经济学硕士入学考试数学复习指南（修订本）

严守权 张学贞 褚永增 编著

(京)新登字 156 号

经济学硕士入学考试数学复习指南(修订本)
严守权 张学贞 褚永增 编著

出版者:中国人民大学出版社
发行者:中国人民大学出版社
(北京海淀路 39 号 邮码 100872)
印刷者:北京市丰台区丰华印刷厂
经销者:新华书店总店北京发行所
开 本:850×1168 毫米 32 开
字 数:460 000
印 张:18.5
版 次:1993 年 9 月第 1 版
印 次:1993 年 9 月第 1 次印刷
册 数:1—5000
书 号:ISBN7-300-01722-3/G·240
定 价:12.90 元

前　言

1986年国家教委决定，工学与经济学硕士研究生入学数学考试实行统一命题和统一考试，并相应颁布了《数学考试大纲》。为了帮助报考经济学硕士的考生较系统地复习大纲所规定的内容和要求，熟悉统考命题的特点，我们根据国家教委1993年制订的《数学考试大纲》以及历年辅导考研和评卷经验，组织编写了这本复习指南。

本书严格按照国家教委1993年制定的《数学考试大纲》要求编写。全书分为"考试大纲的内容和要求"、"历年统考试题分类解析"和"模拟试题"三篇。

第一篇"考试大纲的内容和要求"，按大纲规定分成"微积分"、"线性代数"和"概率论"三章，每章又分成若干节，每一节包括"内容提要"、"例题解析"和"练习与答案"三部分。"内容提要"部分系统、简要地介绍了大纲划定的基本概念、定理、公式及应用等内容，有助于考生复习时，对考试范围有一个系统而又明确的了解；"例题解析"部分，按大纲规定的内容和题型，精选了大量的具有典型性和难易适度的例题，并进行了深入浅出的分析和解答，有助于提高考生的解题能力；"练习与答案"部分精选了较多的练习题，供考生系统复习后检测自己的复习效果和提高解题能力。

第二篇"历年统考试题分类解析"，对1987～1992年经济学硕士研究生入学考试的数学四五统考试题进行分类解析。根据历

年评卷经验，我们特别加强了对客观性试题的分类解析。

为了帮助考生在系统复习的基础上，检测自己的复习效果，在第三篇“模拟试题”中，给出了数学四五各两份完整的试题，并配有参考答案。建议使用本书备考的考生，按正式考试的要求，在三个小时以内解答一份，然后再对照答案检查自己复习的效果，发现自己存在的问题。另外，书后还附有1993年数学四五统考试题及参考解答。

考虑到数学五的考试内容与数学四的相应内容相同，为了节省篇幅，我们将数学四、五合并编写，将数学四要求而数学五不要求的内容用“*”号标出，因此，凡报考数学五的考生，对标有“*”的部分可略去不看。

本书是按《数学考试大纲》编写的，其基本内容与国家教委审定的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲的内容和要求基本相同，因此，本书也可作为高等院校财经类专业本科生学习《经济数学基础》的参考书。

汪洲教授仔细审阅了全部书稿，莫颂清副教授审阅了部分书稿，李赛时老师参加了部分初稿的编写。中国人民大学出版社的梁晶老师对本书的出版给予了极大的支持和帮助，徐力坚老师为本书的出版做了大量的工作，在此，我们向他们表示衷心地感谢。

由于我们水平有限，加上编写时间仓促，书中难免有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

1993年6月

目　录

第一篇　经济学硕士入学考试数学大纲的内容和要求

第一章　微积分 …… 1

一、函数、极限、连续 …… 1

二、一元函数微分学 …… 22

三、一元函数积分学 …… 52

四、多元函数微积分学 …… 91

*五、无穷级数 …… 127

*六、常微分方程 …… 146

第二章　线性代数 …… 163

一、行列式 …… 163

二、矩阵 …… 185

三、向量 …… 206

四、线性方程组 …… 224

五、矩阵的特征值和特征向量 …… 250

*六、二次型 …… 269

第三章　概率论 …… 292

一、事件及其概率 …… 292

二、随机变量及其概率分布 …… 308

三、随机变量的数字特征 …… 337

*四、二维随机变量及其分布与数字特征 …… 352

*五、大数定律与中心极限定理 …… 381

*六、数理统计初步 …… 389

第二篇 数学四、五历年统考试题分类解析

第四章 填空题…… 411
一、微积分…… 411
二、线性代数…… 417
三、概率论…… 422
第五章 选择题…… 428
一、微积分…… 430
二、线性代数…… 435
三、概率论…… 441
第六章 判断题…… 446
一、微积分…… 446
二、线性代数…… 448
三、概率论…… 449
第七章 计算题…… 451
一、微积分…… 451
二、线性代数…… 470
三、概率论…… 486
第八章 论证题…… 492
一、微积分…… 492
二、线性代数…… 499
第九章 应用题…… 506
一、微积分…… 506
二、概率论…… 522

第三篇 模拟试题

摸拟试题（一）
数学四…… 534
数学五…… 538

模拟试题（二）………………………………………………… 542
数学四………………………………………………………… 542
数学五………………………………………………………… 545
参考答案………………………………………………………… 550
附录 A　1993 年经济学硕士入学考试题及参考解答 ……… 556

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第一章　微 积 分

一、函数、极限、连续

（一）内 容 提 要

1. 函数概念.

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x \in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数. 称 D 为函数 f 的定义域，常记作 D_f，称 x 为自变量，y 为因变量. 通常习惯上也直接称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D_f$. y 对应自变量 $x \in D_f$ 的所有取值组成的集合称为函数 f 的值域，记作 Z 或 Z_f. 常用的函数表示法有：图示法、公式法和表格法.

函数的几何特性：

有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正常数 M，使得对任意 $x \in D$，恒有 $|f(x)| < M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

单调性　设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$）成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）. 单调增加与单调减

少函数统称单调函数.

周期性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在常数 $T > 0$,使得对任意 $x \in D$,恒有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数 T_0 称为 $f(x)$ 的周期.

奇偶性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,且 D 关于原点对称;如果对任意的 $x \in D$,恒有 $f(x) = f(-x)$(或 $f(x) = -f(-x)$),则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

反函数、复合函数、隐函数、分段函数:设 $y = f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数,值域为 Z_f. 如果对每个 $y \in Z_f$,都有唯一对应值 $x \in D_f$ 满足 $y = f(x)$,则称 x 为定义在 Z_f 上,以 y 为自变量的函数,并称作函数 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$. 已知函数 $y = f(u)$,$u \in D_f$,$y \in Z_f$,$u = g(x)$,$x \in D_g$,$u \in Z_g$. 如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$(空集),则称函数 $y = f[g(x)]$,$x \in D^* = \{x \mid g(x) \in D_f\}$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数;设 $\Phi(x,y) = 0$ 为含有两个变量 x 和 y 的方程,如果存在函数 $y = f(x)$,使方程变为恒等式 $\Phi(x, f(x)) = 0$,$x \in D_f$,其中 D_f 为非空实数集,则称函数 $y = f(x)$ 是由方程 $\Phi(x,y) = 0$ 确定的隐函数;如果在定义域的各个不相交的子集上,函数分别用不同的分析表达式表示,则称这类函数为分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数 $y = c$(c 为常数),幂函数 $y = x^\alpha$(α 为常数,且 $\alpha \neq 0$),指数函数 $y = a^x$($a \neq 1, a > 0$),对数函数 $y = \log_a x$($a \neq 1, a > o$),三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略). 由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为 $C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$. 一般地说,$C(x) =$ 固定成本 + 可变成本;$R(x) = px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为

销量；$L(x)=R(x)-C(x)$. 商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系，分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念.

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$（或 $0<x_0-x<\delta$）时，恒有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $x\to x_0^+$（或 $x\to x_0^-$）时函数 $f(x)$ 的右极限（或左极限），记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\right)$$

或简记为

$$f(x_0+0)=A(\text{或} f(x_0-0)=A)$$

类似地可定义 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$ 的极限概念，分别记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是：

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A\ (x_0 \text{ 可以为 } \infty)$$

无穷小与无穷大　极限为零的变量称为无穷小量. 在自变量的某个变化趋势下，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为无穷大量. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷

小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量. 若 α、β 为同一变化趋势下的无穷小量，且 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \rho$，则当 $\rho = 0$ 时，称 β 为比 α 高阶的无穷小量，当 $\rho = \infty$ 时，称 β 为比 α 低阶的无穷小量，当 $\rho = c \neq 0$ 时，称 β 为与 α 同阶的无穷小量，特别地当 $\rho = 1$ 时，称 β 为与 α 等价的无穷小量，记作 $\alpha \sim \beta$.

$\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有运算法则：

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

两个重要的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，$\quad \lim\limits_{\varphi(x) \to 0} \frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$，$\quad \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$，

$\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

3. 函数的连续性.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点；如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则有

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值（最大值、最小值定

理)；

(2) $f(a) \neq f(b)$ 时，对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c，必存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = c$(介值定理).

(二) 例题解析

1. 填空.

(1) 已知 $f(e^x - 1) = x^2 + 1$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

(2) 设函数 $y = \cos x$ 在 $(-\pi,0)$ 有定义，则其反函数为______.(用反三角函数表示)

(3) 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$ 是 x 的______无穷小量.

(4) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1} - ax + b\right) = 1$，则 $a =$ ______，$b =$ ______.

(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} + b & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ ______，$b =$ ______.

答：(1) $(-1, +\infty)$ (2) $x = \arccos(-y) - \pi$ (3) 等价 (4) $a = 1, b = 2$ (5) $a = 1, b = 1$.

解析：(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域时，一般应先求出 $f(x)$ 的解析式. 为此，令 $u = e^x - 1$，或 $x = \ln(1+u)$，将其代入已知条件，可得 $f(x) = \ln^2(x+1) + 1$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(2) $y = \cos x$ 在 $(-\pi,0)$ 内严格单调增，存在反函数，由于 $\arccos x$ 的值域为 $(0,\pi)$，若要用反三角函数表示 $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 内的反函数，需先作变换. $x \in (-\pi,0)$ 时，$y = \cos x = -\cos(x+\pi)$，由 $0 < x + \pi < \pi$ 可得 $x = \arccos(-y) - \pi$.

(3) 由 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$ 可知，$x \to 0$ 时，$\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}) \sim x$.

(4) 因 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$，$\lim\limits_{x \to \infty}(\frac{x^2}{x+1} - ax + b) = 1$，故由极限运算法则，有 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}(\frac{x^2}{x+1} - ax + b) = 0$，由此可得

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1, b = 1 - \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = 2$$

(5) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$，由此可得 $b = 1 = a$.

2. 判断下列结论，若正确则在括号内打 √，否则打 ×.

(1) 当 n 足够大时，x_n 越来越接近常数 A，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$. ( )

(2) 零是无穷小量. ( )

(3) 无界数列必为无穷大量. ( )

(4) 已知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 也一定存在. ( )

(5) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. ( )

(6) 定义在同一区间上的两个单调增的函数，其乘积也单调增. ( )

答：(1)×　(2)√　(3)×　(4)×　(5)×　(6)×

解析：(1) 由 $x_n \to A(n \to \infty)$ 的定义可知，正确的提法应是，$n \to \infty$ 时，x_n 与 A 的距离 $|x_n - A| \to 0$，而 $n \to \infty$ 时，x_n 越来越接近 A，不能保证 $|x_n - A| \to 0$，例如，数列 $x_n = \frac{1}{n} + 0.0001$，当 $n \to \infty$ 时，x_n 越来越接近 0，但它与 0 的距离 $|x_n - 0| = \frac{1}{n} + 0.0001 \to 0.0001 \neq 0\ (n \to \infty)$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty}(\frac{1}{n} + 0.0001) \neq 0$.

(2) 在任何变化过程中，零作为一个变量其极限仍为零，故零

为无穷小量.

(3) 无界数列不一定是无穷大量. 如无界数列 $x_n = n + (-1)^n n$，对任意给定的正数 M(不论多么大)，找不到一个正整数 N，使当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > M$ 成立，故该数列不是无穷大量.

(4) 因极根 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 有可能为零，故结论不一定成立. 例如，取 $f(x) = x^2, g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$，则当 $x \to 0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

但 $$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

(5) 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$，故结论不成立.

(6) 结论一般不成立. 如 $f(x) = x$ 在 R 上单调增加，但 $y = f(x)\cdot f(x) = x^2$ 在 R 上为非单调函数.

3. 选择题(每小题给出的四个选项中，仅有一项符合题目要求，把所选项前面的字母填在括号内).

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

则 $x \leqslant 0$ 时，$f[g(x)] = ($ $)$.

(A) $2x$ (B) x^2 (C) $4x^2$ (D) $-4x^2$

(2) $f(x) = \begin{cases} \cos x - x & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos x + x & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ 在其定义域内为 ( ).

(A) 无界函数 (B) 偶函数

(C) 单调函数 (D) 周期函数

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = ($ $)$.

(A) 1 (B) 0 (C) ∞ (D) 不能确定

(4) 在同一变化过程中，结论( ) 成立.

(A) 两个无穷大之差为无穷小

(B) 无穷大与有界变量的乘积仍为无穷大

(C) 有限个无穷大的乘积仍为无穷大

(D) 无穷大除以不为零的变量，其商仍为无穷大

(5) 当 $x \to 0$ 时，无穷小量(　)比其余三个无穷小量都高阶.

(A) $x - \text{arctg}x$　　(B) $\dfrac{x(x+1)}{x-1}$

(C) $a^x - 1(a > 0, a \neq 1)$　(D) $\ln(1+x)$

(6) 下列函数中，(　)有可去间断点 $x = 0$.

(A) $\dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$　　(B) $\text{arctg}\ \dfrac{1}{x}$

(C) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$　(D) $g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

答：(1)C　(2) B　(3) D　(4) C　(5) A　(6)C

解析：(1) 处理分段函数的一般方法是，先处理各分段开区间，然后再单独讨论分段点. 在本题中，当 $x < 0$ 时，$g(x) = -2x > 0$，故对应于 $f(x) = x^2$，从而有 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = 4x^2$，又由 $g(0) = 0$，$f[g(0)] = 0^2 = 0$，综上所述，当 $x \leqslant 0$ 时，$f[g(x)] = 4x^2$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi, \pi]$，$f(x)$ 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续，故为有界函数；设 $x \in (0, \pi]$，则

$$f(x) = \cos x + x,\ -x \in [-\pi, 0)$$

$$f(-x) = \cos(-x) - (-x) = \cos x + x = f(x)$$

同理，$x \in [-\pi, 0)$ 时，亦有 $f(x) = f(-x)$，故 $f(x)$ 为偶函数；由定义易知 $f(x)$ 既不是单调函数，也不是周期函数.

(3) $x \to a$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限有可能同时为零或无穷大，则极限 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为未定式，故(D) 正确.

(4) 两个无穷大之差为未定式. 例如，$n \to \infty$ 时，n，$n+1$，$-2n$，$n + \dfrac{1}{n}$ 皆为无穷大，但有 $n - (n+1) \to -1$，$n - (-2n) \to$

$\infty, n-(n+\frac{1}{n})\to 0$；无穷小量也属于有界变量，无穷大乘无穷小为未定式，故不一定是无穷大；不为零的变量有可能是无穷大，两无穷大相除为未定式；因此，只有(C)正确.

(5) 由极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(x-\operatorname{arctg}x)=0,\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(a^x-1)=\ln a,\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1$$

可知 $x-\operatorname{arctg}x$ 是比 x 高阶的无穷小量，其余三个变量均为与 x 同阶的无穷小量，故结论为(A).

(6) 由极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x-\sin x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

以及 $x\to 0$ 时，$\cos\frac{1}{x}$ 振荡发散，可知 $x=0$ 分别为(A)，(B)，(D)的无穷间断点、跳跃间断点和振荡间断点，仅(C)中 $x=0$ 为可去间断点.

4. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x+2x^2+\cdots+100x^{100}}{x+x^2+\cdots+x^{100}}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]$

(3) $\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\cdot\sin n!$

(5) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x}}$　　(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arctg}x}$

解：(1) $\frac{x+2x^2+\cdots+100x^{100}}{x+x^2+\cdots+x^{100}}$ 为初等函数，且在 $x=1$ 处有定义，连续，因此，极限值等于该点函数值，即：

$$原极限 = \frac{1+2+\cdots+100}{1+1+\cdots+1} = 50.5$$

(2) “$\infty-\infty$”型极限，先变换化为“$\frac{0}{0}$”型极限与一个有限极限的和，再进一步求值，即

$$\begin{aligned}原极限 &= \lim_{x\to\infty}\left[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2e^{\frac{1}{x}}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to\infty}2e^{\frac{1}{x}} \\ &= 1+2=3\end{aligned}$$

其中令 $u=e^{\frac{1}{x}}-1\to 0(x\to\infty)$，$\frac{1}{x}=\ln(1+u)$，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} \\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = 1\end{aligned}$$

(3) “$\frac{0}{0}$”型极限. 分式的分子与分母均含有零因子$(x+1)$，故应先作变换，消去零因子后再定值，令 $y=x^{\frac{1}{15}}$，则有

$$\begin{aligned}原极限 &= \lim_{y\to -1}\frac{1+y^5}{1+y^3} = \lim_{y\to -1}\left[1+\frac{y^3(y^2-1)}{y^3+1}\right] \\ &= \lim_{y\to -1}\frac{y^3(y-1)}{y^2-y+1}+1 = \frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

(4) $n\to\infty$ 时，$\sin n!$ 的极限不存在，但为有界变量，且有 $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0$. 故由无穷小量与有界变量乘积仍为无穷小量的性质有

$$原极限 = 0$$

(5) “1^∞”型极限，一般先计算极限