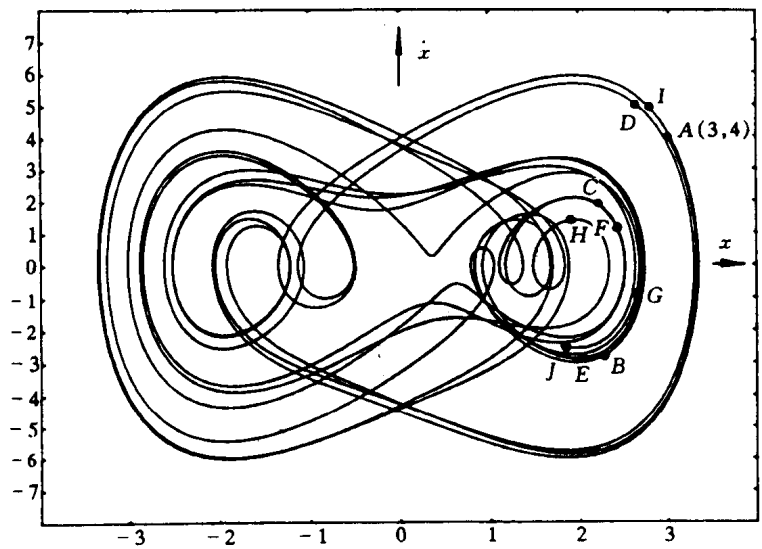


图 1.4 庞加莱截断中点序列相投影图

在干扰力周期 2π 的整数倍时刻,采用频闪法连续地在相轨线上打记号,则在相投影图中,依次得到一连串可以比较的点 $A, B, C, D, \dots$,如图 1.4 所示。假如在图 1.4 中拭去连续的轨线,仅留下用频闪法得到的点序列,那么这图形称为庞加莱映射图,简称庞加莱图,这样的取点法称为庞加莱截断。如果相轨线用三维相空间 $(x, \dot{x}, t)$ 描绘的话,那么这些频闪点位于在相轨线相交的 $t = 2\pi i, i = 0, 1, 2, \dots$ 的平面里。如果系统的最终平稳运动是与干扰力周期相同的周期运动,那么去掉瞬态运动,每次截断得到的点完全相同;而 n 阶的亚谐振动在庞加莱图上仅有 n 个点;当运动为非周期时,每次截断得到的点不再重复。

大量的频闪点累积揭示了异常的结构,图 1.5 给出了由三个不同状态得到的庞加莱截断图形,当频闪点越来越多时,这些图形显示出分层堆积的特性,犹如一片糕点,因此试图预报经过若干个力循环后的频闪点的精确位置是行不通的。如图 1.5 所示,浑沌的庞加莱截断的分层结构可能很复杂也可能比较简单,它们依赖于状态和图形的分辨率。图 1.6 中给出由 Ueda 研究得到的浑沌吸引子高分辨率庞加莱截断图,它展示了复杂形状和分形性质。由图可见,这个

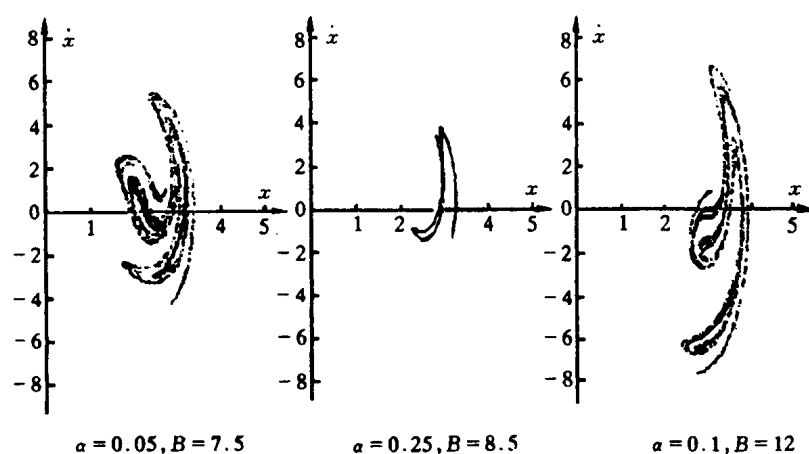


图 1.5 三个 Ueda 浑沌吸引子在 $(x, \dot{x})$ 平面的庞加莱截断图

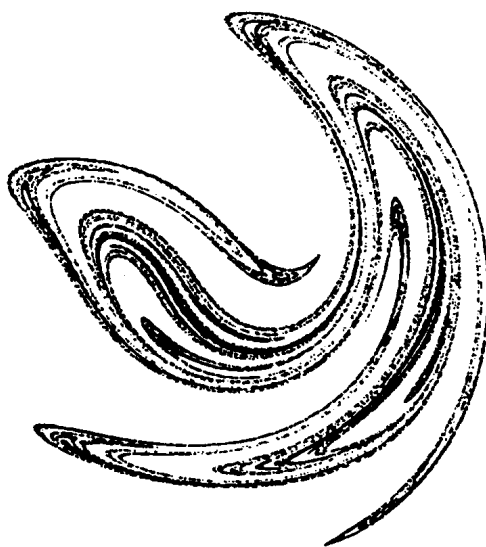


图 1.6 一个放大的 Ueda 浑沌吸引子的庞加莱截断图

复杂的结构事实上是平稳状态的混沌轨线经过简单的伸展和折叠后形成的。这个作用犹如揉面团的过程,称之为动力状态的遍历混合。

观察从任意起始条件开始的瞬态运动可以了解这个结构的完全意义,即经过或长或短的瞬态运动,最终得到的结构完全相同。如图 1.7(a)所示,当一个运动从 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ 初始条件出发,开始时它有峰值很尖、周期很短的瞬态振荡运动,随后它的时间序列就与图 1.1 相类似;而当从 $x(0) = -5, \dot{x}(0) = 0$ 初始条件出发时,图(b)上显示了一个周期较长的瞬态运动。在任意一种情况,庞加莱截断图上频闪点序列最初都远离图 1.5 结构,但连续打点后,频闪点马上逼近这个结构,最终将填满这一相同的结构,因此定义这个结构为一种吸引子,即奇怪吸引子或混沌吸引子。这个吸引子是耗散系统在相空间中整个体积收缩的结果。图 1.7(c)中还给出了一个典型的稳态混沌运动的功率谱,它指出宽带噪声谱是混沌动力学的一个典型性质,但这个噪声是由确定性系统(1.3)本身所产生的。统计性质的研究已逐渐引进到混沌动力学,但如图 1.5 和图 1.6 已经清楚地指出 x 和 $\dot{x}$ 分布肯定不符合高斯规律。

通过上述杜芬振子的讨论,可以认为一个混沌吸引子能够作为非线性动力系统的一类最终平稳状态运动,它在相空间的有界区域内具有稳定的结构,它是通过轨线束伸展,折叠,收缩作用形成的。

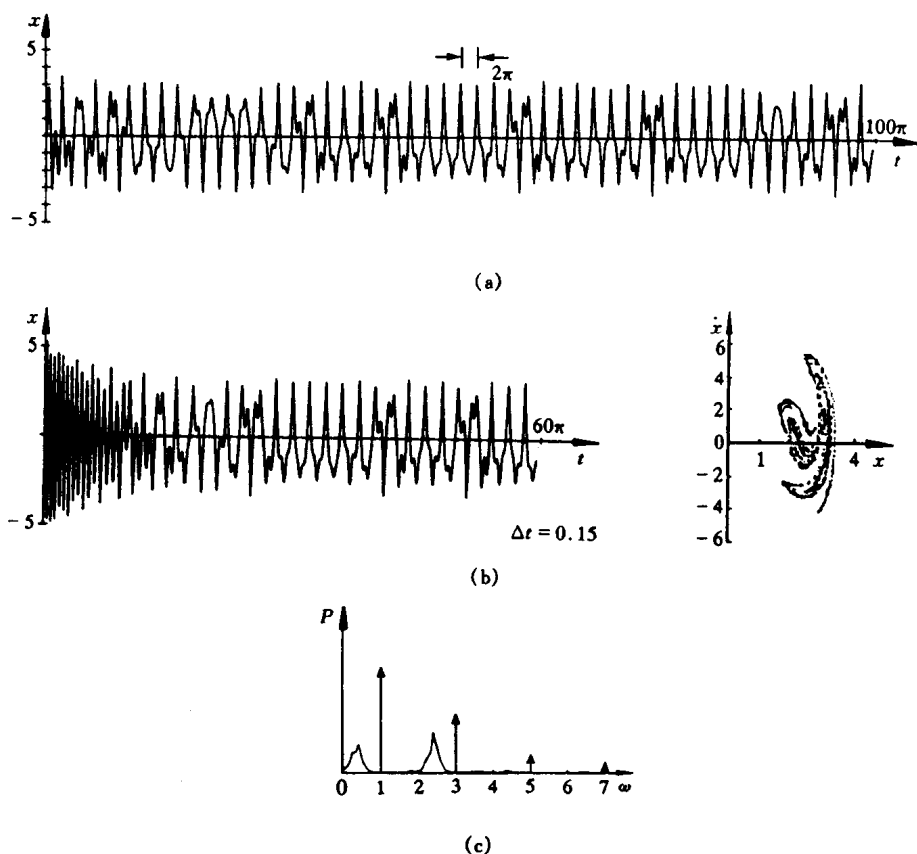


图 1.7 趋于稳态混沌的瞬态运动的时间历程

(a) 初始条件: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$; (b) 初始条件: $x(0) = -5, \dot{x}(0) = 0$; (c) 稳态混沌运动的功率谱

1.4 吸引子和分叉

尽管混沌吸引子概念的提出是最近一二十年的事,但在耗散系统中瞬态运动最后将趋于一个平稳状态运动是一个众所周知的性质。最简单的衰减的瞬态运动发生在平衡位置附近,其中最简单的一个例子是令方程(1.1)中干扰力等于零,如图 1.8 所示,这时静止状态是无外力作用振子的唯一平衡状态。图中的时间历程曲线为一条衰减曲线,其衰减的快慢取决于阻尼的大小。在 $(x, \dot{x})$ 相平面图上,轨线螺旋形地向前逼近原点: $x=0, \dot{x}=0$,即静止状态的点。因此,这个稳定平衡位置对于在相空间中所有轨线而言是一个点吸引子。

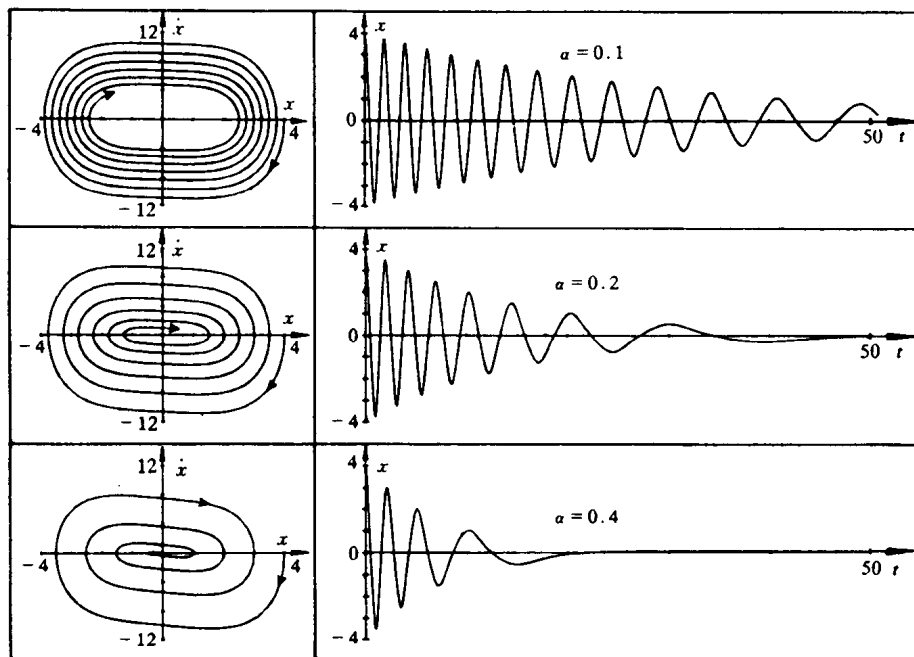


图 1.8 自由杜芬振子的长期性质:点吸引子

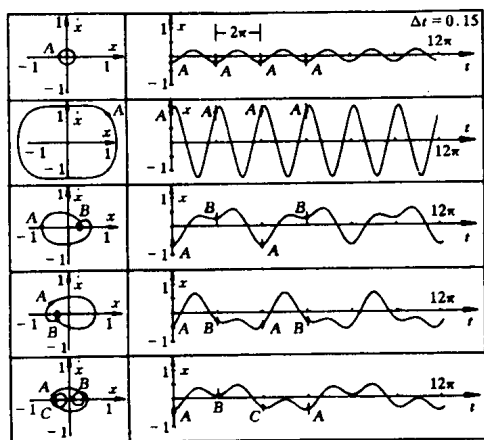


图 1.9 强迫杜芬振子的长期性质:
共存周期吸引子

同样,稳定的周期运动也能吸引相空间中邻近的轨线。如图 1.9 给出了五个稳定的周期运动曲线,它们是杜芬振子(1.1)中当 $\alpha = 0.08, B = 0.2$ 时可能出现的长期运动。这五个分别从不同的初始条件 $(-0.21, 0.02)$ 、 $(1.05, 0.77)$ 、 $(-0.67, 0.02)$ 、 $(-0.46, 0.30)$ 、 $(-0.43, 0.12)$ 非同步开始的运动,最终趋于的运动性质可能是不同的,即可能存在五个共存吸引子。这一趋于已知吸引子的过程可在庞加莱截断图上采用频闪法观察得到。例如第一个吸引子是以基频作小幅振动,具有一个庞加莱截断点 A,瞬态运动趋于这一最终运动性质表现为一系列频闪点收敛于 A。频闪技术从几何上证明,作为具有平衡状态的

稳定的周期运动是如何吸引邻近轨线,也就是讲,从几何上证明了吸引极限环。瞬态运动逼近极限环也能在三维相空间 $(x, \dot{x}, t)$ 中观察到,这将在下一章中详细叙述。三类不同的吸引子:平衡位置(点吸引子),周期吸引子和混沌吸引子(奇怪吸引子)代表最一般的、可能观察到的耗散系统的长期运动,它们在相空间中具有相应的吸引集。

对于任意一个的动力系统,例如系数已知的强迫杜芬振子,其动力性质定性的描述都是从识别一切可能存在的吸引子的几何相空间开始的。在非线性系统中,出现多个吸引子情况是很平常的,例如周期吸引子与混沌吸引子共存。只要这些吸引子及每一种吸引子的类型已知的话,那么就能把每个吸引子与所有产生使轨线趋于该吸引子的初始条件联系起来,它们组成该吸引子的汇集区域,或称为吸引盆,同时,所有共存吸引子的吸引盆组成整个相空间。这些吸引盆可通过大量的、不同的初始条件的识别得到,但是庞加莱不变的流形理论将为绘制相空间中的吸引子和吸引盆位置提供了更为有效的工具。

当改变动力系统中某些参数时,系统平衡点的稳定性以及平衡点的数目将发生变化。在非线性问题中,研究随系统参数改变系统性质相应变化的特性,这是分叉理论的研究主题。当运动的定性性质或拓扑性质发生改变时所取的参数值称为临界值或分叉值。

作为例子,我们考虑一个无阻尼的自由杜芬振子,这时可把方程(1.1)改写成

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0. \quad (1.4)$$

将上述方程的平衡位置作为参数 α 的函数进行描述,当 α 从正值变为负值时,一个平衡点将分裂成三个点。从动力学观点分析,它们由一个在原点的中心点变成一个在原点的鞍点及另外两个中心点,见图1.10。这类分叉称为叉形分叉(pitchfork bifurcation);而从物理学观点分析,恢复力 $-(\alpha x + \beta x^3)$ 可以由势能函数求导得到,当 α 变成负值时,由单势阱问题变成双势阱问题,这类问题代表动力学中的一种定性变化,因此 $\alpha = 0$ 是一个临界分叉值。

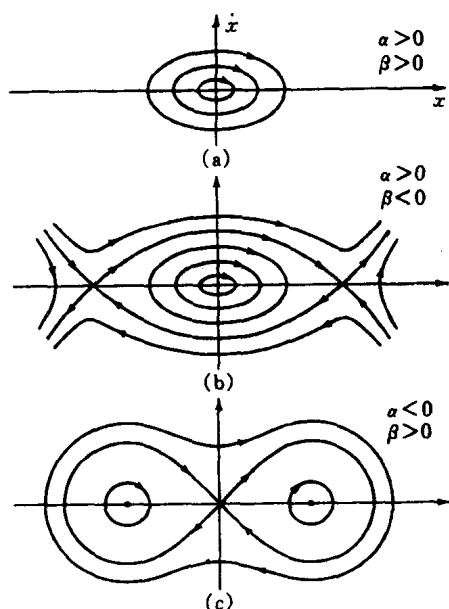


图 1.10 自由杜芬振子相轨线

(a) 硬弹簧: $\alpha, \beta > 0$; (b) 软弹簧: $\alpha > 0, \beta < 0$; (c) 双势阱: $\alpha < 0, \beta > 0$

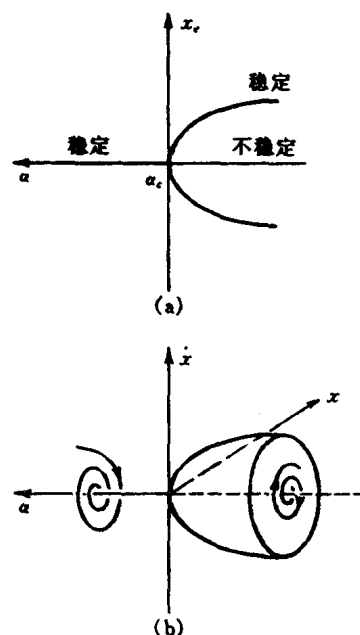


图 1.11 分叉图

(a) 叉形分叉; (b) 霍夫分叉