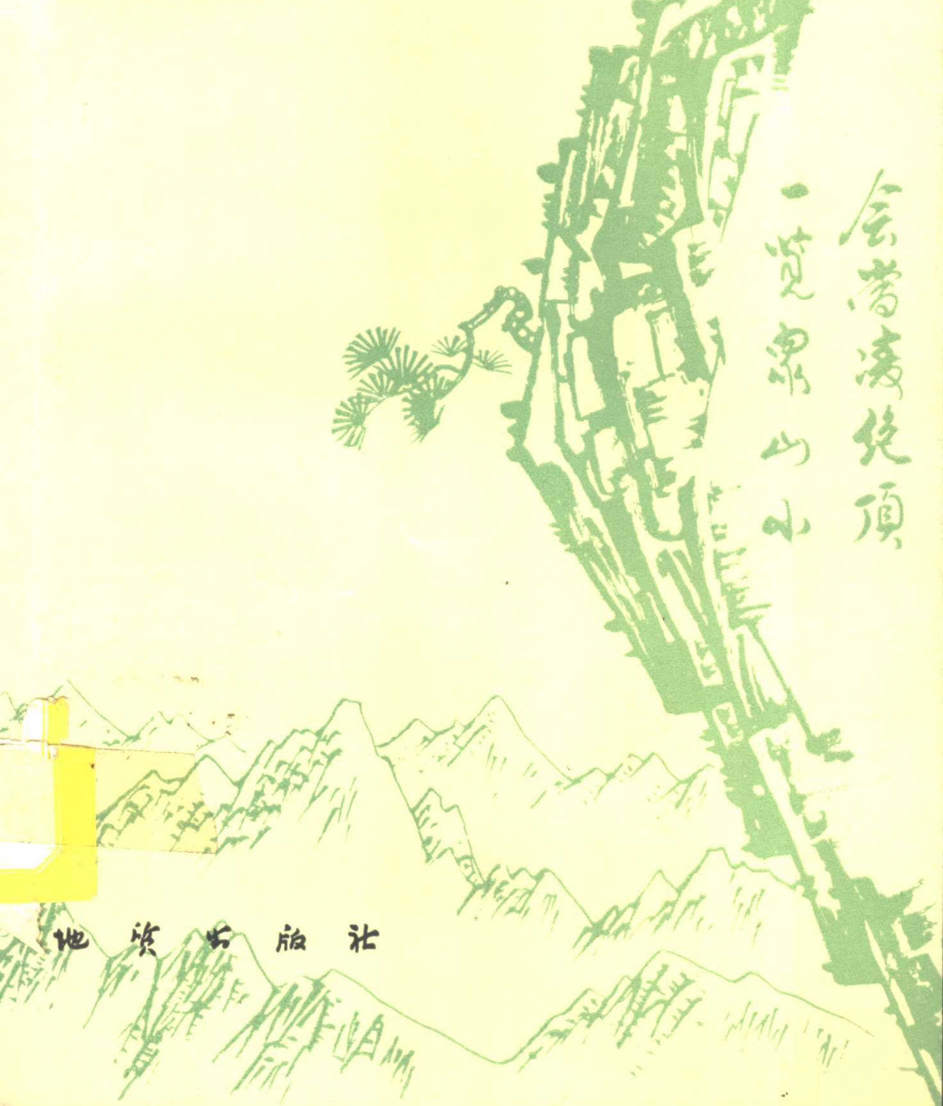
普通高等教育地质矿产类规划教材

简明实用泛函



地质出版社

普通高等教育地质矿产类规划教材

简明实用泛函

侯吉占 编

地质出版社

· 北京 ·

（京）新登字085号

内容提要

本书简明扼要而又系统地介绍了泛函分析的基础知识．主要内容有：Lebesque 测度和积分理论、度量空间、赋范空间、Hilbert 空间及其上的算子理论等，还有积分方程等三个附录．

本书可作为工科研究生和非数学专业的本科高年级学生的教课书或参考书，也可供工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

简明实用泛函/侯吉占编．-北京：地质出版社，1995．5

普通高等教育地质矿产类规划教材

ISBN 7-116-01753-4

Ⅰ．简…　Ⅱ．侯…　Ⅲ．泛函分析-基本知识　Ⅳ．O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第01312号

地质出版社出版

（100013　北京和平里七区十楼）

责任编辑：袁　方

*

北京印刷学院轻印刷厂印刷　　新华书店总店科技发行所发行

开本：787×1092 1/32　印张：6.875　字数：150千字

1995年5月北京第一版·1995年5月北京第一次印刷

印数：1－1000册　　定价：4.05元

ISBN 7-116-01753-4
P·1407

前　言

随着现代科学技术的飞速发展，高等分析的思想和方法已广泛应用到工程技术的各个领域，且逐渐成为工程技术人员的重要工具. 为了适应这新形势的需要，编者从 1983 年起，为部分专业硕士研究生讲授了《应用泛函分析》，经过多次教学实践和修改，形成本书.

书中论证力求详尽、深入浅出，只需具备微积分和线性代数的基础知识，就能读懂本书. 少数难繁的定理证明在此没有讲述，如感兴趣，读者可参考有关书籍学习.

附录 1 积分方程由孙向阳同志完成.

华中工学院数学系俞玉森教授在百忙中认真而细致地审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见. 在此表示衷心的感谢.

受本人水平所限，错误在所难免，请批评指正.

编　者

1994 年 9 月

目　　录

预篇　集　合

1. 集　合

凡具有某些特定性质的对象的全体称为**集合**. 这些对象称为集合的**元素**. 通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等表示集合,用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等表示集合的元素.

用 $A=\{x|\cdots\}$ 表示由满足"…"条件的元素组成的集合. 如:

$A=\{x|x$ 表示某城市的居民$\}=\{$某城市的人口$\}$.

$B=\{x|x$ 表示某一家庭的成员$\}=\{$父亲、母亲、女儿$\}$.

$$C=\{x|x=\frac{1}{n},n\text{ 为自然数}\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$$

$$D=\{x|x^2=1\}=\{-1,1\}.$$

由上可见,对某一集合的元素,一定要注意其特定的性质.

若 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$;a 不是集合 A 的元素,记为 $a\overline{\in} A$.

1.1　子集

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,称 A 为 B 的**子集**,也称"A 含于 B"或"B 包含 A",记为 $A\subset B$. 若 A 是 B 的子集,且至少有一个 B 的元素不属于 A,称 A 是 B 的**真子集**.

例 1　$A=\{n|n=1,2,\cdots\}$，$B=\{n|n=2,4,\cdots\}$，则 B 是 A 的子集.

空集　不含任何元素的集合叫空集，记为 $\varnothing$.

1.2　集的相等

若 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

1.3　集合的加法(并)

由集 A 同集 B 的一切元素组成的集，称为集 A 与集 B 的**和集或并**，记为 $A+B$ 或 $A\cup B$.

例 2　设 $A=\{n|n=1,2,3,\cdots\}$，$B=\{n|n=2,4,\cdots\}$，$C=\{n|n=1,3,5,\cdots\}$，则有

$$B+C=A\ (B\cup C=A),\quad A\cup B=A,\quad A\cup C=A.$$

例 3　设 $A=\{x|x^2=1\}$，$B=\{x\big|\,|x|<1\}$，则

$$A\cup B=\{x\big|\,|x|\leqslant 1\}=[-1,1].$$

?

要注意集合加法的特点是，重复的元素只算一个，这与数的加法完全不同.

同样理解　$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 和

$$A\cup B\cup C\cup\cdots\quad(\text{不一定可数}).$$

1.4　集合的乘(或交)

属于集 A 同时又属于集 B 的元素的全体，称集 A 与集 B 的**乘积(或交)**，记为 AB 或 $A\cap B$.

如上面例 2 中的 A、B、C 则有 $A\cap B=B$，$A\cap C=C$，$B\cap C=\varnothing$.

同样理解 $\prod\limits_{\alpha}A_\alpha$ 或 $\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$ 表示属于一切 A_α 的元素的全体，即对 $\forall\ x\in\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$，则 $x\in A_\alpha$ 对所有的 α. α 不一定是自然数，也可以是实数等.

1.5 集合的差

属于 A,而不属于 B 的元素的全体,称为集 A 与集 B 的**差**,记为 $A-B$ 或$(A\backslash B)$.

若 B 是 A 的子集($B\subset A$)则称 $A\backslash B$ 为集 B 在集 A 中的**补集(或余集)**,记为 $C_A(B)$,简记为 CB.

$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为**对称差**.

图 1 中两个集 A 与 B 的对称差

$A\triangle B=(A-AB)\cup(B-AB)=C_{A\cup B}(A\cap B)$

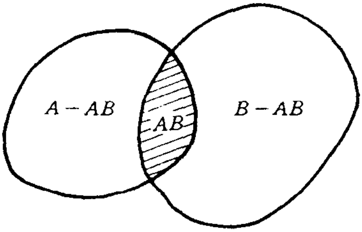


图 1

1.6 德·摩根(De Morgan)定律

$\overline{A\cup B}$ $=\bar{A}\cap\bar{B}$

$C(A\cup B)=CA\cap CB$,即和集的余集等于余集的交集;

$C(A\cap B)=CA\cup CB$,即交集的余集等于余集的和集.

推而广之,若 $S\supset A_i\quad(i=1,2,\cdots)$,则有

$$S\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(S-A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_S(A_i)\tag{1}$$

$$S\backslash\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(S-A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_S(A_i)\tag{2}$$

证(1) $\forall\ x\in S\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\longrightarrow x\in S$ 而 $x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

$\longrightarrow x\in S$ 而 $x\overline{\in}A_i$ (对所有的 $i=1,2,\cdots$)

$\therefore x\in S$ 且 $x\in S-A_i$ (对所有的 $i=1,2,\cdots$)

$$\longrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(S - A_i)$$

$$\therefore \quad S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}(S - A_i);$$

反之，$\forall \; x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(S - A_i) \longrightarrow x \in S - A_i(\forall \; i)$

$\longrightarrow x \in S$ 且 $x \overline{\in} A_i(\forall \;\; i \in N) \longrightarrow x \in S$ 且

$x \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \;\longrightarrow x \in S - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\therefore \bigcap_{i=1}^{\infty}(S - A_i) \subset S - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i;$$

∴ 等式(1) 成立.

同样可证明(2).

1.7 集合的运算规则

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ 交换律；

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ 结合律；

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 分配律.

1.8 集列的极限集

若 $S_n \subset S_{n+1}$，则称集列 $\{S_n\}$ 为**不减集列**；

若 $S_n \supset S_{n+1}$，称集列 $\{S_n\}$ 为**不增集列**，两者均称为单调集列. 对不减集列 $\{S_n\}$ 显然有等式 $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$.

称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 为集列 $\{S_n\}$ 的**极限集**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

对不增集列 $\{S_n\}$ 以极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} S_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 定义集列 $\{S_n\}$ 的极限集，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

1.9　集合的积

设已给集合 $A_1,A_2,\cdots A_n$. 由一切从 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 里依序取出的元素 $a_i\in A_i \quad i=1,2,\cdots,n$ 组成的元素组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 所构成的集合，称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**积**，记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

如 $A=\{a,b\},B=\{c,d\}$，则

$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}.$$

2. 映　射

设有两个集合 A、B. 如果有一个规律 φ，使 A 中的每一个元素 a 都对应着 B 中的唯一的元素 b 时，则称此规律 φ 是从 A 到 B 的一个**映射**(**函数或变换**). 称 b 为 a 在映射 φ 下的**像**，a 为 b 在映射 φ 下的**原像**；A 称为映射 φ 的**定义域**，记为 $D(\varphi)$，而所有对应的元素 $b=\varphi(a)$ 所成的集合，称为 φ 的**像集合**(或**值域**)，记为 $R(\varphi)$ 或 $\varphi(A)$. 映射记为

$$\varphi: A\longrightarrow B;\quad 或\ b=\varphi(a),a\in A;\quad 或\ A\xrightarrow{\varphi}B.$$

2.1　单射、满射、双射

进一步分析：若 $\varphi(A)\subset B$，且 $\varphi(A)$ 是 B 的真子集时，称 φ 为从 A 到 B 内的映射，有时称**单射**(或**内射**)；若 $\varphi(A)=B$ 称 φ 为从 A 到 B 上的**满射**；若 φ 是一一对应的，则称 φ 为**双射**.

若 φ 是双射，且满足条件 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ 及 $\varphi(ax)=a\varphi(x)$. 其中 $x,y\in D(\varphi)$，$a\in\mathrm{R}$ 时，则称 φ 为**同构映射**，此时称 A 与 B **同构**.

例 4　$y=\sin x$ 是将 $[-\pi/2,\pi/2]$ 一一映射到 $[-1,1]$ 上的双射；是将 $(-\infty,\infty)$ 映射到 $[-1,1]$ 上的满射；是将

$(-\infty,\infty)$ 映射到$[-2,2]$内的单射.

例 5 $y=\frac{1}{2}x$ 是将$[-2,2]$一一映射到$[-1,1]$上的同构映射.

2.2 映射的积(复合映射)

若 $F:X\longrightarrow Y$, $G:Y\longrightarrow Z$, 称映射

$GF:X\longrightarrow Z \quad (GF(x)=G(F(x)))$ 为映射 G 和 F 的**乘积**(或**复合映射**),记为 GF. 一般说 $GF\neq FG$. 如图 2 所示.

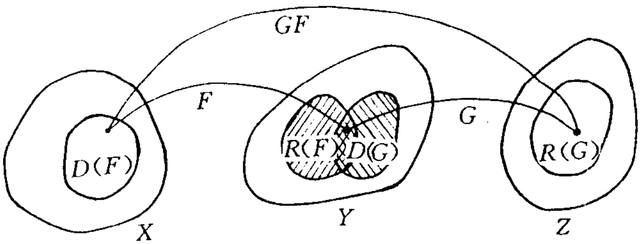


图 2

请注意,当 $R(F)\cap D(G)=\varnothing$ 时,GF 便不构成一个 X 到 Z 的映射.即图 2 Y 中的双阴影线部分必须存在,才能构成复合映射.

例 6 $y=f(x)=x^2,x\in[-1,1]$;$Z=g(y)=\sin y$, $y\in(-\infty,\infty)$,则 $gf(x)=g[f(x)]=\sin x^2:[-1,1]\longrightarrow[0,\sin 1]$

例 7 若 $y=f(x)=x^2$, $x\in[-1,1]$; $Z=g(y)$, $|y|>1$. 则 $R(f)=[0,1]$, $D(g)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$, $R(f)\cap D(g)=\varnothing$,故 gf 不构成映射.

例 8 $y=f(x)=\ln x$, $x\in(0,\infty)$; $Z=g(y)=\sqrt{y^2-1}$, $|y|\geqslant 1$; 而 $R(f)=(-\infty,\infty)$, $D(g)=$

$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$，所以 $R(f)\cap D(g)=D(g)\neq\varnothing$，故 $Z=gf(x)=\sqrt{(\ln x)^2-1}$ 构成一复合映射.

3. 关　系

设 A 是一集合，D 为含两个元“真”与“假”的集合，即 $D=\{真,假\}$. 一个 $A\times A$ 到 D 的映射 R，叫做 A 的元之间的一个**关系**：若 $\mathrm{R}(a,b)=$“真”时，我们说 a 与 b 符合关系 R，记为 $a\mathrm{R}b$；若 $\mathrm{R}(a,b)=$“假”，就说 a 与 b 不符合关系 R. 由此可见，给了 A 的元之间的一个关系，就可以决定任意一对 A 的元 a、b 是否符合关系.（关系 R 和实数域 R 符号虽然一样，但从行文中容易区分出来.）

例 9　$A=\mathrm{R}=(-\infty,\infty)$　（这里，R 为实数域）.

$\mathrm{R}:(a,b)\longrightarrow$ 真，若 $b-a>0$　$(a<b)$

$(a,b)\longrightarrow$ 假，若 $b-a\leqslant 0$　$(b\leqslant a)$

是 A 的元之间的一个关系，则“$<$”表示关系 R，这是一种简单的关系. □

3.1　等价关系　若 A 的元之间的关系 R 满足条件：

Ⅰ　$a\mathrm{R}a$　$(a\sim a)$　　$\forall\ a\in A$　　反射；

Ⅱ　$a\mathrm{R}b\Longrightarrow b\mathrm{R}a$　$(a\sim b\Longrightarrow b\sim a)$　　对称；

Ⅲ　$a\mathrm{R}b,b\mathrm{R}c\Longrightarrow a\mathrm{R}c$　$(a\sim b,b\sim c\Longrightarrow a\sim c)$　　传递；

则称此关系为**等价关系**，记为 $\sim$，若 $a\sim b$，就说 a 与 b **等价**.

可见实数域 R 中的相等关系是一个等价关系. 几何上的全等关系和相似关系都是等价关系的例子.

3.2　集 A 的分类　若把集 A 分成若干个叫做类的子集，使得 A 的每一个元属于且仅属于一类，则称这些类的全体为 A 的一个**分类**.

如果我们把属于且仅属于同一类的元 a 与 b 规定为 a、b 的一个关系 R. 显然,这是一个等价关系. 事实上,由于

Ⅰ　因 a 与 a 在同一类,故有 $a \sim a$;

Ⅱ　若 a 与 b 在同一类,那么 b 与 a 也在这类,即有

$$a \sim b \Longrightarrow b \sim a;$$

Ⅲ　若 a 与 b 在同一类,b 与 c 在同一类,所以 a 与 c 在同一类,即

$$a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c.$$

由此可见,集的分类决定其上的一个等价关系.

例 10　整数集 $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 的分类

若取一个固定整数 $m > 0$,利用这个 m 来规定 Z 的元之间的一个关系 R:

aRb 当且仅当 $m|a-b$(表示 m 整除 $a-b$)

这一关系表示 $a-b=mq$(q 为整数)或 $a=b+mq$. 这显然是一个等价关系,通常称为**模 m 同余关系**,并记为 $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 或 $a \equiv b(m)$,读成"a 同余 b 模 m",或读为"a 与 b 对模 m 同余".

Z 的这个分类称"模 m 的剩余类". 下面来仔细考查这个剩余类. 显见任何一个整数一定与 $0,1,2,\cdots,m-1$ 这 m 个整数中的一个以模 m 同余. 即是说任一整数与上面 m 个数之一的差,一定能被 m 整除,(如 -1 与 $m-1$ 同余,-2 与 $m-2$ 同余,m 与 0 同余,$m+1$ 与 1 同余;$2m,3m,4m\cdots$ 都与 0 同余). 另一方面 $0,1,2,\cdots,m-1$ 这 m 个整数中两两不同余,因为它们中任何两个之差都小于 m,因此刚好有 m 个不同的剩余类,即

$$[0] = \{\cdots, -2m, -m, 0, m, 2m, \cdots\} = [m]$$

$$[1] = \{\cdots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, \cdots\} = [m+1]$$

$[2]=\{\cdots,-2m+2,-m+2,2,m+2,2m+2,\cdots\}=[m+2]$

$[3]=\{\cdots,-2m+3,-m+3,3,m+3,2m+3,\cdots\}=[m+3]$

……………………………………………………………………

$[m-1]=\{\cdots,-m-1,-1,m-1,2m-1,3m-1,\cdots\}=[2m-1]$

[ ]表示{ }之内容，习惯上取 $0,1,2,\cdots,m-1$ 作为这 m 个类的一个代表团. 当然也可以取 $1,2,\cdots,m$ 作为一个代表团. 总之，从每一个类中取一个作为代表组成一个代表团.

若 $m=5$ 时，模 5 剩余类为：

$[0]=\{\cdots,-10,-5,0,5,10,15,\cdots\}=[5]$

$[1]=\{\cdots,-9,-4,1,6,11,16,\cdots\}=[6]$

$[2]=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}=[7]$

$[3]=\{\cdots,-7,-2,3,8,13,\cdots\}=[8]$

$[4]=\{\cdots,-6,-1,4,9,14,\cdots\}=[9]$

$\{0,1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 都是代表团，显然 $\{10,11,12,13,14\}$ 也是一个代表团. □

4. 序

如果对于集合 A 中的某些元素对 x,y 定义了序的关系 $x\geqslant y$（x 大于或等于 y，这里指的是先后次序，而不一定有大小关系），并且满足下列条件：

Ⅰ $\forall\ x\in A$ 有 $x\geqslant x$；

Ⅱ 如果 $x\geqslant y, y\geqslant z$，则 $x\geqslant z$；

Ⅲ 如果 $x\geqslant y, y\geqslant x$，则 $x=y$，

则称 A 是**半序**（或**偏序**）**的**.

记号 $x\leqslant y$ 表示 $y\geqslant x$；$x>y$ 表示 $x\geqslant y$ 且 $x\neq y$；$x\geqslant y,z$ 表示 $x\geqslant y$ 和 $x\geqslant z$. 实数集是半序集.

如果 A 中的任意两个 x,y 都有 $x \geqslant y$ 或 $y \leqslant x$，即所有的元素彼此之间都可以比较，则称 A 为**全序集**. 实数集还是全序集.

设A为半序集，若 $\forall\ \alpha_1,\alpha_2 \in A$，可以找到这样的 $\alpha \in A$，使 $\alpha \geqslant \alpha_1$ 和 $\alpha \geqslant \alpha_2$ 时，称 A 为**定向半序集**(按递增有向).

5. 集 的 势

怎样数一个集合的元的个数呢？对任何的有限集合都可以 1,2,3,4,… 数完它，使它与一个有限自然数集一一对应. 但对无限集怎么办？如 N,Q,R,C 等集，从直观上看它们的元素都是无限多. 而有理数集 Q 显然比自然数集 N 的元要多，实数集比有理数集多出一个无理数集，复数集 C 比实数集 R 的元多等等. 又怎样来区分它们所含元素的多少呢？办法和有限集相同，就是用一一对应的方法来数，以自然数集 N 为标准.

定义　若两集 A,B 之间存在一个一一对应的映射 $\varphi: A \longrightarrow B, a \in A, \varphi(a) = b \in B, \varphi(A) = B, \varphi^{-1}(b) = a (a \longleftrightarrow b)$，则称 A 与 B **等价**，记作 $A \sim B$.

(请注意 $A \sim B$ 与 $A = B$ 的不同)

对于两个等价的集合 A 与 B，我们称它们具有相同的**势**(或**基数**)，即二者中诸元素的数目相等. 以 card(A) 或 $\overline{A}$ 表示集 A 的势. 当 A 和 B 具有相同的势时，记为 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ 或 $\overline{A} = \overline{B}$.

如果 A 等价于 B 的某个子集 B_1 时，则称 A 的势小于等于 B 的势，或称 B 的势大于等于 A 的势，记为 $\overline{A} \leqslant \overline{B}$ 或 $\overline{B} \geqslant \overline{A}$.

由以上的分析可知，有限集的势就等于它所含的元的个

数. 如 $A=\{1,2,-1\}$，则 $\overline{A}=3$. $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，则 $\overline{A}=m$. 无限集情况就复杂多了，但可以用自然数集为标准由一一对应来建立集的势. 我们用 $\aleph_0$ 表示自然数集 N 的势，($\aleph_0$ 读作“阿列夫、零”)，即 $\overline{\mathrm{N}}=\aleph_0$.

称自然数集为**可数集**. 凡与自然数等价的集都称可数集合.

凡含有可数子集的集叫**无限集**.

例 11　集 $\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 与集 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 是一一对应的. 请看下表：

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5, & \cdots & n, & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10, & \cdots & 2n, & \cdots
\end{array}$$

这说明自然数集 N 与它的一个无限真子集(偶数集)一一对应，因此它们的势相同. 这是无限集的重要性质，也可用它来作无限集的定义.

例 12　有理点集是可数的.

先将正有理数依下表排列出来：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & & \cdots & & \cdots & & n \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{7}{2} & & \cdots & & \cdots & & \frac{2n-1}{2} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{7}{4} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

依箭头所指的方向一一地数下去，正有理数就和自然数