工科研究生教材

数理统计

SHU LI TONG JI

颜钰芬　徐明钧　编

上海交通大学出版社

数 理 统 计

颜钰芬 徐明钧 编

上海交通大学出版社

(沪)新登字205号

内 容 提 要

本书是根据国家教委工科研究生数学课程教学指导委员会制定的工学硕士研究生应用统计课程教学基本要求编写的. 本书主要内容有参数估计,假设检验,线性统计推断(包括回归分析、方差分析)及正交试验设计. 本书着重讲清概念、原理与方法. 除第5章外均配有适量的例题与习题便于教学与自学.

本书可作为高等院校工科研究生或高年级本科生的教材,也可供科技工作者、工程技术人员及自学者参考.

数 理 统 计

出版:上海交通大学出版社
(上海市华山路1954号·200030)
发行:新华书店上海发行所
印刷:上虞科技外文印刷厂
开本:850×1168(毫米)1/32
印张:9.875
字数:252000
版次:1992年12月 第1版
印次:1992年12月 第1次
印数:1-2300
科目:282-311

ISBN 7-313-01114-8/O.212 定价:3.10元

前　　言

数理统计是从数量上认识与研究随机现象的一门学科。它根据样本提供的信息，运用概率论知识，通过数据加工与数学推理，对随机变量的分布或分布参数作出推断或估计。因此随着国民经济与科学技术的发展，数理统计的内容与方法得到了日益广泛的发展与应用。现今在工农业、第三产业及理化、生物工程等许多领域中都有数理统计的用武之地。鉴于此，大部分工科研究生都须选修数理统计课程，以适应今后学习与工作的需要。

本书是编者在1985年撰写的讲义的基础上，通过多年教学实践作了多次修订写成的，这次出版前又根据国家教委工科研究生数学课程教学指导委员会制定的“工学硕士研究生应用统计课程教学基本要求”作了重大修改。本书主要内容有：参数估计、假设检验，线性统计推断和正交试验设计。

我们在编写中，着重讲清数理统计概念、原理与方法，使学生学习后能将统计方法熟练地应用到实际问题中去。考虑到工科研究生的特点，增加了应用方面的实例，删去了一些较长的理论证明，代之以直观说明。对学生分析问题与解决问题的能力培养上，教材中也有所反映。

本书可供高等院校工科研究生或高年级本科生作教材，也可供科技工作者、工程技术人员阅读参考。

本书由范伟民教授主审，在审阅过程中他提出了许多宝贵意见，在此谨向他表示深切的感谢。

限于编者的学识水平，书中错误与不妥之处在所难免，尚望读者指正。

编　　者

1992.7.

目　录

第1章 统计量及其分布

在研究具有随机性的实际问题时，面临的首要任务是：了解随机变量的概率分布或其参数，为此首先要安排适当的试验，以便更合理、有效地获得观察数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，这一环节称之为**试验设计**；其次根据已获得的有限个观察数据，探讨怎样有效地利用它们，对所关心的问题作出尽可能精确、可靠的结论，这一环节称之为**统计推断**.

数理统计正是解决这类问题的一门具有广泛应用的数学分支，它运用概率论的基本知识，研究如何有效地获得数据和整理分析数据，从而对研究对象的统计规律作出合理的估计或判断. 本书将主要讨论统计推断.

数理统计提供了一种作判断的工具，利用它可以解决包含不确定性的实际问题，因而被国防、工农业、教育、卫生等各部门的工作者所广泛采用，它也为科研工作者提供了发现某些事物数量规律的方法并在各部门的工作中起直接的推动作用.

§1.1 基本概念

1. 总体 个体 简单随机样本

在数理统计中，把研究对象的全体组成的集合称为**总体**，把组成总体的每个元素(单元)称为**个体**. 例如：在研究某批灯泡的质量时，该批灯泡的全体组成一个总体，其中每个灯泡就是个体.

在实际问题中，所感兴趣的往往不是研究对象本身，而是研究对象的某些数量指标. 例如对于灯泡总体，如果仅以使用寿命为衡量质量的指标，那么要关心的并不是灯泡的种种特性，而仅仅是

其使用寿命，由于使用寿命的取值具有随机性，因而它是一个随机变量，对此使用寿命的可能值及其分布完全反映了这批灯泡的质量情况。因此，在仅对研究对象的某项数量指标感兴趣时，就把该数量指标的取值全体组成的集合称为**总体**，记作 ξ，并把该数量指标的分布称为**总体 ξ 的分布**。若对于研究对象感兴趣的数量指标不止一个，而是 k 个，则此时总体 ξ 可理解为 k 维随机向量，并称之为 **k 维总体**。今后除特别声明外，ξ 都是 $k=1$ 的总体。

为了解指标的统计规律，需要从总体 ξ 中抽取部分个体，并测量其指标值，把从总体中抽取部分个体，并进行测量的过程称为**抽样**；把测量到的指标值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为**样本观察值**，其中 x_i 表示第 i 个测量到的指标值；把抽取的个体数 n 称为**样本容量**。虽然在抽样后 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是完全确定的一个数组，但在抽样前每个 x_i 可以是 ξ 的可能值中任一个，因此表示抽样结果的应是一个 n 维随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，称之为容量为 **$n$ 的样本**，样本 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的所有可能取值组成的集合称之为**样本空间**，记作 $\mathscr{X}$，它或是 n 维空间，或是 n 维空间的子集。样本观察值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是样本的一次实现、是样本空间 $\mathscr{X}$ 中的一个点，即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathscr{X}$，因而有时也称之为**样本点**。

从总体中取得样本的方法有许多种。简单随机抽样方法是常用的一种，其得到的样本具有以下性质：①代表性——总体中每一个体以同等机会被选入样本，即样本中每个分量 ξ_i 与总体 ξ 具有相同的分布；②独立性——样本中每一分量的观察结果既不影响其它观察结果，也不受其它分量的观察结果的影响，即样本的分量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是相互独立的随机变量。

定义 1.1.1 设 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是来自总体 ξ 的样本，若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 与 ξ 同分布，且相互独立，则称 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是来自总体 ξ 的**简单随机样本**，简称**简单样本**或**样本**。

注意：①样本的观察值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个确定的数组，但有时也将 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成 n 维随机向量，这只需看上下文的叙

述即可知道；②并不是所有的样本都可看成简单随机样本的，但在本书中，如无特别说明，所提到的样本均是简单随机样本。

例 1.1.1 设某批产品共有 N 个，其中有 M 个次品，令$\{\xi=1\}$表示“产品是次品”，$\{\xi=0\}$表示“产品是正品”，于是

$$P\{\xi=1\}=\frac{M}{N}\triangleq p$$

称之为**次品率**. 对于待检验的该批产品来说，其次品率 p 是未知的，为了解 p，在该批产品中抽取 $n(<N)$个进行检验，得到一个来自总体

$$\xi\sim f_\xi(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1,$$

容量为 n 的样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，对应的样本空间为

$$\mathscr{X}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i=0\text{ 或 }1,i=1\sim n\}.$$

若抽样是有返回的（即对每个抽得的个体，在记录指标值后、下次抽取前放回总体），则得到的样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是简单随机样本，其联合分布为

$$\prod_{i=1}^n f_\xi(x_i;p)=p^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^n x_i}.$$

若抽样是无返回的（即抽得的每一个体不再放回总体），则第一次抽得的结果将影响第二次抽得的结果，例如：在第一次抽到次品的条件下，第二次抽到次品的条件概率为

$$P\{\xi_2=1|_{\xi_1=1}\}=\frac{M-1}{N-1}=\frac{Np-1}{N-1},$$

而在第一次抽到正品的条件下，第二次抽到次品的条件概率为

$$P\{\xi_2=1|_{\xi_1=0}\}=\frac{M}{N-1}=\frac{Np}{N-1}.$$

由此可见，无返回抽样所得的样本不是简单随机样本，但是当 N很大时，以上两个概率都近似等于 p，因而在 N 很大、n 较小（通常要求 $n<0.1N$）时，可把无返回抽样得到的样本近似看成是简单随

机样本。

2. 经验分布函数　样本数字特征

(1) 经验分布函数　设总体 ξ 的分布函数 $F(x)$ 是未知的，如何利用样本观察值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来了解 $F(x)$ 呢？由于 $F(x)$ 是事件 $\{\xi\leqslant x\}$ 发生的概率（即 $F(x)=P\{\xi\leqslant x\}$），且由大数定律知道"在一定条件下，事件的频率依概率收敛于事件的概率"，因此，很自然地想到用事件 $\{\xi\leqslant x\}$ 的频率 $f_n\{\xi\leqslant x\}$ 来了解 $F(x)$。

定义 1.1.2　设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是总体 ξ 的一个简单随机样本观察值，将其按从小到大排列为

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}.$$

其中 $x_{(1)}=\min(x_1,\cdots,x_n)$，$x_{(n)}=\max(x_1,\cdots,x_n)$，$x_{(i)}$ 是样本观察值中第 i 个小的值，则称函数

$$F_n(x)=f_n(\xi\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)},k=1\sim(n-1)\\ 1, & x_{(n)}\leqslant x\end{cases}$$

为总体 ξ 的**经验分布函数**（或**样本分布函数**）。

由定义可知，对于给定的样本观察值，$F_n(x)$ 是 x 的单调、非降、右连续函数，且 $0\leqslant F_n(x)\leqslant 1$，即 $F_n(x)$ 具备分布函数的性质；对于每一个固定的 x，$F_n(x)$ 是由观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 确定的，故它是样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的函数。

定理 1.1.1　设 $F(x)$ 是总体 ξ 的分布函数，若 $F_n(x)$ 是总体 ξ 的经验分布函数，则对于任一给定的 $x\in R$，

$$P\left\{F_n(x)=\frac{k}{n}\right\}=\binom{n}{k}[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k},$$

$$k=0\sim n.$$

证　对任一给定的 $x\in R$，$F_n(x)$ 是一个随机变量，利用事件 $\{\xi\in(-\infty,x]\}$ 的示性函数

$$I_{(-\infty,x]}(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in(-\infty,x],\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

可以将经验分布函数表示为

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{(-\infty,x]}(\xi_j),$$

由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的同分布及相互独立性可知：对任意 $1\leqslant j\leqslant n$，$I_{(-\infty,x]}(\xi_j)\sim B(1,F(x))$，且它们相互独立，于是 $\sum\limits_{j=1}^{n}I_{(-\infty,x]}(\xi_j)\sim B(n,F(x))$（此处 $B(n,p)$ 表示参数为 n，p 的二项分布），因而

$$P\left\{F_n(x)=\frac{k}{n}\right\}=P\left\{\sum_{j=1}^{n}I_{(-\infty,x]}(\xi_j)=k\right\}$$

$$=\binom{n}{k}[F(x)]^k[1-F(x)]^{n-k},\quad k=0\sim n.$$

推论 1 $$E[F_n(x)]=F(x);$$

$$D[F_n(x)]=\frac{1}{n}F(x)\cdot[1-F(x)].$$

由中心极限定理可得：

推论 2 $$\frac{\sqrt{n}[F_n(x)-F(x)]}{\sqrt{F(x)[1-F(x)]}}\stackrel{.}{\sim}N(0,1).$$

其中“$\stackrel{.}{\sim}$”表示“渐近地服从”。

根据伯努里(Bernoulli)大数定律可知：对任意正数 ε，有关系式

$$\lim_{n\to\infty}P\{|F_n(x)-F(x)|\geqslant\varepsilon\}=0. \tag{1.1.1}$$

若在 xOy 平面上分别作出函数 $y=F(x)$ 及 $y=F_n(x)$ 的图形 C 及 C_n，则式(1.1.1)的含义是：对任意给定的正数 ε，在横坐标为任意指定值 x 处，只要 n 足够大，C_n 上点的纵坐标与 C 上点的纵坐标的差不小于 ε 的概率能小于任意给定的正数（限制值 n 可能与 x 取值有关）。下面不加证明地介绍一个刻划 $F_n(x)$ 与 $F(x)$ 之间更

紧密联系的定理。

格利汶科(W Glivenko)定理 设 $F(x)$、$F_n(x)$分别为总体ξ的分布函数、经验分布函数，令 $D_n=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|$，则

$$P\{\lim_{n\to\infty}D_n=0\}=1。\qquad(1.1.2)$$

由随机变量 D_n 的定义知，它可以用来衡量 $F_n(x)$同 $F(x)$之间在所有的 x 值上最大的差异程度，格利汶科定理表明 D_n 以概率 1 收敛于零，通俗地说，当 n 足够大时，“对于所有的x值，$F_n(x)$同 $F(x)$之差的绝对值都很小。”这件事发生的概率接近于 1，也就是说，当 n 相当大时，经验分布函数 $F_n(x)$是总体分布函数 $F(x)$的一个良好的近似。

(2) 样本数字特征 由经验分布函数确定的数字特征称之为**样本数字特征**。具体地讲，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是总体 ξ 的样本观察值，$F_n(x)$是对应的经验分布函数，令

$$m_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k.$$

称 m_k 为**样本 k 阶原点矩**。$k=1,2,\cdots$。特别地，把 m_1 称为**样本均值**，记作 $\bar{x}$，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

令

$$m_k'=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^k\mathrm{d}F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k.$$

称 m_k' 为**样本 k 阶中心矩**，$k=2,3,\cdots$。通常把$\dfrac{n}{n-1}m_2'$称为**样本方差**，记作 s^2，即

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

对于给定的样本观察值，$m_k,\bar{x},m_k',s^2$ 是完全确定的数，但对

应于各次抽样，它们的取值具有随机性，因此作为刻划抽样结果的数字特征应是由样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$确定的下列随机变量：

$$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k;$$

$$\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i;$$

$$M_k'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^k;$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2.$$

它们的观察值分别为 $m_k,\overline{x},m_k',s^2$，通常仍将这些随机变量依次称为**样本 k 阶原点矩，样本均值，样本 k 阶中心矩，样本方差。**

由格利汶科定理知道经验分布函数 $F_n(x)$以概率 1 收敛于总体分布函数$F(x)$，那么由样本确定的样本原点矩 M_k 与相应的总体原点矩 $E\xi^k$ 有何联系？可以证明，只要总体的 r 阶矩存在，那么对于任意 $1\leqslant k\leqslant r$，样本的 k 阶原点矩依概率收敛于总体的 k阶原点矩，即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k-E\xi^k\right|>\varepsilon\right)=0.$$

因此样本矩是了解总体矩的有力工具．特别地，样本均值$\overline{\xi}$具有更良好的性质．

定理 1.1.2 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是总体 ξ 的样本，且 $E\xi^2<+\infty$，记 $E\xi=\mu,D\xi=\sigma^2$，则

$$E\overline{\xi}=\mu,\quad D\overline{\xi}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

（证明留作习题）．

例 1.1.2 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是总体 ξ 的样本，试证：

(1) 若 $D\xi=\sigma^2$，　则 $ES^2=\sigma^2$；

(2) 若 $E(\xi-E\xi)^3=\mu_3$，　则 $\operatorname{cov}(\overline{\xi},S^2)=\dfrac{\mu_3}{n}$.

证　(1) 对于任意常数 C 有恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-C)^2-n(\overline{\xi}-C)^2,$$

取 $C=\mu=E\xi$，便有

$$ES^2=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2-n(\overline{\xi}-\mu)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2-n\cdot\sigma^2/n)=\sigma^2.$$

(2) 对样本作变换 $\eta_i=\xi_i-\mu,i=1\sim n$，于是 $\overline{\eta}=\overline{\xi}-\mu,S_\eta^2=S_\xi^2,E\eta_i=E\overline{\eta}=0,E\eta_i^3=E(\xi_i-\mu)^3=\mu_3,i=1\sim n$，且

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\overline{\xi},S_\xi^2)&=\operatorname{cov}(\overline{\eta},S_\eta^2)\\
&=E(\overline{\eta}\cdot S_\eta^2)\\
&=\frac{1}{n(n-1)}E\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2-n\overline{\eta}^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{n(n-1)}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3+\sum_{i\neq j}\sum\eta_i\eta_j^2\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^3+3\sum_{i\neq j}\sum\eta_i\eta_j^2+\sum_{i\neq j\neq k}\sum\sum\eta_i\eta_j\eta_k\right]\right\}\\
&=\frac{\mu_3}{n}
\end{aligned}$$

对于二维总体(ξ,η)，除了 $E\xi^k$，$E\eta^k$，$E(\xi-E\xi)^k$，$E(\eta-E\eta)^k$，$k=1,2,\cdots\cdots$等原点矩、中心矩外，还有 ξ，η 的协方差 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$等混合矩，于是二维总体的样本矩也有类似的定义。

设$(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$为二维总体$(\xi,\eta)$的样本，记

$$\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad \overline{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i,\quad S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2,$$

$$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\overline{\eta})^2,$$

分别称

$$S_{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})(\eta_i-\overline{\eta}),$$

$$R=\frac{S_{12}}{S_1S_2}$$

为样本$(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$的协方差、相关系数。

通过经验分布函数、样本数字特征的引入，可发现虽然样本是总体的代表和反映，但在取得样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$之后，还不能直接利用它们来了解总体的各种特征（如总体的分布函数、数字特征等），而需要对样本进行一番"加工"、"浓缩"，使样本所包含的我们所关心的事物的信息集中起来，这便是针对不同的要求构造样本的各种函数。显然，这种函数是随机变量。为了作统计推断，要求它们不含任何未知参数，在统计学中称其为统计量。

3. 统计量

定义 1.1.3 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是总体ξ的样本，T为定义在样本空间$\mathscr{X}$上的实值（或向量值）函数。若$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是不含任何未知参数的随机变量（或向量），则称$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为**统计量**。

由统计量的定义可知经验分布函数$F_n(x)$，样本数字特征M_k,M_k'都是重要的统计量。这些统计量都将n维随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$"加工"为一维随机变量$F_n(x),M_k$及$M_k'$。

又例如，设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是总体$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$（其中$\mu$未知、$\sigma^2$已知）的样本，则

$$T_1=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2$$

是统计量，而

$$T_2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$$

不是统计量。

下面再介绍几个常用的统计量。

定义 1.1.4 对于样本$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的任一组观察值$x_1,x_2,\cdots x_n$，将其按从小到大的次序排列为

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}.$$

把以$x_{(k)}$为观察值的统计量称为**样本第 k 个顺序统计量**，记作$\xi_{(k)}$，$k=1\sim n$，它们之间显然有如下关系：

$$\xi_{(1)}\leqslant\xi_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{(n)}.$$

特别地，把 $\xi_{(1)}=\min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为**最小顺序统计量**；$\xi_{(n)}=\max(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$称为**最大顺序统计量**；当$n$为奇数时，称$\xi_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$为**样本中值**；当 n 为偶数时，称 $\xi_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ 为**样本中值**。

定义 1.1.5 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是总体 ξ 的样本，称统计量

$$D_{(n)}=\xi_{(n)}-\xi_{(1)}$$

为**样本极差**。

样本极差反映了样本观察值的波动幅度，因而它与样本方差一样是反映观察值离散程度的数量指标，其优点是计算很简便。

§1.2 抽 样 分 布

统计量是对总体ξ的统计规律作估计或推断的基础，若要进一步了解所作估计的精度或推断的可靠性，就需要了解有关统计量的分布，因此求统计量$T=T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布是数理统计的基本内容。通常称统计量的分布为**抽样分布**，它将在以后各章中起重要作用。

对于任意指定的自然数 n，统计量 $T=T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分

布称之为统计量 T 的**精确分布**，当统计量 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的精确分布不易求出或其表达式非常复杂而难于应用时，通常就研究当 $n\to\infty$ 时统计量 T 的极限分布，这两类分布分别适用于数理统计中的小样本问题（n 较小时的统计问题）、大样本问题（n 较大时的统计问题）。研究大样本问题的基础是概率论中的中心极限定理，它为非正态总体的大样本问题的解决提供了有力的工具。

在许多统计研究中经常遇到正态总体，而对非正态总体它的分布往往可用正态分布来近似，因此对正态总体的研究就显得特别重要。关于其统计量的精确分布已得到较全面的研究及应用。本节将介绍其基本内容。

1．预备知识——特征函数

特征函数是求统计量分布或数字特征的一个重要工具。

设 ξ 的分布函数为 $F_\xi(x)$，称

$$\varphi_\xi(t)\overset{\triangle}{=}Ee^{j\xi t}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jxt}dF_\xi(x),\quad -\infty<t<+\infty$$

为 ξ 的**特征函数**，其中 $j^2=-1$。

当 ξ 有密度函数 $f_\xi(x)$ 时，

$$\varphi_\xi(t)=Ee^{j\xi t}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jxt}f_\xi(x)dx$$

就是 $f_\xi(x)$ 的傅里叶(Fourier)变换。

当 ξ 为离散型随机变量．且分布列为

$$f_\xi(x_i)=P(\xi=x_i),\quad i=1,2,\cdots$$

时，

$$\varphi_\xi(t)=Ee^{j\xi t}=\sum_{i=1}^{\infty}e^{jx_it}f_\xi(x_i).$$

特征函数的性质：

(1) 设 $\varphi_\xi(t)$ 是 ξ 的特征函数，$\eta=a\xi+c$，其中 a、c 为常数，则

$$\varphi_\eta(t)=e^{jct}\varphi_\xi(at).$$

事实上，