● 高职高专学校试用教材

高等数学 中册

Advanced Mathematics

（第四版）

上海高校《高等数学》编写组 编

主审 胡启迪 主编 朱弘毅

上海科学技术出版社

71

高职高专学校试用教材

高等数学

中　册

（第四版）

上海高校《高等数学》编写组　编

主审　胡启迪

主编　朱弘毅

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 中册/朱弘毅主编:上海高校《高等数学》编写组编. —4 版. —上海:上海科学技术出版社,2002.1

高职高专学校试用教材

ISBN 7-5323-6288-4

Ⅰ.高... Ⅱ.①朱...②上... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091338 号

责任编辑 周玉刚

上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)
新华书店上海发行所经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 8.75 字数 193 000
1985 年 5 月第 1 版 1992 年 4 月第 2 版
1998 年 6 月第 3 版
2002 年 2 月第 4 版 2002 年 2 月第 25 次印刷
印数:1—16 000
定价: 9.70 元

高等数学中册（第四版）

主　审　胡启迪

主　编　朱弘毅

副主编　吴　珞　张伟瑾　沐国宝　邵建润

序

教材是任何一所学校中教师与学生接触时间最长的教授、学习和交流的媒体，它不但在校内教学过程中起到至关重要的作用，往往还伴随着学习者毕生的学习、工作和生活.

上海市高等工业专科学校是随着经济建设的发展而成长起来，并成为上海市高等教育体系中的重要组成部分，形成了一个具有工程专科教育特色的层次. 近几年来，上海市高等工业专科学校积极参加了国家教委组织的专业教学改革试点，在办出工业专科特色，提高教育质量上进行了认真的探索和实践. 如今，以他们的专业改革试点的成果，积极推进高等工业专科的教材建设，是一件很有意义的工作. 特别从建设系列教材的考虑，是一项很有远见的决策.

教材的主要使用者是学生，因此编写教材应注意下列三个方面：第一，一本好教材应该根据学习对象和该类学科的发展，尽可能地把最新的内容合理地安排其中. 第二，作为教材，其内容编排的顺序、深浅等方面，应该符合人的认知规律，以利于学习. 特别对高等工业专科教材来说还更应该突出联系工业发展的实际，注重技能技巧和应用能力的培养. 第三，教材作为教学的媒体，它应该能起到教书育人的作用，促进学习素质的培养和训练.

这次第一批六门课程：数学、物理、化学、英语、计算机和金工系列教材的编写作了初步的尝试，它凝聚了编写人员的辛劳和心血.

目前，全国高校正在实施面向21世纪教学内容和课程体系改革的建设计划. 高等工业专科系列教材的出版也是上海高等工业专科学校的一件大事，它不仅仅局限于目前的六门教材，还有待于更深入的改革和发展. 我们期望上海高等工业专科的教学内容和课程体系改革取得更大的成绩，将以更新、更好的教材奉献于即将来临的21世纪，为我国的社会主义建设增添光辉.

张伟江

1995年12月

前　言

《高等数学》是高职高专工科各专业的一门基础课.为适应高职高专的发展需要,加强高职高专的教材建设,在上海市教委的组织和领导下,由上海市高职高专院校骨干数学教师联合组成上海高校《高等数学》编写组,进行《高等数学》(第四版)的编写工作.

我们从高职高专的培养目标和数学课程的教学基本要求出发,对《高等数学》(第三版)进行逐章的分析讨论,结合教学改革的成果,在《高等数学》第一、二、三版的基础上提出编写大纲.

本教材在前几版的基础上,注意贯彻"以应用为目的,以必需够用为度"的原则,使《高等数学》(第四版)更符合高职高专的培养目标,更适合高职高专的数学课程的教学需要,更具有高职高专的特色.

本教材,还参照高职高专工科《高等数学课程教学基本要求》、《线性代数课程教学基本要求》、《线性规划课程教学基本要求》、《概率与数理统计课程教学基本要求》进行编写,使教材符合教学基本要求.

本教材分上、中、下三册.上册七章,包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程;中册五章,包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,级数,数值计算初步;下册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计课程内容八章,即矩阵及其运算,线性方程组,特征值、特征向量及二次型,线性规划,随机事件与概率,随机变量,参数估计与假设检验,方差分析和回归分析.书中注有"*"号的内容,供不同教学要求选用.中册内容按模块处理,如果不讲授第八章第二节向量代数、第三节空间平面和直线,则要讲授第八章第四节中加"△"的内容,不讲授第九章第五节偏导数的几何应用,不会影响学习其余内容,这种安排是从现实教学要求出发,削弱解析几何的学习.

本教材由朱弘毅主编,吴珞、张伟瑾、沐国宝、邵建润任《高等数学》(中册)副主编.参加编写的还有(以姓氏笔画为序):王建军、冯珍珍、朱玉久、朱弘毅、朱嗣筠、任美玉、孙劼、李俭、庄海根、邵建润、吴珞、沐国宝、张伟瑾、张福康、高永良、楼曾豪、裘锡林.

《高等数学》(第四版)由上海市教育考试院院长胡启迪教授主审，参加审稿的还有(以姓氏笔画为序)：王春华、严宗元、周玉刚、罗爱芳、邱慈江、黄午阳、戴宏图等.他们认真审阅书稿，并提出许多宝贵的意见，编者对此表示衷心地感谢.

限于编者水平，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，恳请广大的教师和读者提出宝贵的意见.

编　者

2001年2月

目　　录

第八章 向量代数与空间解析几何①

本章首先建立空间直角坐标系，然后介绍空间曲面、空间曲线概念及其常用的空间曲面图形.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

我们应用平面直角坐标系，可将平面上的点 P 与有序实数对 (x,y) 建立一一对应关系，由此将平面曲线与方程建立了一一对应关系. 为了建立空间图形与方程的联系，我们需要建立空间的点与有序数组间的一一对应，这种对应关系是通过建立空间直角坐标系来实现的.

在空间任意取一定点 O，过点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的单位长度. 这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，与 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴. 三个坐标轴正向构成右手系，即用右手握着 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8.1 所示.

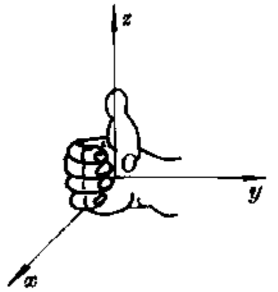


图 8.1

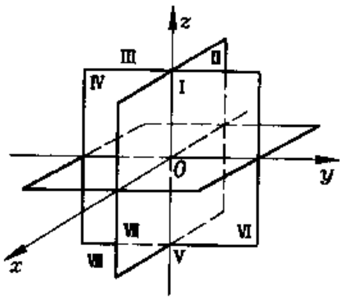


图 8.2

这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系. 点 O 称为坐标原点.

在空间直角坐标系中，任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面. 例如，由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 坐标面. 类似地还有 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，其顺序规定如图 8.2 所示.

① 第八章内容按模块处理. 第二节向量代数、第三节空间平面和直线，编者加以"＊"；第四节第一段空间曲面的概念与第五节第一段空间曲线的部分内容，编者加上"△". 如果已经学习了加"＊"的内容，那么可以不学习加"△"的部分；如果不学习加"＊"的两节，则要学习加"△"的内容.

设 M 为空间直角坐标系中的任意一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与坐标轴的交点分别为 P、Q 和 R，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x、y、z，于是空间一点 M 就唯一确定了一组有序数 x、y 和 z，如图 8.3 所示. 反之，对任意一组有序实数 x、y、z，可依次在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x、y 和 z 的点 P、Q、R，过 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这三个平面相交于唯一的一点 M. 可见任意一组有序实数 x、y、z，唯一确定空间一点 M，所以通过空间直角坐标系，我们就建立了空间的点 M 与一组有序实数 x、y、z 之间一一对应关系. 称 x、y、z 为点 M 的坐标，通常记为 $M(x,y,z)$，简记为 (x,y,z). x，y 和 z 依次称为点 M 的横坐标，纵坐标和竖坐标.

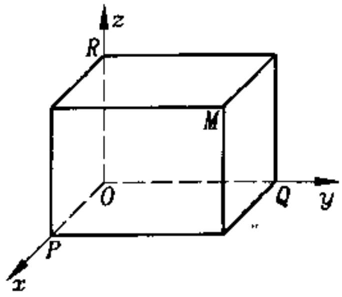


图 8.3

坐标轴上和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征. 若点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上，则 $y=z=0$；在 y 轴上，则 $x=z=0$；在 z 轴上，则 $x=y=0$. 若点 $M(x,y,z)$ 在 xOy 坐标面上，则 $z=0$；在 yOz 坐标面上，则 $x=0$；在 zOx 坐标面上，则 $y=0$.

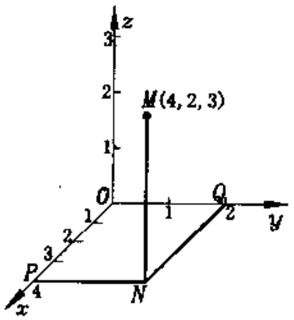
例 在空间直角坐标系中作出坐标为(4,2,3)的点.

解 建立空间直角坐标系，取 x 轴、y 轴、z 轴上的单位长度一致(有时，也可以不一致). 在平面上画时，y 轴、z 轴上的单位长度与实际上的大小一致，而 x 轴的单位长度取为实际大小的一半.

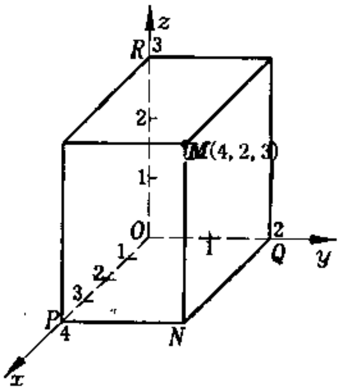
在 x 轴、y 轴取坐标分别为 4，2 的点 P、点 Q，过点 P、点 Q 作平行于 y 轴、x 轴的平行线，交于点 N，点 N 在空间直角坐标系中的坐标为(4,2,0).

再过点 N 作平行于 z 轴，向上作线段 NM，取 NM 的长度为 3 个单位(实际长度)，则点 M 即为所求，即 M 的坐标为(4,2,3)，如图 8.4(a)所示.

点(4,2,3)也可这样作，在 z 轴上取坐标为 3 个单位的点 R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，三平面的交点即是坐标为(4,2,3)的点，如图 8.4(b)所示.



(a)



(b)

图 8.4

二、空间两点间的距离

$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间直角坐标系中给定的两点，过点 M_1 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，交三个坐标轴于 P_1、Q_1、R_1，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x_1，y_1，z_1；同样地，过点 M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面，交三个坐标轴于 P_2、Q_2、R_2，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x_2，y_2，z_2. 这六个平面构成一个长方体，如图 8.5 所示，线段 M_1M_2 为长方体的对角线，其长度满足

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |M_2N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |M_2N|^2.$$

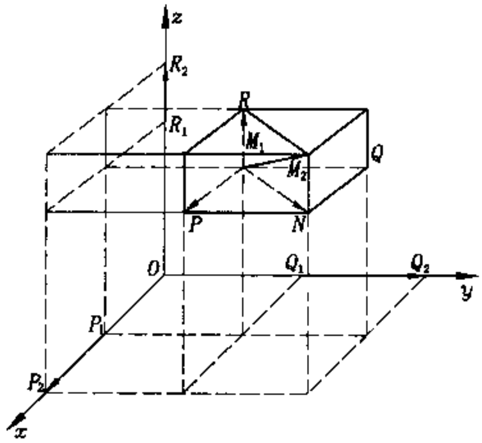


图 8.5

又 $\because$ $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$，

$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$，

$|M_2N| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$，

$\therefore$ $|M_1M_2|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$.

于是，空间中两点 M_1，M_2 间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \tag{8-1}$$

特别，点 $M(x,y,z)$到坐标原点(O,O,O)的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8-2}$$

例 1 求 $M_1(1,1,-1)$，$M_2(4,-3,5)$之间的距离.

解 $|M_1M_2| = \sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2+[5-(-1)]^2} = \sqrt{61}$.

例 2 试证以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 $\because$ $|AB| = \sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2} = \sqrt{49} = 7$，

$|AC| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = \sqrt{49} = 7$，

$|BC| = \sqrt{(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2} = \sqrt{98}$，

$\therefore$ $|AB| = |AC|$，$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.

所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习题 8-1

1. 在空间直角坐标系中作出具有下列坐标的点 $A(4,3,5)$、$B(1,2,0)$、$C(-4,1,1)$、$D(1,-1,-4)$.
2. 求点 $A(1,2,-3)$关于(1) xOy 坐标面；(2) x 轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.
3. 求点 $M(4,-3,5)$与原点及到各坐标轴间的距离.
4. 求顶点为 $A(2,5,0)$、$B(11,3,8)$、$C(5,1,11)$的三角形各边的长.
5. 空间中有两点 $A(4,-7,1)$、$B(6,2,z)$，且$|AB| = 11$，求 z.

*第二节　向量代数

一、向量及其运算

在自然科学和工程技术中，经常遇到的量大致可分为两类：其中的一类是只有大小的量，例如，长度、质量、温度等，这一类量叫做**数量**(或**标量**)；另一类是既有大小又有方向的量，例如，力、位移、速度等，这一类量叫做**向量**(或**矢量**).

在数学上，常用有向线段表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M 为起点，N 为终点的有向线段表示的向量，记为$\overrightarrow{MN}$，如图 8.6 所示. 本书用小写粗体字母表示向量，比如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等.

图　8.6

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量的**模**(或向量的**长度**)，记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量叫做**单位向量**. 模为零的向量叫做**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量没有确定的方向，也可以认为其方向是任意的.

在许多实际问题中，有些向量与其始点有关，有些向量与始点无关. 在数学上我们仅讨论与始点无关的向量，这种向量称为**自由向量**. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，则称这两个向量**相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

下面分别介绍向量的加法、减法以及数与向量的乘法运算.

1. 向量的加法

定义 1　把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，那么从起点到平行四边形的对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$[图 8.7(a)]这种求向量和的方法称为平行四边形法则.

(a)　　　　(b)

图　8.7

如果把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，这种求和的方法称为向量加法的三角形法则[图 8.7(b)].

2. 向量与数的乘法

定义 2　设 λ 为一实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，引入一个新的向量 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 与数 $|\lambda|$ 的乘积，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意. 称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的**乘积**.

当 $\lambda=-1$ 时，记 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，那么 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，模相等，称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**. 有了负向量的概念后，我们可以定义向量的减法(图 8.8)为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

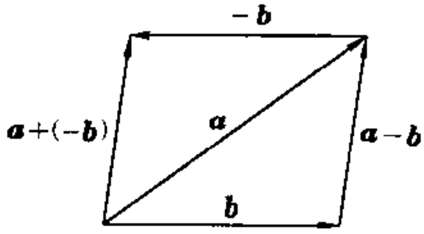


图 8.8

向量的加法与数乘满足以下规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a});$$

(3) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

从数与向量乘法的定义可以看出，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda\neq0)$.

我们把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 显然有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

二、向量的坐标表示式

1. 向径及其坐标表示

起点为坐标原点，终点为空间一点 $M(x,y,z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**，如图 8.9 所示，记为 $\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}$.

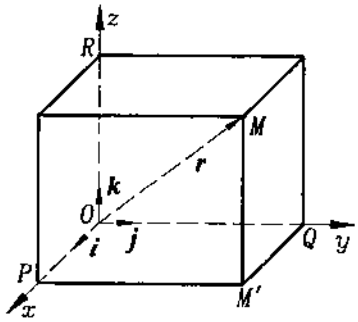


图 8.9

设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正方向同向的单位向量，称它们为**基本单位向量**. 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与坐标轴的交点分别为 P、Q 和 R. 由图 8.9 及向量加法，得

$$\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}$$

又 $\because$ $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，

$\therefore$
$$\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{8-3}$$

或记为
$$\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}. \tag{8-4}$$

(8-3)式称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的**分向量**. (8-4)式称为 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标表示式**. x,y,z 叫做向径 $\boldsymbol{r}(M)$ 的坐标.

2. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式

在空间直角坐标系中有以 $M_1(x,y,z)$ 为起点，$M_2(x,y,z)$ 为终点的向量 $\boldsymbol{a}$(图 8.10)，则由向量的减法，得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}(M_2)-\boldsymbol{r}(M_1).$$

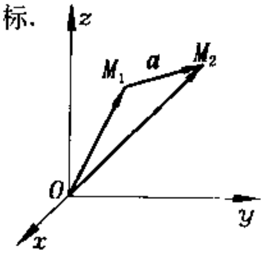


图 8.10

$$\begin{aligned}\therefore\quad \boldsymbol{a}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{8-5}$$

其中，$a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$. 称(8-5)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**. a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**.

从以上推导过程可以看出，一方面，从向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一地定出它的坐标 a_x、a_y、a_z；另一方面，从 a_x、a_y、a_z 可以唯一地定出向量 $\boldsymbol{a}$. 这样，有序数组 a_x,a_y,a_z 就与向量 $\boldsymbol{a}$ 一一对应起来了，从而向量 $\boldsymbol{a}$ 可用它的坐标 a_x,a_y,a_z 表示，(8-5)式又可记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}. \tag{8-6}$$

称(8-6)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**.

如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 按基本单位向量的分解式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量运算规律可以推出：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

上式中，若有一个分母为零，如 $b_x=0$，则上式应理解为

$$\begin{cases}a_x=0,\\ \dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}.\end{cases}$$

例1 设 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-3,2\}$，求 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-2(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$
$=(3-2)\boldsymbol{i}+(2+6)\boldsymbol{j}+(1-4)\boldsymbol{k}$
$=\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

例2 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,m\}$与向量 $\boldsymbol{b}=\{n,1,4\}$平行，求 m,n.

解 由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，得

$$\frac{2}{n}=\frac{-1}{1}=\frac{m}{4}.$$

解方程组，得

$$m=-4,n=-2.$$

有了向量的坐标表示式后，向量的模和方向也可以用它的坐标来表示. 由空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的距离公式得向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

也即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{8-7}$$

为了表示向量的方向，我们设$\overrightarrow{M_1M_2}$与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角分别为 α,β,γ(图 8.11)，称 α,β,γ 为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角，规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$. 一个向量的三个方向角确定了，