71

01861
L47
1

梁灿彬

微分几何入门与广义相对论

上册

WEIFENJIHE RUMEN YU GUANGYIXIANGDUILUN

WEIFENJIHE RUMEN YU GUANG

北京师范大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论/梁灿彬 .-北京:北京师范大学出版社,2000.4
ISBN 7-303-04703-4

Ⅰ.微… Ⅱ.梁… Ⅲ.①微分-几何-研究生-教材 ②广义相对论-研究生-教材 Ⅳ.①0172.1 ②0412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 32212 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京市黄坎印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787mm×1092mm 1/16 印张:20.75 字数:440 千字
2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷
印数:1~2000 定价:28.00 元

序 言

笔者从 1981 年起在美国芝加哥大学相对论组任访问学者两年. 出国前, 由于种种原因, 我对广义相对论只略知皮毛, 对其必备的数学工具——近代微分几何——所知则近乎为零. 得益于芝大相对论组浓郁的学术气氛, 更由于 Wald 教授(我的导师)和 Geroch 教授的悉心指导, 我很快就对这一领域产生了浓厚兴趣. 作为教师, 我在回国前就萌发出一种强烈冲动, 要把这两年学到的东西尽可能教给我的学生. 回国后立即开出了第一门研究生课<<微分几何与广义相对论>>, 接着又陆续开出几门后续课程, 并曾应邀到外地讲课. 十数年来的讲稿后来成为写作本书的蓝本. 回顾这十多年, 我其实是边教边学, 尽力加深对所教内容的理解. 遇到百思不解的问题, 我还会向我的良师益友 Wald 教授(或 Geroch 教授)写信求教, 每次都收到热情回信, 信中的精辟见解常常使我茅塞顿开. 物理学工作者初次接触近代微分几何时的常见感觉是“抽象难懂”, 不得其门而入. 我想也许我能在减轻难度方面对他们有所帮助. 首先, 当时我也是个刚学不久的人, 对入门时的困难有切身感受. 其次, 我过去的教学经验也许在降低难度方面可以派上用场. 降低难度不但成为我十多年来教学工作的一种自我追求, 而且也成为本书写作的一个努力方向. 为了降低难度, 往往不惜耗费笔墨详加解说, 这是本书篇幅较大的一个重要原因.

近代微分几何不但对学习广义相对论至关紧要, 而且对物理学(乃至工程学)的许多分支都有重要应用价值. 许多物理工作者从自身专业的国际学术会议和大量文献中发现近代微分几何对深入搞好本专业研究已日渐必需, 却苦于找不到学习这门学问的入门途径. 北师大物理系的领导较早认识到近代微分几何对物理工作者的重要性, 鼓励和支持我从 1995 年开始把我的第一门研究生课<<微分几何与广义相对论>>下放为高年级本科选课(约 70 学时). 该课的一半以上课时用于从零开始讲授微分几何的入门知识(相当于本书前五章), 所余课时的一半以上用于介绍如何以微分几何为工具剖析业已学过的狭义相对论(相当于本书第 6 章), 最后才介绍一点广义相对论的入门知识(相当于本书第 7 章的一部分). 实践表明, 喜欢抽象思维、学过微积分学以及线性代数基本知识的物理系本科生只要花出足够时间听课、复习和完成作业(平均每周约 5 题), 就可在期末考试中取得及格以上的成绩. 我还深感欣慰地发现部分本科生(含二年级生)竟然能进入“心领神会”的美妙境界并产生浓厚兴趣. 他们还继续选学笔者所开的后续研究生课程(包括本书从第 7 章§7.4 起的全部内容), 而且表现出色.

本书分上下两册. 上册共有十章, 前五章从零开始讲授微分几何入门知识, 第 6 章剖析狭义相对论, 后四章介绍广义相对论的基本内容. 虽然前五章在选材和写法上适当照顾到相对论的需要, 但不从事相对论工作的物理工作者也可把它作为微分几何的入门读物. 下册将介绍广义相对论的进一步内容(侧重于整体分析, 例如时空的整体因果结构、渐近平直时空、引力坍缩、Kerr-Newman 黑洞、时空的 3+1 分解以及广义相对论的拉氏和哈氏形式)及其所需的进一步数学工具(例如共形变换及李群和李代数). 全书既可作为研究生课教材(上册还可作为本科高年级选修课教材), 也可作为相对论工作者的参考读物.

为了适应不同程度读者的需要，本书内容分为必读和选读两大部分. 必读部分用宋体排印，选读部分则排成楷体，并用[选读]和[选读完]字样标出. 必读部分的内容自成体系，不会由于略去选读内容而影响后续必读内容的学习. 各页的脚注(如果有的话)与选读内容类似. 初次学习的读者最好略去全部选读和脚注内容.

本书各章都配有为数不少的习题. 习题的难易程度十分悬殊. 最难的习题在题号前标有*号. 这是指题目本身的难度最大，与所需内容是否涉及选读内容无关. 题号前标有~号的题是笔者向读者推荐的比较基本的习题，其中有很易的题，也有较难的题. 为了降低难度，对多数较难题都给了提示. 如果时间实在不够，也可在 ~ 号题中挑选部分题目完成. 完全不做习题而一章一章读下去的做法似乎也未尝不可，不过很可能在读到稍后章节时发现前面根基不稳，难于继续稳步前进.

限于笔者的数理修养以及对本书所涉专业方向的理解水平，书中大小错误和不妥之处一定不少. 作为尽量减少错误和不妥的一个重要措施，笔者请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读本书初稿的部分章节，他们是：(以姓氏汉语拼音为序. 有**号者为教授或研究员，有*号者为副教授或副研究员.) 敖滨，曹周健，戴陆如，戴宪新，高长军，高思杰，，贺晗，胡波，*黄超光，**邝志全，**刘辽，李晓勤，马永革，南俊杰，**裴寿镛，**强稳朝，沈华，*田清钧，*田晓岑，王波波，吴金闪，吴小宁，**杨孔庆，**俞允强，*杨学军，张红宝，张朋，(“朋”为同音字，实为草头加凡.) 周彬，朱宗宏. 以上诸君对所读的部分章节都提出过许多意见和建议，其中很大一部分非常宝贵. 笔者要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是芝加哥大学的 Wald 教授，他不但是笔者步入本领域的优秀启蒙导师，而且对笔者回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 他的力作 General Relativity 是本书的最重要参考文献. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与笔者的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使笔者受益殊深. 笔者还要感谢北师大物理系刘辽教授和大连理工大学物理系桂元星教授，他们的推荐使本书得以纳入北师大出版社的出版计划并获得出版社的财政支持. 感谢赵峥教授和王永成教授对本书的写作和出版的密切关心和大力支持. 感谢北师大出版社李桂福编审对本书出版的积极支持与帮助. 感谢北京市教委对本书写作和出版的立项资助，也感谢北师大出版社提供的财政支持.

梁灿彬

2000 年 2 月于北京师范大学

上册目录

第 1 章　拓扑空间简介

§1.1　集论初步

确切地指定了的若干事物的全体叫一个集合(set), 简称集. 集中的每一事物叫一个**元素**(element)或**点**(pcint). 若 x 是集 X 的元素, 则说"x 属于 X", 并记作 $x \in X$. 有两种表示集合的方法, 一种是一一列出其元素, 元素间用逗号隔开, 全体元素用花括号括起来, 如

$$X = \{1, 4, 5.6\}$$

表示由实数 1, 4 及 5.6 构成的集. 另一种表示法是指出集中元素的共性, 如

$$X = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

表示 X 是全体实数的集合(这一特定集的通用记号为 $\mathbb{R}$), 而

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$$

则表示全体大于 9 的实数的集合.

不含元素的集叫**空集**(empty set), 记作$\varnothing$.

定义 1　若集 A 的每一元素都属于集X, 就说 A 是 X 的**子集**(subset), 也说 A 含于 (is contained in) X 或 X 含(contains) A, 记作 $A \subset X$ 或 $X \supset A$. A 和 B 叫**相等的**(记作 $A = B$), 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$. A 称为 X 的**真子集**(proper subset), 若 $A \subset X$ 且 $A \neq X$.

注　上述定义的更确切表述本应是"集 A 叫集 X 的子集, 当且仅当 A 的每一元素都属于 X". 但为方便起见, 凡在定义中的"若"或"当"都是"当且仅当"之意.

定义 2　集合 A, B 的并集、交集、差集和补集定义为(本书用 := 作为定义号, 读作"定义为")

并集(union) $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

交集(intersection) $A \cap B := \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$. (条件"$x \in A, x \in B$"是"$x \in A$ 且 $x \in B$"的简写, 下同.)

差集(difference) $A - B := \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ ($\notin$代表"不属于"). (数学书常把差集记作 $A \backslash B$ 或 $A \sim B$.)

若 A 是 X 的子集, 则 A 的**补集**(complement) $-A$ 定义为 $-A := X - A$.

定理 1-1-1　　以上集运算服从如下规律:

交换律　$A \cup B = B \cup A$,　$A \cap B = B \cap A$.

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

De Morgan 律　$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,　$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

证明　作为例子, 我们证明 De Morgan 律的第二式. 为此只须证明等式两边互相包含.

(A) 设 $x \in A - (B \cap C)$, 则 $x \in A$, $x \notin B \cap C$. 后者导致 $x \notin B$ 或 $x \notin C$. $x \in A$ 与 $x \notin B$ 结合得 $x \in A - B$; $x \in A$ 与 $x \notin C$ 结合得 $x \in A - C$, 故 $x \in (A - B) \cup (A - C)$, 因而

$$A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C).$$

(B) 设 $x\in(A-B)\cup(A-C)$，则 $x\in A-B$ 或 $x\in A-C$. 前者导致 $x\in A$，$x\notin B$；后者导致 $x\in A$，$x\notin C$. 两者结合得 $x\in A$, $x\notin B\cap C$，故 $x\in A-(B\cap C)$，因而

$$(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C).$$

其他各律由读者自证. □

定义 3 集合 X, Y 的**卡氏积** $X\times Y:=\{(x,y)\,|\,x\in X, y\in Y\}$. 就是说，$X\times Y$ 是这样一个集合，它的每一元素是 X 的一个元素 x 和 Y 的一个元素 y 组成的一个有序对 (x,y).

例 $\mathbb{R}^2:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (共 n 个 $\mathbb{R}$). $\mathbb{R}^2$ 的元素是由两个实数构成的有序对，这两个实数就称为该元素的**自然坐标**. 类似地，$\mathbb{R}^n$ 中每一元素有 n 个自然坐标. 可见 $\mathbb{R}^n$ 是天生就有坐标的，但其他集合则未必. 利用自然坐标可给 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个元素定义距离的概念.

定义 4 设 $x=(x^1,\cdots,x^n)$, $y=(y^1,\cdots,y^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个元素，则其间**距离** $|y-x|$ 定义为

$$|y-x|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i-x^i)^2}.$$

定义 5 设 X, Y 为集合. 一个由 X 到 Y 的**映射**(map) f 是一个法则，它给 X 中的每一元素指定 Y 中的一个唯一的对应元素. X 中的元素称为**原像**，(或**逆像**，即 inverse image.) Y 中与之对应的元素称为**像**(image). 映射 $f:\ X\to Y$ 和 $f':\ X\to Y$ 称为**相等的**，若 $f(x)=f'(x)\quad\forall x\in X$.

注 $f: X\to Y$ 表示 f 是由 X 到 Y 的映射，$f: x\mapsto y$ 或 $f(x)=y$ 表示 $x\in X$ 在映射 f 下的像是 y.

例 普通微积分中的单值函数 $y=f(x)$ 就是一个由 $\mathbb{R}$ (或其子集)到 $\mathbb{R}$ 的映射.

注 由 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射给出一个 2 元函数，因为 $\mathbb{R}^2$ 中每点由两个实数(自然坐标)描写. 同理，由 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射给出 m 个 n 元函数.

定义 6 映射 $f: X\to Y$ 叫**一一的**(one-to-one)，若任一 $y\in Y$ 有不多于一个逆像(可以没有). $f: X\to Y$ 叫**到上的**(onto)，若任一 $y\in Y$ 都有逆像(可多于一个). ①

注 (1) 用 $f[X]$ 代表 X 的全体元素在映射 f 下的像的集合，则 f 为到上映射的充要条件是 $f[X]=Y$. (2) 若 f 为一一映射，则存在逆映射 $f^{-1}:\ f[X]\to X$. 然而，不论 $f: X\to Y$ 是否有逆，都可定义任一 $B\subset Y$ 在 f 下的"逆像" $f^{-1}[B]$ 为 $\{x\in X|f(x)\in B\}$. 注意这里的"逆像"是 X 的子集而不是 X 的元素，例如，如果 X 中有(且仅有)两个元素 x 和 x' 在 f 作用(即映射)下的像都是 $y\in Y$，则虽然 $f^{-1}:\ Y\to X$ 不存在，但把 y 看作 Y 的独点子集(记作 $\{y\}$)时 $f^{-1}[\{y\}]$ 仍有意义，含义为 $f^{-1}[\{y\}]=\{x,x'\}\subset X$.

定义 7 $f:\ X\to Y$ 称为**常值映射**，若 $f(x)=f(x')\quad\forall x, x'\in X$.

---

① 不少数学书把本书的一一和到上映射分别叫**单射**和**满射**，把既是单射又是满射的映射叫**一一映射**. 于是它们的一一映射强于本书的一一映射.

定义 8　设 X, Y, Z 为集，$f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 为映射，则 f 和 g 的**复合映射** $g \circ f$ 是从 X 到 Z 的映射，定义为 $(g \circ f)(x) := g(f(x)) \in Z \ \forall x \in X$，见图 1-1.

注　若 $X = Y = Z = \mathbb{R}$，则复合映射 $g \circ f$ 就是熟知的一元复合函数.

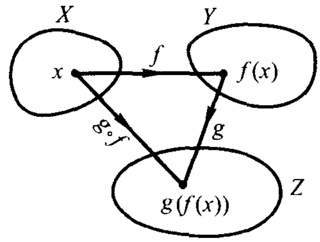
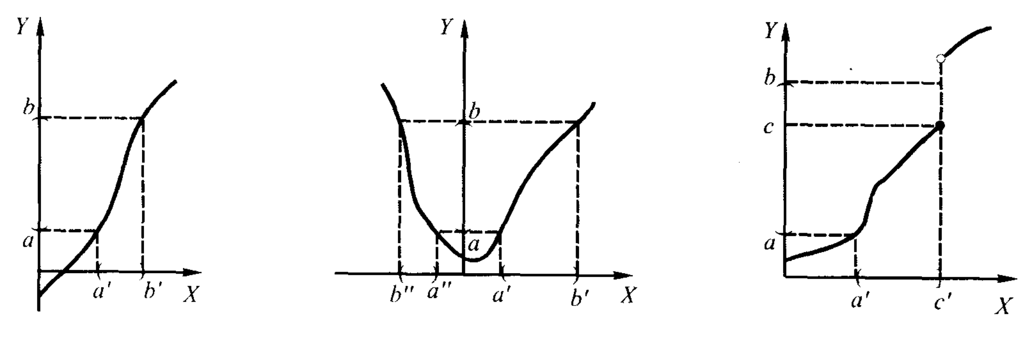


图 1-1　复合映射 $g \circ f$. 注意先执行 f 后执行 g.

若 X 和 Y 是一般的集，对 X 与 Y 之间的映射只能提出“一一”和“到上”这两个要求. 但若 X 和 Y 还指定了某种结构，则往往可对 $f: X \to Y$ 提出更多要求. 例如，对 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [对应于一元函数 $f(x)$] 可要求它是连续的甚至光滑的. $f(x)$ 的连续性在微积分中早有定义(“$\varepsilon-\delta$ 定义”)，这里用记号 $\forall$(代表“对任一”)和 $\exists$(代表“存在”)重述如下：(1) $f(x)$ 在 x 点连续，若 f 在 x 的某邻域有定义，且 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ 使当 $|x' - x| < \delta$ 时有 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$；(2) f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，若它在 $\mathbb{R}$ 上任一点连续. 这一定义依赖于 $\mathbb{R}$ 中任二元素的距离概念(对 $\mathbb{R}$ 而言距离就是坐标之差)，似乎无法推广到没有距离定义的两个集合之间的映射. 然而细想发现，$\varepsilon-\delta$ 定义可用开区间概念(而无需距离概念)重新表述如下：设 $X = \mathbb{R}$，$Y = \mathbb{R}$，映射 $f: X \to Y$ 叫做连续的，若 Y 中任一开区间的“逆像”都是 X 的开区间之并. 这一表述与通常的 $\varepsilon-\delta$ 表述的等价性可从图1-2 得到启发：图 a 的映射 $f: X \to Y$ 按 $\varepsilon-\delta$ 定义为连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a, b) 的逆像为开区间 (a', b')；图 b 的映射连续，与此相应，Y 中任一开区间 (a, b) 的逆像为开区间 (a', b') 与 (b'', a'') 之并；图 c 的映射 $f: X \to Y$ 在 $c' \in X$ 处不连续，与此相应，在 Y 中存在开区间 (a, b)，其“逆像” $f^{-1}[(a, b)] = (a', c'] \subset X$ 不是开区间，也不是开区间之并. 以上讨论从一个侧面说明“开区间之并”这一概念的用处：可以定义映射 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的连续性. 其实这一概念还有很多用处，因此有必要推广到除 $\mathbb{R}$ 外的各种集合 X. 为方便起见，把 $\mathbb{R}$ 中的任一可以表



(a)　f 连续，任一开区间 (a, b) 的逆像是开区间 (a', b').

(b)　f 连续，任一开区间 (a, b) 的逆像是开区间之并 $(a', b') \cup (b'', a'')$.

(c)　f 在 $c' \in X$ 不连续，存在开区间 (a, b)，其逆像 $(a', c']$ 不是开区间之并.

图 1-2　用开区间表述连续性. 曲线代表映射 $f: X \to Y$.

为开区间之并的子集(包括空集$\varnothing$)称为开子集. 为把开子集概念推广到任意集合 X, 应先找出 $\mathbb{R}$ 中开子集的本质的、抽象的(因而可以推广的)性质. 它们是: (a) $\mathbb{R}$ 和空集 $\varnothing$ 都是开子集; (b) 有限个开子集之交仍是开子集; (c) 任意个开子集之并仍是开子集. 把这三个性质推广, 就可给任意集合 X 定义开子集概念. 定义了开子集的集合叫拓扑空间. 由开子集概念出发又可定义许多概念并证明许多定理, 从而发展为一门完整丰富的学科分支——点集拓扑学. 以下两节将对拓扑空间的最基本内容作一介绍.

§1.2 拓扑空间

如上节末所述, $\mathbb{R}$ 的子集分为开子集和非开子集两大类, 任一子集要么是开的, 要么是非开的. (不要把非开子集称为闭子集. 根据后面要讲的闭子集定义, 子集可以不开不闭.) 对任意集合 X 也可用适当方式指定其中的某些子集是开的, 其他为非开的. 为使这种指定有用, 我们约定任何指定方式必须满足三个要求: (a) 集 X 本身和空集$\varnothing$为开子集; (b) 有限个开子集之交为开子集; (c) 任意个开子集之并为开子集. 满足这三个要求的指定方式很多. 例如, 设 X 为任意集合, 可以指定 X 及$\varnothing$为开子集, 其他子集都为非开. 这当然满足上述三要求, 其特点是开子集最少, 只有两个. 也可采用另一种极端的指定, 即指定 X 的任意子集都是开子集. 不难看出这种指定也满足上述三要求. 事实上, 上述两种指定都没有太多用处, 但它们至少能说明满足上述三要求的指定方式不止一种. 我们说, 每种满足上述三要求的指定给集合 X 赋予了一种附加结构, 称为拓扑结构. 对定义了拓扑结构的集合可以指着它的任一子集问: "这是开子集吗?" 答案非"是"即"否". 反之, 对没有定义拓扑结构的集合, 这样的问题毫无意义. 定义了拓扑结构的集合 X 的全体开子集也组成一个集合, 称为X的一个拓扑(topology), 记作$\mathscr{T}$(是topology为首字母的花体大写). 用$\mathscr{P}$ 代表由 X 的全体子集组成的集合(图1-3), 则 X 的任一开子集 O 和任一非开子集 V 都是$\mathscr{P}$ 的元素. X 的全体开子集组成$\mathscr{P}$ 的一个子集$\mathscr{T}$ (注意它不是 X 的子集), 它就是 X 的拓扑. 请注意符号$\subset$同$\in$的区别: $O\subset X$ 只表明 O 是 X 的子集, 而$O\in\mathscr{T}$ 则表明 O 是 X 的开子集. 以上铺垫有助于理解如下用数学语言表述的定义.

图 1-3 $\mathscr{P}$ 是集合 X 的所有子集的集合. X 中任何子集(如O,V)都是 $\mathscr{P}$ 的元素. $\mathscr{T}$是$\mathscr{P}$ 的这样一个子集, 其中每一元素(如 O)是 X 的一个开子集.

定义 1 集合 X 的一个**拓扑**$\mathscr{T}$是 X 的满足以下条件的子集的集合:

(a) $X,\varnothing\in\mathscr{T}$;

(b) 若 $O_i\in\mathscr{T}$, $i=1, 2, \cdots n$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}O_i\in\mathscr{T}$ ($\bigcap\limits_{i=1}^{n}O_i$ 表示这 n 个 O_i之交);

(c) 若 $O_\alpha\in\mathscr{T}\ \forall\alpha$, 则$\bigcup\limits_{\alpha}O_\alpha\in\mathscr{T}$. ($O_\alpha\in\mathscr{T}$ 后加 $\forall\alpha$ 表示每一个 O_α 都属于$\mathscr{T}$, 而且

O_α 的个数没有限制. $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T}$ 表示所有 O_α 之并属于 $\mathscr{T}$.)

定义 2　指定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为**拓扑空间**(topological space). X 的子集 O 叫**开子集**(简称**开集**或**开域**), 若 $O \in \mathscr{T}$.

同一集合 X 可定义不同拓扑 $\mathscr{T}$ (满足定义 1 的 $\mathscr{T}$ 可以很多). 设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 都是 X 的拓扑, 则 X 的子集 A 可能满足 $A \in \mathscr{T}_1$, $A \notin \mathscr{T}_2$, 即 A 对 $\mathscr{T}_1$ 而言(用 $\mathscr{T}_1$ 衡量)是开集而对 $\mathscr{T}_2$ 而言不是开集. 可见 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 把 X 定义为两个不同的拓扑空间. 为明确所选拓扑起见, 用 $(X, \mathscr{T})$ 代表拓扑空间. 于是 $(X, \mathscr{T}_1)$ 和 $(X, \mathscr{T}_2)$ 代表不同拓扑空间, 虽然它们的"底集"都是 X. 在明确选定一个拓扑后也可只用 X 代表拓扑空间.

例 1　设 X 为任意集合, 令 $\mathscr{T}$ 为 X 的全部子集的集合, 则它显然满足定义 1 的三条件, 故构成 X 的一个拓扑, 叫**离散拓扑**(discrete topology).

例 2　设 X 为任意集合, 令 $\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$, 则它显然满足定义 1 的三条件, 故构成 X 的一个拓扑, 叫**凝聚拓扑**(indiscrete topology). 凝聚拓扑是元素最少的拓扑, 而离散拓扑是元素最多的拓扑.

例 3

(1) 设 $X = \mathbb{R}$, 则 $\mathscr{T}_u := \{\mathbb{R}$ 中能表为开区间之并的子集$\}$ 称为 $\mathbb{R}$ 的**通常拓扑** (usual topology).

(2) 设 $X = \mathbb{R}^n$, 则 $\mathscr{T}_u := \{\mathbb{R}^n$ 中能表为开球之并的子集$\}$称为 $\mathbb{R}^n$ 的**通常拓扑**(usual topology), 其中**开球**(open ball)定义为 $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - x_0| < r\}$, x_0 称为球心, $r > 0$ 称为半径. $\mathbb{R}^2$ 中的开球亦称**开圆**, $\mathbb{R}$ 中的开球就是开区间.

不难验证(1)和(2)中的 $\mathscr{T}_u$ 满足定义 1 的三条件. 根据上述定义, $\mathbb{R}$ 中任一开区间用 $\mathscr{T}_u$ 衡量都是开集. 然而, 原则上也可选其他拓扑使 $\mathbb{R}$ 成为不同于$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$的拓扑空间. 例如, 若以凝聚拓扑衡量, 则除 $\mathbb{R}$ 及 $\varnothing$ 外都不是开集; 反之, 若以离散拓扑衡量, 则 $\mathbb{R}$ 中任一子集(包括闭区间和半闭区间)都是开集. 今后在把 $\mathbb{R}^n$ 看作拓扑空间时, 如无说明就是指$(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_u)$.

例 4　设$(X_1, \mathscr{T}_1)$和$(X_2, \mathscr{T}_2)$为拓扑空间, $X = X_1 \times X_2$ (即 X 是 X_1 与 X_2 的卡氏积), 定义 X 的拓扑为

$$\mathscr{T} := \{O \subset X \,|\, O \text{ 可表为形如 } O_1 \times O_2 \text{ 的子集之并}, \ O_1 \in \mathscr{T}_1, \ O_2 \in \mathscr{T}_2\},$$

则 $\mathscr{T}$ 称为 X 的**乘积拓扑**(product topology). 因 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, 设 $\mathscr{T}_u$ 为 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑, 则由上式可定义 $\mathbb{R}^n$ 的乘积拓扑, 可以证明这与例3 中用开球定义的拓扑一致.

例 5　设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, A 为 X 的任一子集. 把 A 看作集合, 当然也可指定拓扑(记作 $\mathscr{S}$, 是 s 的花体大写.) 使 A 成为拓扑空间, 记作 $(A, \mathscr{S})$. 由于 A 是 X 的子集, 我们希望 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{T}$ 有尽量密切的联系. 如果 $A \in \mathscr{T}$, 问题就很简单, 只须定义 $\mathscr{S} := \{V \subset A \,|\, V \in \mathscr{T}\}$. 然而, 如果 $A \notin \mathscr{T}$, 按上述定义就有 $A \notin \mathscr{S}$, 违背定义 1 的条件(a). 因此 $\mathscr{S}$ 的上述定义不合法. 一个巧妙的定义是

$$\mathscr{S} := \{V \subset A \,|\, \exists O \in \mathscr{T} \text{ 使 } V = A \cap O\}. \tag{1-2-1}$$

由上式可以证明即使 $A \notin \mathscr{T}$ 也有 $A \in \mathscr{S}$, 而且 $\mathscr{S}$ 满足定义 1 的其他条件(习题). 这样定义

的$\mathscr{S}$叫做$A(\subset X)$的由$\mathscr{T}$导出的**诱导拓扑**(induced topology). 以后在把$(X,\mathscr{T})$的子集A看作拓扑空间时, 如无声明都指$(A,\mathscr{S})$, 其中$\mathscr{S}$是由$\mathscr{T}$诱导的拓扑.

下面的例子有助于加深对诱导拓扑的理解. $\mathbb{R}^2$中以$x_0\in\mathbb{R}^2$为心的单位圆S^1定义为$S^1:=\{x\in\mathbb{R}^2|\ |x-x_0|=1\}$. 设$A\subset\mathbb{R}^2$是$S^1$. 由于它不能表为$\mathbb{R}^2$中的开球之并(一条线窄到装不下任何开圆), A用$\mathbb{R}^2$的$\mathscr{T}_u$衡量不是开的. 用式(1-2-1)给A定义诱导拓扑$\mathscr{S}$, 则不但A用$\mathscr{S}$衡量是开的, 而且, 设V是A中的任意一段(不含首末两点), 如图1-4的粗线所示, 则虽然V用$\mathscr{T}_u$衡量不是开集, 用$\mathscr{S}$衡量却是开的, 因为存在开圆$O\in\mathscr{T}$使$V=A\cap O$.

利用开集概念可对拓扑空间之间的映射定义连续性. 下面给出两个等价的连续定义, 等价性的证明留作习题.

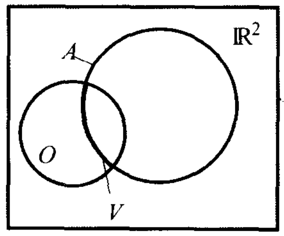


图1-4 粗线段(不含端点)是A的子集V, 因V可看作$O\subset\mathscr{T}_u$与A之交, 由式(1-2-1)可知$V\in\mathscr{S}$.

定义 3a 设$(X,\mathscr{T})$和$(Y,\mathscr{S})$为拓扑空间. 映射$f: X\to Y$称为**连续的**(continuous), 若$f^{-1}[O]\in\mathscr{T}\quad\forall O\in\mathscr{S}$. [$f^{-1}[O]$的定义见§1.1定义6后的注之(2).]

定义 3b 设$(X,\mathscr{T})$和$(Y,\mathscr{S})$为拓扑空间. $f: X\to Y$称为**在$x\in X$上连续的**, 若$\forall G'\in\mathscr{S}$, $f(x)\in G'\ \exists\, G\in\mathscr{T}$, $x\in G$使$f[G]\subset G'$. $f: X\to Y$叫**连续的**, 若它在所有$x\in X$上连续.

注 不难看出, 若$X=Y=\mathbb{R}$, $\mathscr{T}=\mathscr{S}=\mathscr{T}_u$, 定义3b就回到熟知的$\varepsilon-\delta$定义, 而定义3b与定义3a等价, 故定义3a也回到$\varepsilon-\delta$定义.

定义 4 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$和$(Y,\mathscr{S})$称为互相**拓扑同胚的**(homeomorphic), 若$\exists$映射$f: X\to Y$, 满足(a)f是一一到上的; (b)f及f^{-1}都连续.[①] 这样的f称为$(X,\mathscr{T})$与$(Y,\mathscr{S})$之间的一个**拓扑同胚**(homeomorphism).

普通函数$y=f(x)$的连续性和可微性用C^r表示, 其中r为非负整数, C^0代表连续, C^r代表r阶导数存在并连续, C^∞代表光滑. 虽然用开集概念可以巧妙地把C^0性推广到拓扑空间之间的映射, 但$r>0$的C^r性则不能. 事实上, 对拓扑空间之间的映射的最高要求已体现在拓扑同胚的定义中. 从纯拓扑学角度看, 两个互相拓扑同胚的拓扑空间就“像得不能再像”, 可以视作“一样”.

例 6 任一开区间$(a,b)\subset\mathbb{R}$与$\mathbb{R}$拓扑同胚(证明留作习题).

例 7 圆周$S^1\subset\mathbb{R}$配以诱导拓扑(由$\mathbb{R}^2$的$\mathscr{T}_u$诱导)可看作拓扑空间. 它与$\mathbb{R}$是否拓扑同胚? 乍看以为可用图1-5定义从S^1到$\mathbb{R}$的拓扑同胚映射f. 然而点$a\in S^1$无像, 故f不是从S^1到$\mathbb{R}$的映射. 不难证明$f:(S^1-\{a\})\to\mathbb{R}$是拓扑同胚映射, 可见挖去一点的圆周与$\mathbb{R}$拓扑同胚. 然而$S^1$却与$\mathbb{R}$非拓扑同胚, 下节(选读)在定理1-3-8后将给出简洁证明, 其中用到下节要讲的“紧致”概念. 要点是: (1)S^1紧致而$\mathbb{R}$非紧致; (2)紧致性在连续映射下不变. 可见S^1与$\mathbb{R}$不可能拓扑同胚.

① 有余力的读者试举例说明确有其逆不连续的一一到上连续映射. (提示: 用离散和凝聚拓扑.)

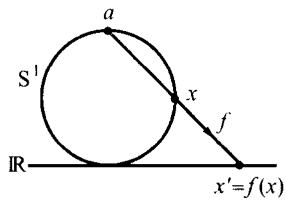


图 1-5　除 a 外任一点 $x\in S^1$ 都可用图示方法定义在 $\mathbb{R}$ 的像 x'

例 8　考虑欧氏平面上的一个圆和一个椭圆(均指圆周). 用欧氏几何眼光看, 两者当然不同. 在欧氏几何中有距离概念, 圆和椭圆就是用距离定义的. 但从纯拓扑学的角度看, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_u)$ 是一个拓扑空间, 圆周 S^1 和椭圆周 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的两个子集: $S^1, E\subset\mathbb{R}^2$. 可用 $\mathscr{T}_u$ 给 S^1 及 E 分别定义诱导拓扑使成两个拓扑空间 $(S^1, \mathscr{S}_{S^1})$ 及 $(E, \mathscr{S}_E)$. 可以证明(直观上不难相信)存在拓扑同胚 f: $(S^1, \mathscr{S}_{S^1})\to(E, \mathscr{S}_E)$, 所以从纯拓扑眼光看两者完全一样. 反之, 若把 S^1 剪一缺口, 其产物将与 $\mathbb{R}$ 拓扑同胚, 因而与 S^1 和 E 有不同拓扑. 进一步可证, 只要不剪不粘, $\mathbb{R}^2$ 上任一连续曲线无论怎样变形, 变形前后互相拓扑同胚. 故拓扑学又被通俗地称为“橡皮膜上的几何学”. 拓扑学不同于欧氏几何学, 重要区别就是它没有距离概念. 初看这种连距离都谈不上的学问不会有多大用处, 其实不然. 一个简单例子是电路问题. 图 1-6a 和 b 虽然从欧氏几何看有很大差别, 但从电路角度看则全同. 反之, 若把图 b 中任一支路剪断(成为图 c), 从电路看就十分不同. 这与拓扑学关心的角度一样. 事实上, 拓扑学对复杂电路(网络)的研究很有用, 形成了“网络拓扑学”这一应用分支.

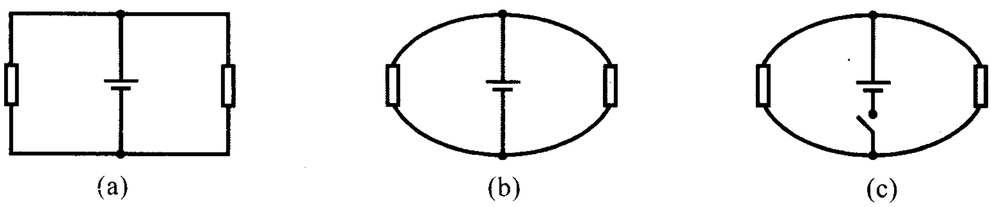


图 1-6　从电路或拓扑学角度看, 图 a 与 b 全同, 图 b 与 c 不同. 从几何学看则不然.

定义 5　$N\subset X$ 称为 $x\in X$ 的一个**邻域**(neighborhood), 若 $\exists\, O\in\mathscr{T}$ 使 $x\in O\subset N$.

注　设 $X=\mathbb{R}$, $N=(a,b)$, 则 N 是 x 的邻域当且仅当 $a<x<b$. 请特别注意“擦边”情况: 若 $x=a$, 则 N 并非 x 的邻域, 因为 $\mathbb{R}$ 不存在开子集 O 使 $x\in O\subset N$. 直观地说, 要使 (a,b) 是 x 的邻域, x 应有“左邻右舍”在 (a,b) 中. 而 $x=a$ 的任何“左邻”都不属于 (a,b), 故 (a,b) 不应是 $x=a$ 的邻域. 可见定义 5 在一定程度上反映了这一直观要求.

定理 1-2-1　$A\subset X$ 是开集当且仅当 A 是 x 的邻域 $\forall\, x\in A$.

证明

(A) 设 A 为开, 则 $\forall x\in A$, $\exists\, A\in\mathscr{T}$ 使 $x\in A\subset A$, 故由定义 5 知 A 是 x 的邻域.

(B) 设 A 是 x 的邻域 $\forall\, x\in A$, 令 $O=\bigcup\limits_{x\in A}O_x$ (O_x 是定义 5 中满足 $x\in O_x\subset A$ 的 $O_x\in\mathscr{T}$), 则 $O=A$ (读者试补证这一等式), 又由定义 1 (c)知 $O\in\mathscr{T}$, 故 $A\in\mathscr{T}$, 即 A 为开集. □

定义 6　$C\subset X$ 叫**闭集**(closed set), 若 $-C\in\mathscr{T}$.

定理 1-2-2　闭集有以下性质：

(a) 任意个闭集的交集是闭集；

(b) 有限个闭集的并集是闭集；

(c) X 及 $\varnothing$ 是闭集.

证明　不难由定义 6, 1 及 De Morgan 律得证. □

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间, $A\subset X$. A 的闭包、内部和边界分别定义如下.

定义 7　A 的**闭包**(closure) $\overline{A}$ 是所有含 A 的闭集的交集, 即

$$\overline{A}:=\bigcap_{\alpha}C_\alpha,\quad A\subset C_\alpha, \text{ 且 } C_\alpha \text{ 为闭}.$$

定义 8　A 的**内部**(interior) $\mathrm{i}(A)$ 是所有含于 A 中的开集的并集, 即

$$\mathrm{i}(A):=\bigcup_{\alpha}O_\alpha,\quad O_\alpha\subset A,\ O_\alpha\in\mathscr{T}.$$

定义 9　A 的**边界**(boundary) $\dot{A}:=\overline{A}-\mathrm{i}(A)$.

定理 1-2-3　$\overline{A}$, $\mathrm{i}(A)$ 及 $\dot{A}$ 有以下性质：

(a) (1) $\overline{A}$ 为闭集, (2) $A\subset\overline{A}$, (3) $A=\overline{A}$ 当且仅当 A 为闭集；

(b) (1) $\mathrm{i}(A)$ 为开集, (2) $\mathrm{i}(A)\subset A$, (3) $\mathrm{i}(A)=A$ 当且仅当 $A\in\mathscr{T}$；

(c) $\dot{A}$ 为闭集.

证明　(a), (b)易证. (c)的证明如下. $X-\dot{A}=X-[\overline{A}-\mathrm{i}(A)]=(X-\overline{A})\cup\mathrm{i}(A)$, 其中最后一步用到习题 2 的结论. 因 $\overline{A}$ 为闭, 故 $X-\overline{A}$ 为开, 加之 $\mathrm{i}(A)$ 为开, 故 $X-\dot{A}$ 为开, 因而 $\dot{A}$ 为闭. □

下面的定义在下节全节以及下章开始时要用到：

定义 10　X 的开子集的集合 $\{O_\alpha\}$ 叫 $A\subset X$ 的一个**开覆盖**(open cover), 若 $A\subset\bigcup_{\alpha}O_\alpha$.

§1.3　紧致性 [选读]

定义 1　设 $\{O_\alpha\}$ 是 $A\subset X$ 的开覆盖. 若 $\{O_\alpha\}$ 的有限个元素构成的子集 $\{O_{\alpha_1},\cdots,O_{\alpha_n}\}$ 也是 A 的开覆盖, 就说它是 $\{O_\alpha\}$ 的一个**有限子覆盖**(finite subcover).

定义 2　$A\subset X$ 叫**紧致的**(compact), 若它的任一开覆盖都有有限子覆盖.

例 1　设 $x\in X$, 则独点子集 $A\equiv\{x\}$ 必紧致.

证明　设 $\{O_\alpha\}$ 是 A 的任一开覆盖, 则 $\{O_\alpha\}$ 中至少存在一个元素(记作 O_{α_1})满足 $x\in O_{\alpha_1}$. 于是 $\{O_{\alpha_1}\}$(作为 $\{O_\alpha\}$ 的子集)是 $\{O_\alpha\}$ 的一个有限子覆盖.

例 2　$A=(0,1]\subset\mathbb{R}$ 不是紧致的.

证明　以 $\mathbb{N}$ 代表自然数集, 则 $\{(1/n,2)\mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 A 的开覆盖, 它没有有限子覆盖. 类似地, $\mathbb{R}$ 中任一开区间或半开区间都非紧致.

例 3　$\mathbb{R}$ 不是紧致的(证明留作习题).

定理 1-3-1　$\mathbb{R}$ 的任一闭区间都紧致.

证明　略. □

注　不要以为闭集一定紧致.(即使 $\mathbb{R}$ 中也有非紧致闭集, 试举一例.) 紧性与闭性有密切联系, 但不等价, 其关系体现在以下两定理中.

为证明定理 1-3-2, 先补充以下定义.

定义 3　拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 叫 T_2 **空间或豪斯多夫空间**(Hausdorff space), 若

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\, O_1, O_2 \in \mathscr{T} \text{ 使 } x \in O_1,\ y \in O_2 \text{ 且 } O_1 \cap O_2 = \varnothing .$$

注　常见的拓扑空间(如 $\mathbb{R}^n$)都是 T_2 空间. 凝聚拓扑空间是非 T_2 空间的一例. Hawking and Ellis (1973) P.13-14 给了一个更“靠近实用”的例子.

定理 1-3-2　若 $(X, \mathscr{T})$ 为 T_2 空间, $A \subset X$ 为紧致, 则 A 为闭集.

证明　只须证 $X - A \in \mathscr{T}$, 为此只须证 $\forall x \in X - A, \exists\, O \in \mathscr{T}$ 使 $x \in O \subset X - A$ (定理 1-2-1). 因 X 为 T_2 空间, 故给定 x 后, $\forall y \in A, \exists\, O_y, G_y \in \mathscr{T}$ 使 $x \in O_y$, $y \in G_y$ 且 $O_y \cap G_y = \varnothing$ (图 1-7). y 走遍 A 便给出两个子集的集合 $\{G_y \mid y \in A\}$ 和 $\{O_y \mid y \in A\}$. 易见 $\{G_y \mid y \in A\}$ 是 A 的开覆盖. A 的紧致性保证它必含有限子覆盖 $\{G_{y_1}, \cdots, G_{y_n}\}$. 令 $O \equiv O_{y_1} \cap \cdots \cap O_{y_n}$, 便有 (1) $O \in \mathscr{T}$; (2) $x \in O$; (3) $O \cap A = \varnothing$(证明留作练习), 即 $O \subset X - A$. 于是由定理 1-2-1 可知 $X - A \in \mathscr{T}$, 故 A 为闭. □

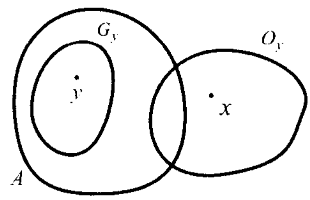


图 1-7　定理 1-3-2 证明用图

定理 1-3-3　若 $(X, \mathscr{T})$ 为紧致且 $A \subset X$ 为闭集, 则 A 为紧致.

证明　因 A 为闭, 故 $X - A$ 为开. 设 $\{O_\alpha\}$ 为 A 的任一开覆盖, 则 $\{O_\alpha, X - A\}$ 是 X 的一个开覆盖(此处用到 A 为闭集). 因 X 为紧致, 故存在有限子覆盖 $\{O_1, \cdots, O_n; X - A\}$, 于是 $\{O_1, \cdots, O_n\}$ 是 $\{O_\alpha\}$ 的有限子覆盖. □

定义 4　$A \subset \mathbb{R}^n$ 叫**有界的**(bounded), 若 $\exists$ 开球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 使 $A \subset B$.

定理 1-3-4　$A \subset \mathbb{R}$ 为紧致当且仅当 A 为有界闭集.

证明　(A) 设 A 为紧致. (a) 因 $\mathbb{R}$ 为 T_2, 由定理 1-3-2 知 A 是闭集. (b) $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 的开覆盖, A 的紧致性保证存在有限子覆盖 $\{(-1, 1), (-2, 2), \cdots, (-m, m)\}$, 即 $A \subset (-1, 1) \cup (-2, 2) \cup \cdots \cup (-m, m) = (-m, m)$, 可见 A 有界. (B) 设 A 为有界闭集. 有界性保证 $\exists\, M \in \mathbb{R}$ 使 $A \subset [-M, M]$. 由定理 1-3-1 可知 $[-M, M]$ 为紧致. 把 $[-M, M]$ 看作定理 1-3-3 中的 X, 注意到 A 为闭集, 便知 A 为紧致. □

定理 1-3-5　设 X 紧致, $f: X \to Y$ 连续, 则 $f[X]$ 紧致.

证明　设 $\{O_\alpha\}$ 是 $f[X]$ 的任一开覆盖. f 的连续性保证 $f^{-1}[O_\alpha]$ 为开, 故 $\{f^{-1}[O_\alpha]\}$ 是 X 的开覆盖. 因 X 紧致, 故存在有限子覆盖 $\{f^{-1}[O_1], \cdots, f^{-1}[O_n]\}$, 于是 $\{O_1, \cdots, O_n\}$ 便是 $\{O_\alpha\}$ 的有限子覆盖. 因此 $f[X]$ 紧致. □

数学分析中有个熟知定理: 闭区间上的连续函数必在该区间上取得其最大值和最小值. 下述定理是这一定理的推广.

定理 1-3-6　设 X 紧致, $f: X \to \mathbb{R}$ 连续, 则 $f[X] \subset \mathbb{R}$ 有界并取得其最大值和最小值.