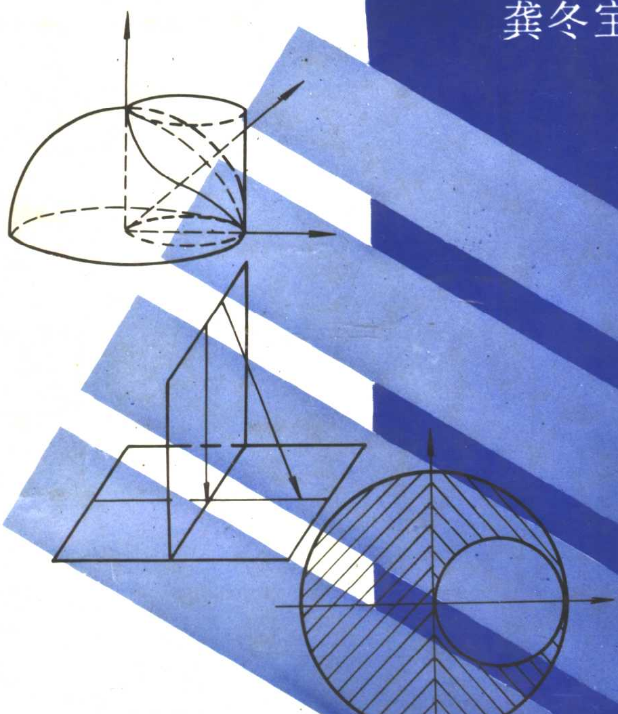
高等数学典型题

解法·技巧·注释

龚冬宝　武忠祥　毛怀遂　邸双亮



西安交通大学出版社

高等数学典型题

解法·技巧·注释

龚冬保　武忠祥
毛怀遂　邱双亮

西安交通大学出版社

内容提要

作者根据多年的教学经验，收集了近千道高等数学的典型题。所选的每道题力求有较新颖、独特的解法，并且从分析题意入手，引导出解题的技巧，旨在启发读者学会求解高等数学各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。为了突出一些典型的方法和揭示一些习题的背景，本书几乎对每道题作了注释。

本书可作为大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生及参加高等数学竞赛的数学爱好者使用。

(陕)新登字 007 号

高等数学典型题

解法·技巧·注释

龚冬保　武忠祥

毛怀遂　邸双亮

责任编辑　潘瑞麟　叶涛

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路 28 号　邮政编码　710049)

西安电子科技大学印刷厂印装

各地新华书店经销

开本 787×1092　1/16 印张 22.5　字数:552 千字

1996 年 6 月第 1 版　　1996 年 6 月第 1 次印刷

印数:1——5000

ISBN7-5605-0771-9/O·124　定价 19.50 元

前　言

为学好高等数学，要做一定数量的习题。在做数学练习题时，不少人采用“套公式”的方法，这样，只有通过大量的练习，才能获得一些数学知识，很难学会分析问题和解决问题的方法，所以，“套公式”的方法是不可取的。本书力图给读者展示另一种解题方法；从分析题目的条件与结论间的逻辑关系入手，理清解题思路，再一步一步地做下去；遇到需用的公式，自然地提取使用，这样能清楚地判断结论的正确性。我们认为坚持这样的解题方法，不但能对所学知识加深理解，还有利于培养数学的思维能力。这就是我们写这本书的目的。为此我们针对本课程的内容精选和编制了近千道典型题目，用上面所述方法作了解答，有些题目的解法独特、新颖，多数题目在书的旁边，对该题解题思路、技巧作了注释。因此，解答的正文步骤较简略，希望读者在阅读本书时能边看边推导，并能用我们介绍的一些方法和技巧，去解答更多的题。最好主动地去想一些更好的解题方法。

本书可作为高等数学的教学参考书，对报考硕士研究生以及准备参加数学竞赛的数学爱好者，本书更有参考价值。

本书的第一章、第二章、第七章由毛怀遂编写；第三章和第八章由邱双亮编写，第四章、第五章、第六章由武忠祥编写，第九章、第十章由龚冬保编写，最后由龚冬保统稿。写这样的书，对我们来说也是个尝试，希望对读者有所启发，但限于作者的水平，本书难免有疏漏与不足之处，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢陆庆乐教授，他仔细地审校了全书，并提出了许多宝贵的意见，感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编　者

目 录

第一章　函数 极限 连续

一、 函数及其性质

1.1　试求下列函数的定义域

1)　$f(x)=\lg(1-\lg x)$；　　2)　$f(x)=\arccos\frac{x}{[x]}$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

解 1)　要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$x>0 \quad 且 \quad 1-\lg x>0,$$

即

$$0<x<10,$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,10)$

2)　要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1 \quad 且 \quad [x]\neq 0,$$

而

$$x-1<[x]\leqslant x$$

当 $x<0$ 时　　$0<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，　　$\frac{x}{[x]}$ 无意义；

当 $x\geqslant 1$ 时，　　$1\leqslant\frac{x}{[x]}$.

最后一个不等式的等号仅当 $x\in N$ 时成立，故 $f(x)$ 定义域为 $\{x|x<0$ 或 $x=1,2,3,\cdots\}$

对应法则和定义域是函数的两个基本要素. 应当养成这样的习惯：遇到函数就要注意它的定义域.

1.2　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解　由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，得

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

故

$$a\leqslant x\leqslant 1-a.$$

这些不等式由构成复合函数的原则得到

从而当 $a=1-a$ 即 $a=1/2$ 时，函数仅在 $x=1/2$ 一点有定义；当 $0<a<1/2$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>1/2$ 时无解. 即定义域为空集.

1.3 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 为了求 $f(x-2)$，先求 $f(x)$，我们先给出求 $f(x)$ 的两种方法：

1) $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$，

所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$

2) 令 $x=t-2$，代入得
$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2,$$
所以
$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$
$$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2$$
$$=2^{x^2-4x}-x+4$$

本题主要讨论对应法则，且以复合函数为主.

配方法

变量代换法

1.4 设
$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -e^x, & x<0.\end{cases}\qquad \varphi(x)=\ln x.$$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\varphi^2(x), & \varphi(x)\geqslant 0,\\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<0.\end{cases}$$
即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1,\\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$$
从上式可看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0)$，$\varphi(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，它们无公共的部分，所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

两个函数是否可以构成复合函数，要根据复合函数的法则分别考查这两个函数的定义域及值域.

复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

1.5 设
$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$
求 1) $\varphi[\varphi(x)]$； 2) $\varphi[\psi(x)]$

解 1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，
$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

2) 因为
$$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, |\psi(x)|\leqslant 1,\\ 0, |\psi(x)|>1\end{cases}$$
而仅当 $|x|=1$ 时，$\psi(x)=1$；

$|x|\neq 1$ 时，$1<\psi(x)\leqslant 2$

复合函数类似“代入”. 但要注意定义域的变化. 复合后最好写下复合函数的定义域.

故 $$\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & |x| = 1 \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$$

易知 $\varphi[\psi(x)]$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

1.6 试说明 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$ 是一个初等函数.

解 因为 $$f(x) = 1 - |x - 1| = 1 - \sqrt{(x-1)^2}, \quad x \in [0,2].$$

所以由初等函数的定义知 $f(x)$ 是一个初等函数.

本题说明分段函数也有可能是初等函数.

1.7 求 c 值,使
$$(b + c)\sin(b + c) - (a + c)\sin(a + c) = 0,$$
这里 $b > a$,均为常数.

解 令 $f(x) = x\sin x$,
则 $f(x)$ 是一个偶函数,依题意即求 c 使
$$f(b + c) = f(a + c)$$
成立. $a \neq b$,
所以 $$a + c = -(b + c),$$
$$c = -\frac{1}{2}(a + b)$$

此解法巧妙地运用了函数的奇偶性,使问题得以解决. 若是用解方程的方法那将是困难的. 读者不妨一试.

1.8 求下列函数的反函数

1) $$y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x};$$

2) $$y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3^x, & x > 2. \end{cases}$$

解 1) 所给函数的定义域及值域分别是 $[-\sqrt{2}/2, 1]$, $[0, \sqrt{3\pi}]$. 由 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 解得
$$x = \sin\frac{1}{4}(y^2 - \pi),$$
故 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 的反函数为
$$y = \sin\frac{1}{4}(x^2 - \pi), \quad x \in [0, \sqrt{3\pi}].$$

注意反函数存在的条件.

注意定义域的范围.

2) 当 $x < 1$ 时, $y = x$,
故反函数为
$$y = x, \quad x \in (-\infty, 1)$$
当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时, $y = x^3$,
故反函数为
$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x \in [1, 8].$$

利用几何图形看反函数及其定义域更为清楚,建议读者作出 $y = f(x)$ 的图形.

当 $x>2$ 时，$y=3^x$，
故反函数为

$$y=\log_3 x, \qquad x\in(9,+\infty).$$

综上所述，所求的反函数为

$$y=\begin{cases} x, & x<1, \\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8, \\ \log_3 x, & x>9. \end{cases}$$

1.9 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

把系数及一部分系数和视为函数在特殊点的值，比用二项式系数法好.

解 设
$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8 = (2x-1)^8,$$
则
$$f(0)=a_0=1,$$
$$f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1.$$
比较原等式两边 x^8 的系数得 $a_8=2^8$.
故
$$a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8 =-256$$

1.10 设 $f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$. 试求 $f_n(x)$ 的解析表达式.

先一步一步复合，从特殊中归纳出一般规律，再用数学归纳法证明.

解
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} =\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$
$$f_2(x)=f[f_1(x)] =\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$
一般地，可用数学归纳法证明
$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)] =\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

1.11 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有
$$f(x+c)=-f(x),$$

证明函数是周期函数的关键是要

所以对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned} f(x+2c) &= f[(x+c)+c] \\ &= -f(x+c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

找到不为零的常数 T. 这里 $T=2c$.

1.12 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数，且 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. 证明 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$

证 因为 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加，所以对任何 x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，$x_2 > x_1$，有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad g(x_1) \leqslant g(x_2),$$
$$h(x_1) \leqslant h(x_2).$$

又对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

所以 $f[f(x)] \leqslant f[g(x)] \leqslant g[g(x)]$,

$g[g(x)] \leqslant g[h(x)] \leqslant h[h(x)]$,

即 $f[f(x)] \leqslant g[g(x)] \leqslant h[h(x)]$.

注意复合函数的单调性.

1.13 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 x、$y \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证 任取 x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且 $x_2 > x_1$，那么由题给条件有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1,$$

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$,

所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$,

从而 $F(x_1) < F(x_2)$，故 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

这类题一般要从定义出发去解. $\pm[f(x_1) - f(x_2)] \leqslant |f(x_2) - f(x_1)|$. 我们取其对证明结论有用的一个.

二、 数列的极限

1.14 直接用极限定义证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-6n}{3+2n} = -3$$

证 $\left|\dfrac{1-6n}{3+2n} + 3\right| = \dfrac{10}{3+2n} < \dfrac{5}{n}$

所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N = [5/\varepsilon]$，当 $n > N$ 时，必有

$$\left|\frac{1-6n}{3+2n} + 3\right| < \varepsilon,$$

用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$（有限）主要是适当放大 $|f(n) - a|$，以求得到关于 n 的较为简单的表达式，这是解题的关键所

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3.$

在.

1.15 求下列极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}\quad (a>1)$； 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}\quad (a>1,k\in N)$

利用数列的递推关系及单调有界必有极限这一准则往往可以解决有阶乘或乘方形式的数列极限问题.

解 1) 令 $x_n=\frac{n}{a^n}$，则

$$x_{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{a}x_n.$$

由于 $a>1,(n+1)/n\to 1(n\to\infty)$. 所以 n 充分大后 $(n+1)/na<1$. 即 $\{x_n\}$ 从某项后单减但 $x_n>0(n=1,2,3\cdots)$，故 $\{x_n\}$ 有下界，从而 $\{x_n\}$ 收敛. 由极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_{n+1}&=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\\&=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}x_n\end{aligned}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

2) 用与上题相同的做法，我们可以求得此题的极限为零. 现在我们换一种做法.

由此可见：熟练地运用极限的运算法则及多知道一些极限的值可简化求另一些极限的步骤.

$$a>1,$$
$$\sqrt[k]{a}>1,$$

故 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right]^k\\&=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right]^k\\&=0\end{aligned}$$

1.16 证明

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$； 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

参见1.15题，这里我们一环扣一环地证明问题. 使各问题密切联系，因而求解过程更简捷.

证 1) 因为当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n/a^n=0$，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$，因而存在 N，当 $n>N$，必有 $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$，

即 $$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon.$$

而 $$\sqrt[n]{n}\geqslant 1\qquad (n,1,2,\cdots),$$

所以当 $n>N$ 时，必有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

2) 若 $a=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

若 $a>1$，则

$$1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n} \qquad (n>[a]+1).$$

由夹逼定理及 1) 的结果知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

若 $0<a<1$，则 $b=1/a>1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=1$$

1.17 设 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

连乘式首先要变形，约去公因子，化简后再求极限.

解 $x_n=\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

1.18 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

有理化分子也是求极限的好方法.

解
$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

1.19 设 $x_n=\dfrac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分子、分母均是等比数列的部分和. 先利用求和公式求出各自的和，然后再求极限.

解
$$x_n=\frac{2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}}{\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3}\times\frac{1-1/3^n}{1-1/3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\times\frac{1-1/5^n}{1-1/5}\right)}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=10$$

1.20 设 $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

这种分解法非常有用，它有利于求出有限和式的简

解 $\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

单表达式.

1.21 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

而 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,

所以 $x_n=1+\dfrac{2}{2\times 3}+\dfrac{2}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2-\frac{2}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

注意和式中每项的分母是等差数列的部分和. 先由求和公式得结果，然后再进行分解，达到化简目的.

1.22 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(n!)\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)\dfrac{3n^2+1}{n^2-1}\right]$

解 $|\operatorname{arctg}(n!)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(n!)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=0$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}+3,$$

故 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2\operatorname{arctg}(n!)]$

$$-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}$$
$$=-3$$

有界.

求出和的一般形式.

注意极限运算法则的正确应用.

1.23 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots+n]$

解 1 $\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots+n]$

化成 n 个等差数列的和.

也可这样求和：

$(2n-1)+2(2n-3)$

$$= \frac{1}{n^3}[(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+1$$
$$+(2n-3)+(2n-5)+\cdots+1$$
$$+(2n-5)+\cdots+1]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+1]$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{(2n-1)+1}{2}n+\frac{(2n-3)+1}{2}(n-1)+\cdots+1\right]$$
$$= \frac{1}{n^3}[n^2+(n-1)^2+\cdots+1]$$
$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}$

$+\cdots+n$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot(2n-2k+1)$
$= (2n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}k - 2\sum\limits_{k=1}^{n}k^2 = (2n+1)\times\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

解 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+\cdots+n]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[n^2+(n-1)^2+\cdots+1]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$
$$= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}$$

化成积分和的极限形式，再根据定积分的定义化为定积分，从而求出极限.

1.24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$

解 $\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^6+kn}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}} \quad (n=1,2,\cdots n),$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}.$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}} = \dfrac{1}{3},$

故 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} = \dfrac{1}{3}.$

对于这种和式的极限，我们不易求出它的有限项和式的一般形式. 这时可考虑用夹逼定理来做.

1.25 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}.$

解 $1 \leqslant \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n}.$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$$

1.26 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$(这里 $a_1,a_2\cdots,a_k$ 都是大于零的常数,k 是自然数)

解 记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots a_k\}$,

所以 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a$

$=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

1.27 设 $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 对每一个 k:$0\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{1+k}{n}}}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{1+k}{n}},$$

即 $$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}\,\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\leqslant x_n\leqslant\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\,\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

注意利用等比数列求和公式.

参见 1.33 之 1).

但 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)(1-e^{\frac{1}{n}})=-1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}n(1-e^{\frac{1}{n}})=-1,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e-1.$

1.28 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$,证明$\{x_n\}$收敛.

用单调有界数列必收敛证明$\{x_n\}$收敛.

遇到和式用考察相邻两项之差的方法证单调.

证 1 $$x_{n+1}-x_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$
$$>0\qquad(n=1,2\cdots),$$

所以$\{x_n\}$单调增加.

又 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}=1\qquad(n=1,2,\cdots),$

所以$\{x_n\}$有上界,$\{x_n\}$收敛.

证 2 对任何自然数 n

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}<\frac{1}{4n(n+1)},$$

所以对于每个固定的 n，有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= |(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})+\cdots+(x_{n+p}-x_{n+p-1})|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|\\ &< \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{4(n+k)(n+k-1)}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)\\ &< \frac{1}{4n} \qquad (p=1,2\cdots)\end{aligned}$$

故对任意给定的 $\varepsilon<0$，取 $N=[1/4\varepsilon]$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon \qquad (p=1,2,\cdots),$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛.

用柯西收敛原理证 $\{x_n\}$ 收敛.

加一项，再减一项并利用三角不等式进行放大是数学中常用的手法.

证 3 因为对任何自然数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

所以 $\quad \ln(n+2)-\ln(n+1)<\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n,$

$$\ln(n+3)-\ln(n+2)<\frac{1}{n+2}<\ln(n+2)-\ln(n+1),$$

…………………

$$\ln(2n+1)-\ln 2n<\frac{1}{n+n}<\ln 2n-\ln(2n-1)$$

$$\ln\frac{2n+1}{n+1}<x_n<\ln 2,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\ln 2$$

用夹逼准则证明 $\{x_n\}$ 收敛. 同时得到极限值.

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减均以 e 为极限，故不等式(1)成立.

证 4

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}\\ &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

用定积分定义证之. 同时求出极限.

1.29 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.