W 伊文等著

层状介质中的弹性波

科学出版社

W. M. Ewing, W. S. Jardetzky and F. Press

ELASTIC WAVES IN LAYERED MEDIA

Lamont Geological Observatory Contribution No. 189

McGraw-Hill

New York, Toronto, London

1957

內 容 簡 介

本书是一本基础理論讀物，它用了較多的数学演算，推导和計算了层状介质中彈性波的傳播情况.

全书共分七章. 第一章为基本方程式的建立及其解答；第二章为半空間，这一章中叙述了平面波在自由表面上的反射及折射，瑞雷波的傳播及Lamb問題等；第三章为两个半无限介质的接触問題；第四章层状半空間，这是本书討論的重点，詳細地討論了层状介质为各种情况下彈性波傳播的特点，书中不但討論了固体介质情况，也討論了，固体-液体，液体-液体等情况. 第五章为重力、曲率和粘滞性的影响；第六章为板与圓柱，其中包括板与圓柱在眞空中与流体中的振动，无限介质中的柱形空穴，彈性介质中的流体柱以及管柱振动等內容；第七章为变速介质中波的傳播. 书后两个附录用簡练的文字討論了最速下降法和 Rayleigh 原理問題.

本书附有大量的参考文献和图表，該书不但对地球物理工作者是一本好的参考书，对彈性动力学、結构抗震等学科的研究人員及实际工作者都有参考价値.

层状介质中的弹性波

〔美〕W. 伊文等 著

刘 光 鼎 译

王 耀 文 校

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門內大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

上海新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1966年2月第一版 开本：850×1168 1/32

1966年2月第一次印刷 印張：12 3/4

印数：0001—1,500 字数：336,000

統一书号：13031·2230

本社书号：3385·13—15

定价：[科六] 1.90 元

序 言*

本书是哥倫比亚大学拉蒙特地质研究所 (Lamont Geological Observatory) 有关小組对于天然地震学、水下声学和模型地震学作出的統一研究总結計划的成果. 以后本书范圍扩大到涉及一些特殊选擇的有关問題. 层状介质中波傳播理論的方法与結果, 在地震学、地球物理勘探以及声学与电磁学的許多問題中都是重要的.

虽然电磁波、水波和激震波的数学討論都很接近于本书中所应用的方法, 但我們将它們压縮成一些簡单的引証. 地震学問題中所使用的許多方法都是来自电磁波的研究并在此基础上发展起来的. 現在希望彈性波傳播問題的系統总結能对其它領域有所裨益.

实驗观点在很大程度上左右着各种問題的选擇. 多年来, 地震学的研究表現出实驗方法与理論方法脫离的特点. 而这两种方法的相互关联却指导着我們的研究計划, 本书是这个研究計划的結果, 并且无論何时, 只要有可能, 我們就都保持这种观点. 爆炸和天然地震的面波、冰中的弯曲波以及声道中声音傳播的观測就是理論研究与实际研究互相取长补短的論題的一些实例.

对于所討論的主要課題, 力图广泛和系統地編輯出一套世界文献目录. 在这个領域内, 很少几个工作者可以熟悉过去分散在許多杂志中的所有研究文献.

W. M. 伊文
W. S. 賈戴茨基
F. 普瑞斯

* 本书中插图均按原书制版——譯者注.

符 号 表

C_R 瑞雷波速度

c 相速度

E 楊氏模量

$e_{xx}, e_{xy}, \cdots, e_{zz}$ 应变分量

e 出射角

f 万有引力常数

$\mathfrak{f}$ 切变波入射角

$H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ n 阶汉克尔函数

I_n n 阶第一类型貝塞尔函数模

i 入射角

J_n n 阶貝塞尔函数

k 波数

k 不可压縮系数

$\mathscr{K}_n$ n 阶第二类型貝塞尔函数模

l_0, l 波长

$p_{xx}, p_{xy}, \cdots, p_{zz}$ 应力分量

$\mathfrak{P}$ 主値(积分的)

p 流体力学的压力

q, w 柱坐标的位移分量

$\vec{S}(u, v, w)$ 位移

T 周期

U 群速度

$\vec{V}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 速度

X, Y, Z 分力

α 脹縮波速度

β 切变波速度

γ 直徑

ϵ 相位移

θ 体膨脹角

θ_{cr} 临界角

$\varkappa$ Rayleigh 函数参量的根

λ, μ 拉美常数

ρ 密度

σ 角的泊松比

$\varphi, \vec{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ 位的位移

$\bar{\varphi}$ 位的速度

$\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ 轉动

ω 角頻率

目　录

序言……………………………………………………………iii
符号表…………………………………………………………iv
第一章　基本方程式与解答……………………………………1
§1.1　运动方程式……………………………………………1
　　連續性方程式……………………………………………5
§1.2　彈性介质………………………………………………6
　　各向同性的彈性固体……………………………………6
　　理想流体…………………………………………………7
§1.3　非完全彈性介质………………………………………7
§1.4　边界条件………………………………………………8
§1.5　波动方程式的推导……………………………………8
§1.6　波动方程式的解答……………………………………11
　　平面波……………………………………………………12
　　球面波……………………………………………………13
　　泊松和 Kirchhoff 的解答………………………………17
　　波动方程式的通解………………………………………19
　　应用的一些特殊形式……………………………………21
第二章　均匀与各向同性的半空間……………………………23
§2.1　平面波在自由面上的反射……………………………23
　　入射的 P 波……………………………………………25
　　入射的 S 波……………………………………………27
　　反射能量的分配…………………………………………28
　　临界角的反射……………………………………………30
§2.2　自由瑞雷波……………………………………………31
§2.3　綫源的积分解答………………………………………35
　　表面震源…………………………………………………35
　　內源………………………………………………………37
§2.4　点源的积分解…………………………………………38
　　表面震源…………………………………………………39

內源 ……43
§2.5 积分解答的計算……46
閉路积分的应用 ……46
殘数 (residues) ……49
支綫积分:綫源……51
最速下降法的应用 ……61
§2.6 任意时間变化的推广……64
§2.7 其它方面的研究……68
§2.8 行进扰动……70
§2.9 Lamb 問題的实驗研究 ……72
第三章 接触中的两个半无限介质……74
§3.1 平面波在分界面上的反射和折射……74
剛性边界 ……74
一般方程式 ……76
液体-液体分界面……78
液体-固体分界面……81
固体-固体分界面……87
§3.2 超临界角入射的脉冲的反射……91
§3.3 两个半无限介质中的傳播:点源 ……94
两个液体 ……95
流体和固体半空間……107
两个固体……109
Stoneley 波 ……114
§3.4 在分界面上产生的波的进一步討論 ……116
§3.5 其它的研究 ……117
第四章 层状半空間 ……124
§4.1 n 层彈性半空間的一般方程式 ……124
§4.2 两层液体半空間 ……127
解答的討論……138
对于脉冲的推广……144
§4.3 三层液体半空間 ……153
§4.4 固体底上加液体层 ……159
固体底层中的脹縮波源……160
海洋底的瑞雷波:第一阶振型 ……169
液体层中的脹縮波源……178

漏能振型(leaking modes)……188
脉动的一些情况……190
§4.5 固体半空間上的固体层……194
瑞雷波：一般討論……194
瑞雷波横过大陆的傳播……201
地滚波(ground roll)……206
理論瑞雷波頻散曲綫……209
乐夫波：一般討論……215
横过大陆的乐夫波……221
横过海洋的乐夫波……223
Lg 波与 Rg 波……226
其它研究……229
§4.6 三层半空間……232
层状底层的海洋瑞雷波……232
乐夫波……236
§4.7 空气耦合瑞雷波……238
空气耦合地滚波……244
§4.8 关于 n 层半空間問題的討論……246
第五章 重力、曲率和粘滞性的效应……254
§5.1 一般方程式中的重力項……254
§5.2 重力对面波的影响……257
瑞雷波：不可压縮半空間……257
重力作用与固体半空間上的可压縮液体层……259
§5.3 曲率对面波的影响……263
圓柱曲率……263
圓球曲率……266
§5.4 球体的一般解答……267
重力作用可压縮的行星中波的傳播……270
§5.5 內摩擦效应……273
Voigt 固体……273
Maxwell 固体……277
地球物质中的內摩擦……279
第六章 板与圓柱……281
§6.1 眞空中的板……281
对称振动(M_1)……283
非对称振动(M_2)……285

用 P 波与 SV 波来解釋 ……287
脉冲扰源……288
其它研究……289
§ 6.2 液体中的板 ……289
对称振动……293
非对称振动……294
其它研究……294
§ 6.3 浮冰层 ……294
SH 波 ……295
SV 波与 P 波……296
Crary 波 ……301
脉冲源所产生的弯曲波……303
§ 6.4 眞空中的圓柱杆 ……309
纵向振动……309
扭轉振动与弯曲振动……313
§ 6.5 液体中的圓柱杆 ……316
§ 6.6 无限固体中的圓柱空洞 ……317
§ 6.7 彈性介质中的液体圓柱 ……319
§ 6.8 圓柱管 ……325
第七章 在变速介质中波的傳播 ……327
§ 7.1 在非均匀的各向同性介质中波的傳播 ……327
§ 7.2 在流体半空間中声音的傳播 ……330
声道(SOFAR)傳播 ……335
T 震相……341
§ 7.3 非均匀的各向同性介质中的乐夫波 ……342
非均匀半空間上的均匀层：松澤情况……343
佐籐情况……345
Jeffreys 情况……347
Meissner 的情况 ……349
§ 7.4 非均匀的各向同性介质中的瑞雷波 ……351
地幔瑞雷波……356
§ 7.5 各向异性与其它介质 ……360
附录 I 最速下降法 ……363
附录 II Rayleigh 原理 ……368
参考文献 ……372

第 一 章
基本方程式与解答

§1.1 运动方程式

我們将要討論的問題是与层状介质中彈性扰动傳播有关的問题，此层状介质中的每个层都是連續的、各向同性的，而厚度則为常数．我們开始簡述一下在彈性介质中运动的理論和推导一些运动方程式．更詳尽的討論可以在参考书（例如 Sommerfeld[57]）中找到．

变形体由于一个力系的作用而发生形状的变化时，我們說这个物体受到了形变．于是，在物体內部具有空間固定的直角坐标 (x, y, z) 的任一点 P 就移动到一个新的位置，位移的分量分别为 u, v, w．如果 Q 是一个邻近的点 $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$，它的位移分量就可以由泰勒展式給出，其形式为

$$\left.\begin{aligned} &u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\cdots,\\ &v+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z+\cdots,\\ &w+\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

对于与彈性波有联系的微小形变来說，高次項可以忽略掉．引入表达式

$$\Omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\tag{1.2}$$

以及由字母 x, y, z 和 u, v, w 分别作循环改变而得到的其它表达

式，我們可以将位移分量(1.1)式写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&u+(\Omega_y\Delta z-\Omega_z\Delta y)+(e_{xx}\Delta x+e_{xy}\Delta y+e_{xz}\Delta z),\\&v+(\Omega_z\Delta x-\Omega_x\Delta z)+(e_{yx}\Delta x+e_{yy}\Delta y+e_{yz}\Delta z),\\&w+(\Omega_x\Delta y-\Omega_y\Delta x)+(e_{zx}\Delta x+e_{zy}\Delta y+e_{zz}\Delta z).\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

这些表达式中的第一項为 P 点的位移分量．可以說明：第一个括号中的各項相当于一个体积元的純轉动，而第二个括号中的各項是与此体积元的形变式应变有联系的．因为 $e_{xy}=e_{yx}\cdots\cdots$，所以陣列

$$\left.\begin{matrix}e_{xx}&e_{xy}&e_{xz}\\e_{yx}&e_{yy}&e_{yz}\\e_{zx}&e_{zy}&e_{zz}\end{matrix}\right\}\tag{1.4}$$

表示 P 点处的对称形变張量．三个分量

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},$$

表示平行于 x, y, z 軸的簡单伸长，而其余三个表达式 e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} 为形变的切分量．可以証明，它們分别等于原始直角体积元在 xy, yz, zx 平面內的角度变化之半．在彈性理論中也可以証明，通过 P 有一組特別的正交軸，相对于这組軸形变的剪切分量等于零．这些軸是众所周知的形变(应变)主軸．相应的量 e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} 称为主伸長，它們完全确定 P 点处的形变．因此，任意点的形变可以由三个互相垂直的伸长量表明．还知道，$e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}$ 的和数与直角坐标系的选擇无关．

体积膨脹 θ 的定义为：在长度 Δx, Δy, Δz 趋近于零时，体积增加部分与起始体积之比所趋近的极限，即

$$\lim\frac{(\Delta x+e_{xx}\Delta x)(\Delta y+e_{yy}\Delta y)(\Delta z+e_{zz}\Delta z)-\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z},$$

或者，略去高次項后

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.\tag{1.5}$$

虽然在(1.5)式的推导中应用了主伸长量 e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}，但由于它們

和数的不变性这个結果对于任取的笛卡尔坐标系都是成立的.

一般說来，作用于将物体分为两小部分的面积元 ΔS 上的一些力，是和此元上的合力或曳引力 $\mathbf{R}$ 及力偶 $\mathbf{C}$ 等值的（图 1.1）．当 ΔS 趋近于零时，ΔS 上曳引力对面积 ΔS 之比的极限是有界的，并定义为应力．力偶对 ΔS 之比包含着一个长度的附加量綱，所以可以忽略掉．为了完整地說明 P 点处的应力，必須給出 P 点处作用于經过該点的所有平面上的曳引力．然而，所有这些曳引力都可以变换成通过与坐标平面平行的平面上的曳引力分量．对通过这些平面每一个面的曳引力，都可以分解为平行于坐标軸的三个分量．这样就給出九个应力元（見图 1.1）：

$$\left.\begin{array}{ccc} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

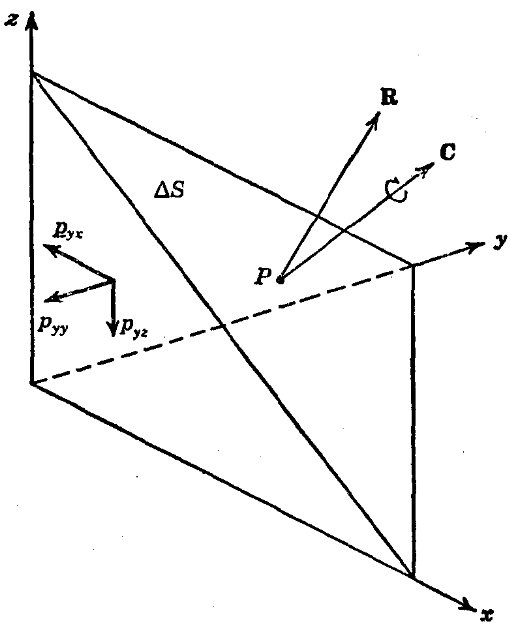

图 1.1 作用于面积元 ΔS 上的曳引力 $\mathbf{R}$ 和力偶 $\mathbf{C}$

（应力分量 P_{yy}, P_{yz}, P_{yx} 在垂直于 y 軸的平面內）

此处第一个脚碼代表垂直于已知面的坐标軸，而第二个脚碼代表引力所平行的坐标軸．陣列(1.6)式为一个对称張量．这一点在考虑介质內小体积元平衡时可以証明，而这个小体积元平行于 x，y，z 軸的边长分别为 Δx，Δy，Δz．圍繞通过质心的軸的力矩是由于相当于应力 P_{xy}，P_{yz}…… 的曳引力所引起的．正应力的力矩是不存在的，因为相应的力与通过无穷小体积元的质心的軸相交，并且体力的力矩較应力的这些力矩为更高級次的小量．因此，平衡条件需要使应力的切向分量成对地相等，即 $P_{xy}=P_{yx}$ 等．和形变的切向分量情况一样，三个互相垂直的主应力軸可以由应力的切向分量等于零而求得．于是，一点的应力为对应于各軸的主应力 P_{xx}，P_{yy}，P_{zz} 所完全表明．

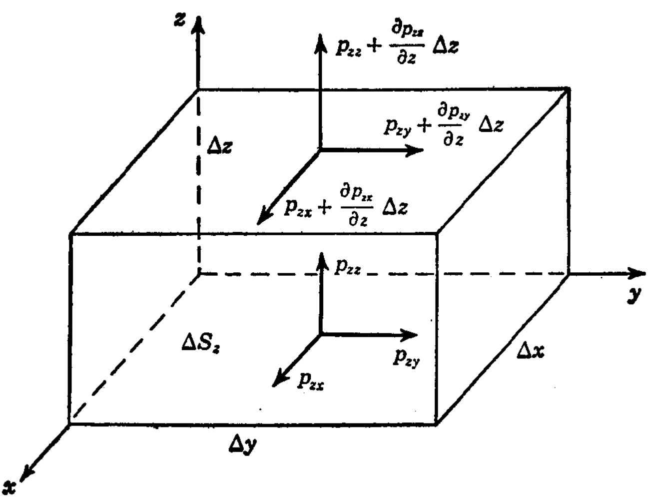

图 1.2 体积元的 ΔS_z 面中的应力分量

为了推导运动方程式，我們认为通过体积元的表面的曳引力相当于应力分量(1.6)式，而且体力 X，Y，Z 与体积元中的质量成比例(图 1.2)．討論曳引力时，作用于一个元上的合力的 x 分量，例如在垂直于 x，y，z 軸的各个面中的应力所产生的 x 分量为(仍忽略掉高次項)：

$$\left(P_{xx}+\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}\Delta x-P_{xx}\right)\Delta S_x,$$

$$\left(P_{yx}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}\Delta y-P_{yx}\right)\Delta S_y,$$

$$\left(P_{zx}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\Delta z-P_{zx}\right)\Delta S_z.$$

此处 ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z 分别为垂直于 x, y, z 軸各面的面积. 由此可得,由所有曳引力引起的力的 x 分量为下列三項:

$$\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

将所有的力和惯性項 $-\rho\dfrac{d^2u}{dt^2}\Delta x\Delta y\Delta z\cdots\cdots$相加,就求得运动方程式. 对每个分量来說,它們为

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{d^2u}{dt^2}&=\rho X+\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z},\\ \rho\frac{d^2v}{dt^2}&=\rho Y+\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zy}}{\partial z},\\ \rho\frac{d^2w}{dt^2}&=\rho Z+\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

在这些式内, ρ 为介质的密度.

連續性方程式

这个方程式表示給定物质部分的质量为恒定不变的条件. 在 Δt 时間內, 从体积元 $\Delta\tau$ 中流出的总质量为 $\operatorname{div}\rho\vec{V}\Delta\tau\Delta t$, 此处 $\vec{V}$ 为速度, 它平行于 x, y, z 軸的分量为 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. 在相同时間內质量的耗损为 $-\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)\Delta\tau\Delta t$. 使后两个表达式相等可給出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{V}=0.\tag{1.8}$$

此方程式的另一种形式为

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\vec{V}=0,\tag{1.9}$$

此处符号

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\mathrm{grad} \tag{1.10}$$

表示由运动而产生的“总的或物质的”变化率，而 $\frac{\partial}{\partial t}$ 为局部变化率.

§1.2 彈 性 介 质

在虎克定律的普遍形式中，假定六个应力分量中的每一个都是所有应变分量的綫性函数；在一般情况下，在应力应变关系中出現 36 个彈性常数.

各向同性的彈性固体

由于各向同性体所具有的对称性，彈性常数的数目就减少为二；在应用拉美常数 λ 和 μ 时，可以将应力应变关系写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx}&=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad & p_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
p_{yy}&=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad & p_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
p_{zz}&=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad & p_{zx}&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

我們还可以应用任何两个常数：楊氏模量 E，泊松比 σ，或不可压縮系数 k，将这些方程式写出来. 这些彈性常数之間的关系給出如下方程式：

$$\left.\begin{aligned}
\lambda&=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad & \mu&=\frac{E}{2(1+\sigma)},\\
E&=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad & \sigma&=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\\
&\mathrm{k}=\lambda+\frac{2}{3}\mu.
\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

应用方程式(1.7)和(1.11)，我們可以写出用彈性固体中一点的位移 u, v, w 来表示的运动方程式

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+\rho X,\\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+\rho Y,\\
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+\rho Z.
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.13}
$$

我們用 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 代替 $\frac{d^2}{dt^2}$，因根据(1.10)式，相应表达式之差包含着二次項，或分量的乘积，它們都假定是很小的．略掉这些乘积，我們就使这些微分方程式綫性化．

对于許多固体来說，λ 和 μ 都差不多相等，因而我們有时应用泊松关系 $\lambda=\mu$，作为一种簡化．它相当于 $\mathrm{k}=\frac{5}{3}\mu$ 和 $\sigma=\frac{1}{4}$．

对于不可压縮介质来說，$\theta=\operatorname{div}\vec{V}=0$，或者根据方程式(1.9)，$\frac{d\rho}{dt}=0$．

理想流体

从(1.11)和(1.12)式，我們找出 $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=\mathrm{k}\theta=-p$，此处应力張量的剩余独立分量值 $-p$ 为流体靜压力或平均压力．在液体中，不可压縮系数 k 非常大，然而它对于气体却只有中等数值．如果液体是不可压縮的，$\mathrm{k}=\infty$ 和 $\sigma=0.5$．从(1.13)式，使 $\mu=0$，可以得出在理想流体中微小运动的方程式．

§1.3 非完全彈性介质

我們也要涉及非完全彈性，特别是“內摩擦”造成的彈性波的衰减(有一种討論可見 Birch，文献[9]，第 88—91 頁)．将运动方程式中的一个彈性常数，例如 μ 用 $\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t}$ 来代替就可以将內摩擦的效应引入运动方程式中．这等于說明应力为应变和应变的时間变率两者的綫性函数．对于簡諧运动来說，应用时間因子 $e^{i\omega t}$；用复剛性系数 $\mu\left(1+\frac{i}{Q}\right)$ 代替 μ 时就引入了內摩擦效应，此处

$\frac{1}{Q}=\omega\ \frac{\mu'}{\mu}$. 在許多情况下，可以使 Q 与频率无关而得到充分良好的近似，但这种情况所需要的更詳細的討論将在 § 5.5 中給出.

§ 1.4 边 界 条 件

如果运动方程式所应用的介质是有边界的，则必須增加一些特殊的条件. 这些条件表示边界上应力和位移的情况. 在固体或液体的自由表面上，所有的应力分量都等于零. 在今后的問題中我們将假定，固体彈性介质在接触面上是紧密地連接在一起的，这就意味着所有应力分量和位移分量經过边界有連續性. 在固体、液体分界面上可能发生滑动，于是，只需要正应力和法向位移的連續性. 因为在液体中剛性等于零，所以，固体中的切向应力必須在分界面上等于零.

§ 1.5 波动方程式的推导

液体的运动方程式[从(1.3)式中，使 $\mu=0$, 因而 $\lambda=\mathrm{k}$ 导出]可以简化并可化为一个微分方程式，如果以下式定义的速度位 $\bar{\varphi}$ 存在:

$$\bar{u}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x},\quad \bar{v}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y},\quad \bar{w}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}. \tag{1.14}$$

如果略去体力，方程式(1.13)就化为

$$\rho\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=\mathrm{k}\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \rho\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}=\mathrm{k}\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \rho\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}=\mathrm{k}\frac{\partial\theta}{\partial z}. \tag{1.15}$$

现在，使 $\alpha^2=\frac{\mathrm{k}}{\rho}$，我們从(1.14)和(1.15)式中很容易看出

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}=\alpha^2\theta+F(t) \tag{1.16}$$

和

$$\bar{\varphi}=\alpha^2\int_0^t\theta dt. \tag{1.17}$$

此处 t 的附加函数由于沒有意义而略掉了. 从平均压力 $p=-\mathrm{k}\theta$

的定义和(1.16)式出发,我們有

$$p=-\rho\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}. \tag{1.18}$$

于是,从(1.16)和(1.5)式我們求得

$$\nabla^2\overline{\varphi}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2}, \tag{1.19}$$

其中高阶微量已經略去. 在上述假設下,在理想流体中以速度 α 傳播的微小扰动,这个波动方程式是成立的.

对于固体中的位移,最好定义一个标量位 φ 和一个向量位 $\vec{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ 如下:

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z},\\ v&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x},\\ w&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

或者写成向量形式

$$\vec{S}(u, v, w)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\vec{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3). \tag{1.20'}$$

根据(1.5)式給出 θ 的定义,我們得到

$$\theta=\nabla^2\varphi. \tag{1.21}$$

一般地說,运动方程式 (1.13) 表示一个扰动的傳播,而这个扰动包含着等体积 ($\theta=0$) 运动和无旋 ($\vec{\Omega}=0$) 运动两种. 此处 $\theta=\operatorname{div}\vec{S}(u, v, w)$ 和 $\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{S}$ [見方程式(1.2)]. 虽然如此,引入位 φ 和 ψ_i 时,就得出这两种运动分离的波动方程式. 假定体力可以略去,我們就能够将方程式(1.13)中的第一式写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)$$

$$=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi_3-\mu\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\psi_2.$$

很容易看到,如果函数 φ 与 ψ_i 为方程式