

计算杆系结构力学

钟万勰 丁殿明 程耿东

水利电力出版社

7704

TU32

3

计算杆系结构力学

钟万勰 丁殿明 程耿东

水利电力出版社

内 容 提 要

本书介绍杆系结构分析中目前最广泛采用的矩阵位移法。除了系统地叙述这个方法的基本原理外，书中将着重放在如何编制计算机程序，并在电子计算机上实现这个方法。内容由浅入深地讨论了平面桁架、空间桁架、平面刚架、平板架和空间刚架的程序编制及有关技巧。本书适合于水工结构、土建、力学等专业的工程技术人员、大学生、研究生和教学人员参考使用。本书也适合于只具备材料力学知识而不熟悉结构力学的工程技术人员自学或在编制程序时参考。

计算杆系结构力学

钟万勰 丁殿明 程耿东

*

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 14印张 371千字

1982年11月第一版 1982年11月北京第一次印刷

印数0001—8150册 定价1.75元

书号15143·5018

序

杆系结构力学是固体力学中应用极为广泛的一个分支。来自生产建设方面的动力使它最早得到发展。一百多年以前（1850～1875）出现的杆系分析方法就已孕育着今天固体力学的许多最重要的基本概念。又经历了八十年的漫长岁月之后到1955年，电子计算机才使杆系分析方法开始发展成为今天强有力的有限元方法。在此以前，结构力学的基础理论虽然早已确立，但是发展一直是很缓慢的。特别是1875～1920这一段几乎是停滞不前，那时研究对象主要是桁架结构，用的是经典的“力法”，最大障碍是繁重的计算。1920年左右，钢筋混凝土刚架结构的研究，产生了“变位法”，于是多了个途径，有了选择未知值的余地，可以说是跨了一步。到1930年左右出现弯矩分配法和各种派生的松弛法，使手算工作可以处理较为复杂的问题，又向前跨了一步。弯矩分配法这概念盛行了几乎二十多年，直到五十年代中期开始，电子计算机用于结构力学，方产生了一个飞跃，从计算化的杆系力学演化到连续体的有限元方法，使结构力学为生产建设服务的能力有了量级上的变化。

我从三十年代起学习结构力学，以后从事教学和科研工作，对结构力学的这段发展过程是有体会的。五十年代初我写过两本杆系结构力学的书，主观上是想把教学和研究的心得整理一下。那时是在弯矩分配法支配的范畴下找出路，深感路子不宽。遇见稍为复杂一点的问题，虽然在理论上应该是可解的，但是实际上却做不出来。问题都出在计算工作量太大，为人力手算所不及。有时候好不容易想了个办法出来，也只是针对某项特殊的问题，适应面很窄。后来接触了计算机化的结构力学，很多年来在计算方面的障碍可以解除了，有豁然开朗的感觉。但是在教学和科研方面要充分理解这个变化的意义，把经典的基础理论和新的计算

1956.5.1

工具结合起来，要改变传统的思考和处理问题的方法以适应变化了的条件和要求，这些都需要一个过程。我们感到一个紧迫的任务，是怎样在教学中反映这个变化，也就是用现代化的知识武装自己和培养学生。本书的作者钟万勰、丁殿明、程耿东三位同志从1972年起在这方面开始努力实践。首先他们在科研和工程服务中掌握了计算机在力学工作中的应用，接着编写了教材用于各种训练班和大学生的教学中，后来又用在研究生的培养中。开始是一本薄的教材，后来逐渐变厚，到第三稿时成了三本。现在这个第四稿又变为一本。这个由薄变厚，又由厚变薄的过程说明是个充实和提炼的过程。现在的内容着重介绍了如何在电子计算机上使用矩阵位移法求解桁架、刚架等杆系结构，特点是把经典结构力学的基本概念、矩阵位移法的现代理论以及计算机上结构化程序设计思想和数据结构知识融合在一起，使学的人能够不必走弯路，直接在计算结构力学方面打个基础，同时又学到编制高效实用的计算机程序的手段，书中附有多个可供实际应用的程序，可解决实际问题。这本书的重点是放在如何在电子计算机上实现目前最受重视的矩阵位移法，程序采用了可读性强，易于修改和增删，以及便于装配的模块式结构，即所谓结构化程序设计。根据在教学中使用的经验，从最简单的平面桁架程序开始，通过平面刚架程序的重复学习，学者便很容易举一反三地独立完成空间桁架、平面板架、空间刚架等程序的编制。模块式结构化程序不仅在使用上好处多，在教学上的效果也是好的。

连续体有限元法最早是从杆系的矩阵位移法的概念发展起来的，后来有限元法又逐渐联系能量原理、片断函数等概念，得到更深入的发展，人们又可以把这些概念反过来对矩阵位移法作进一步的剖析，本书在这方面也有所反映。

总之，本书已四易其稿，反映了作者们多年实践的体会和经验，在大学生和研究生教学中收到比较好的效果，我很高兴在这里作一个介绍。

钱令希

1981.4

前 言

计算力学是一门新兴的力学分支，它把传统的力学理论和高速的数字式计算机上的计算方法结合起来，为解决生产实际问题提供了前所未有的强大工具。

本书，将结构力学的基本理论和在电子计算机上的计算方法密切的结合在一起，力图使读者在掌握力学理论的同时迅速掌握电算工具。在介绍计算机程序时，着重介绍现代的结构化程序设计和数据结构方面的基本知识，使读者能掌握高效率力学软件的编制方法。书中附有大量程序段、完整的平面和空间桁架以及刚架程序。这些程序，结构清楚、可读性强、功能相当完备，并且是按模块化方式组织的。读者既可使用它们直接去解决大量的工程实际问题，也可很容易地修改它们，以适应特殊问题的需要。

本书作者自1972年开始，致力于计算力学软件的研制工作。1981年11月，作者参加研制的大型结构分析程序 JIGFEX通过了国家鉴定。本书反映了编制此项程序的基本思路，是一本计算力学的基础读物，也是作者多年科研成果的部分总结。

本书是由钟万勰所写的以介绍电算方法为主的《结构力学》，程耿东、丁殿明所写的《杆系结构的矩阵位移法》和《杆系计算结构力学基础》等讲义作为素材，增加了影响线、机动分析的电算方法等新内容而编写成的。邓可顺同志并为本书编写了附录II；隋允康、郭秀玲、张近东同志曾协助调试附录I中的部分程序。

在本书的编写过程中，自始至终得到了钱令希教授的热情指导和鼓励。在此表示衷心感谢。

作者

概 述

本书着重介绍如何在电子计算机上使用矩阵位移法求解杆系结构。因此，书中只阐述与求解杆系结构直接有关的问题。

第一章中，我们介绍了结构分析中的基本概念，这些内容是学习本书所必须首先掌握的。在第二章，通过对简单的平面桁架的分析，我们介绍了矩阵位移法的基本概念，这些概念对希望掌握矩阵位移法、有限元法的读者是十分重要的。第三章，仍然以平面桁架为例，讨论了如何在电子计算机上实现矩阵位移法，并介绍了程序设计的基本原则；精读本章的平面桁架计算程序对理解以后各章的、较为复杂的程序是有很大帮助的。在编制平面桁架程序基础上，第四章介绍了平面刚架程序的编制原理和方法，并指出了模块化程序设计的优点，它同第三章的内容一样，都是最基本和最重要的。作为第四章内容的继续和引深，第五章着重介绍程序设计的一些技巧和处理不同结构的方法。第六章介绍了空间刚架的计算程序的编制原理和方法。为了考虑杆件偏心的影响，我们引入了几个座标系统，问题显得稍为复杂。但是只要掌握了第五章的内容，学习本章是不会困难的。

在本书附录 I 中给出了六个实用计算程序及其使用说明和例题，可以供读者直接用来解决实际问题。为了帮助读者顺利地阅读程序，在各程序中都加上了适当的注释。

附录 II 是矩阵代数，它在结构分析中特别有用。事实上，由于采用了矩阵语言，结构分析中十分繁冗的公式可以表达得很简洁，具有很清晰的物理意义且适用于在数字计算机上执行。这一部分内容可供没有学过矩阵代数的工程技术人员参考。

附录 III 介绍了线性代数方程组的几种主要解法。结合本书内容，主要介绍了带状阵的 $LDLT$ 法和变带宽的 $LDLT$ 法，并给出

了相应的计算机计算过程。

关于书中涉及的 **ALGOL-60** 算法语言知识，读者可以参考本书末提供的文献[3.1]。

本书是把传统的结构力学基本理论和新的计算工具——电子计算机结合起来。要牢固地掌握本书的内容，一个十分重要的环节是要求读者自己动手编制计算机程序，上计算机进行实习。只有这样，才能迅速掌握利用电子计算机解决实际问题的能力。

目 录

序

前 言

概 述

第一章 杆系结构	1
第一节 结构的机动分析及其计算机算法	2
第二节 静定结构与超静定结构	15
第三节 迭加原理	19
第四节 结构分析的力法和位移法	21
第五节 最小总势能原理	24
第六节 最小总余能原理	32
第七节 互等性定理和影响线	36
第二章 用变位法计算平面桁架	46
第一节 概述	46
第二节 变位法算例	47
第三节 用最小总势能原理求解桁架内力	53
第四节 变位法的一般描述	55
第五节 结构的描述	56
第六节 确定未知数	59
第七节 单根杆的分析	61
第八节 结构平衡方程的建立——系统总刚度阵的形成	66
第九节 杆件内力计算	75
第十节 能量原理和矩阵位移法	75
第三章 平面桁架计算程序	81
第一节 结构分析程序设计的原则	81
第二节 程序总框图	82
第三节 原始数据的准备	84

第四节	杆件分刚度阵的计算	86
第五节	结构总刚度阵的形成	90
第六节	正则方程的求解	110
第七节	杆件内力的计算过程	113
第八节	空间桁架程序的编制	117
第九节	程序的灵活应用	121
第四章	在静载作用下的平面刚架计算程序	126
第一节	概述	126
第二节	迭加方法和程序总框图	127
第三节	描述刚架的数据	130
第四节	单根杆的分析——转角位移方程式	135
第五节	轴向变形的影响	143
第六节	关于单根杆刚度矩阵讨论	146
第七节	单根杆在全局坐标系中的刚度阵	150
第八节	计算单根杆刚度矩阵的过程	154
第九节	整个结构的刚度矩阵及其形成	159
第十节	建立外力向量	164
第十一节	杆件各截面的内力计算	176
第十二节	程序的灵活应用	183
第十三节	杆系结构影响线的一个统一算法	190
第五章	刚架程序的进一步改进及平板架的计算	195
第一节	位移规格数的概念	195
第二节	节点对号信息的形成与提取	200
第三节	杆件的描述	205
第四节	“对号入座”过程的形成	207
第五节	剪切变形的影响	208
第六节	两端刚性区域的影响	214
第七节	平板架的计算	232
第八节	程序设计的一个原则	236
第六章	空间刚架的计算	239
第一节	描写空间刚架的数据	240
第二节	杆件弹性部分的单元刚度矩阵	242
第三节	杆单元的坐标变换	246

第四节	弹性部分刚度矩阵向单元刚度矩阵的转换	262
第五节	总刚度矩阵的形成	264
第六节	总外力向量的形成及内力计算	265
第七节	结束语	268
附录 I	计算机程序	272
一、	平面桁架程序及其使用说明和例题	272
二、	空间桁架程序及其使用说明和例题	288
三、	平面刚架程序及其使用说明和例题	298
四、	考虑剪切变形影响和杆件偏心的平面刚架程序及其使用说明和例题	315
五、	平面板架(格栅)程序及其使用说明和例题	345
六、	空间刚架程序及其使用说明和例题	359
附录 II	矩阵代数	393
一、	矩阵的定义	393
二、	矩阵的主要类型	394
三、	矩阵的转置	396
四、	矩阵的相等、加减和数乘	397
五、	矩阵的乘法	399
六、	分块矩阵、子矩阵	402
七、	行列式	405
八、	逆矩阵	409
九、	正交矩阵	410
十、	正定矩阵	411
附录 III	线性代数方程组的解法	412
一、	线性代数方程组概述	412
二、	矩阵三角化求联立方程组的解	414
三、	对称正定矩阵三角化解联立方程组(满阵)	417
四、	带状阵的 LDLT 法	427
五、	变带宽的 LDLT 法	434
参考文献		437

第一章 杆 系 结 构

如在材料力学中熟知的那样，当一个结构元件的长度比它的横断面尺寸大很多时，我们就把它称为杆件。由受到轴向力作用或受到弯矩作用或受轴向力、弯矩以及扭矩共同作用的许多杆件组合而成的结构物在生产实践中是经常而大量遇到的，例如用于公路桥的多跨梁（图1-1a）、大跨度厂房中的钢屋架（图1-1b）和化工厂房的框架式骨架（图1-1c），我们把这些结构物统称为杆系结构。本书将致力于介绍用电子计算机计算杆系结构的方法、原理和技巧。这些方法、原理和技巧是具有一般性的，把它们应用到计算更为复杂的结构物上并不引起实质性的困难。因此也可以认为本书是学习有限元程序设计的第一步。

杆系结构可以按照不同的原则来分类。例如，按照在不考虑材料应变的条件下，体系的位置和形状能否改变这一原则可将结构划分为几何不变结构和几何可变结构。对于几何不变结构，如果仅仅利用静力平衡条件便可求出结构的内力，则这样的结构叫做静定结构；相反，利用静力平衡条件不足以求出结构内力的结构叫做超静定（亦称为静不定）结构。根据杆件的受力特点和杆件连结情况，我们可把结构划分为桁架和刚架。桁架结构中，所有杆件只是受到轴向的拉力或压力。刚架结构中，杆件受到的主要是弯矩。这两类结构的计算机处理方法将是不同的。最后，根据结构中各杆件的相对位置，我们可把结构划分为平面杆系结构和空间杆系结构。平面杆系结构的所有杆件轴线及其主惯性平面之一都在同一平面内，空间杆系结构的各根杆的轴线可以不在同一个平面内。

以上的这些分类直接地影响到计算方法的选择，所以在适当的章节我们还会重新来讨论它们。

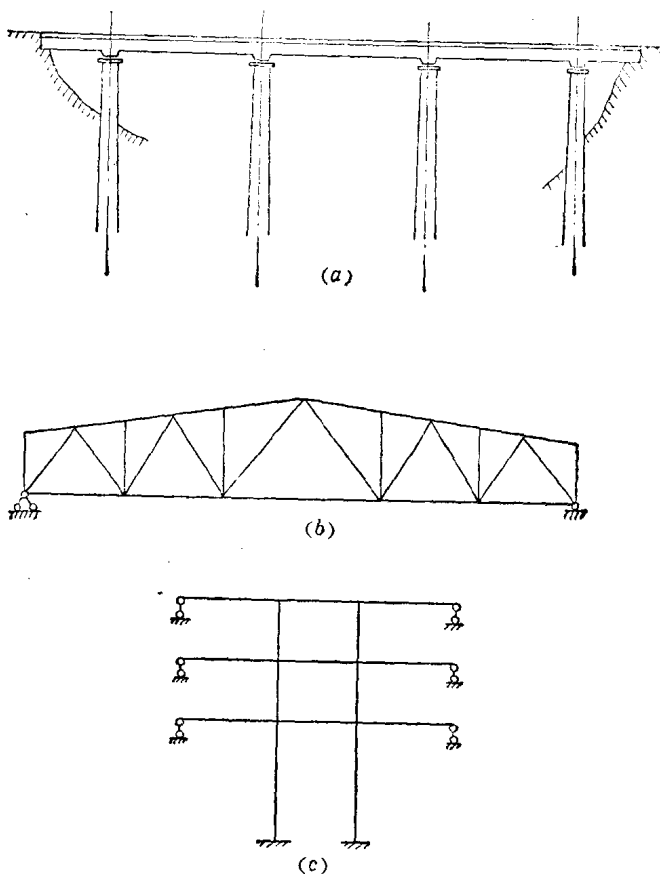


图 1-1

第一节 结构的机动分析及其计算机算法

在不同荷载、支承条件下使用的结构物可以具有十分不同的职能，但是作为一个结构，它们的共同特点是能承受外荷载，将外荷载传到支承上去。这样的结构，在外力作用下虽然由于它的各部件发生了压缩、伸长或弯曲而产生变形，但这种变形与原来杆件的尺寸相比是很小的，不足以影响其稳定性。我们把这种结

构称为几何不变结构。图1-1中的三个结构都属于几何不变结构。由于几何不变结构可以承担外荷载，所以在工程实践中具有使用的价值，成为我们今后研究的对象。除了几何不变结构外，还存在另一类结构，它们在极微小的外力作用下就会产生很大的变形。变形的来源不是由于各部件发生了应变和应力，而是由于结构本身组成不合理，这就是不稳定结构，又称几何可变结构。图1-2中所给出的两个结构都是几何可变结构，其中图1-2a中的梁AB只在A点用铰连接到支座上，可以绕支座任意地转动，图1-2b中的结构在极其小的力P作用下便会产生巨大的变形和巨大的内力。由于几何可变结构不能承担外载，所以并无实用意义。但是，当我们计算一个实际结构时，总是要通过简化手段将实际结构模型化，不合适的简化可以导致几何

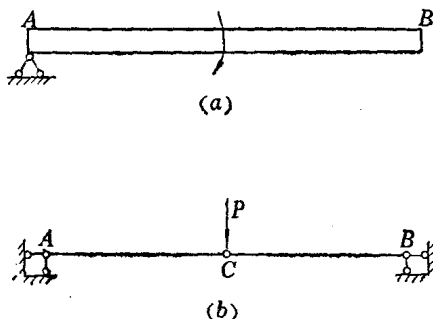


图 1-2

可变结构，如果不能及时识别它们而盲目地用后文给出的计算机程序来计算，就会发生“溢出”而无法计算。因此，我们有必要简单地介绍识别一个结构是否几何可变的要点。

1. 结构的机动性分析

为了确定一个结构是否几何可变，首先要进行机动性分析。下面介绍两个机动性分析中常用的概念：

构件：指的是结构的某些组成部分，它可以是一根杆，也可以是由几根杆组成的本身不是一个机动的体系，有如理论力学中的“盘体”那样工作。

自由度：指的是构件（盘体）可以自由变位的独立变量数。例如一个平面构件的自由度是三个：水平变位 u 、铅直变位 v 及转动角度 θ （图1-3）。

为了分析明白，我们下面以平面结构为例。

要使一个结构不产生自由变位，必须对结构加以约束。由于一个平面构件的自由度有三个，若用二个相交于一点 B 的连杆将

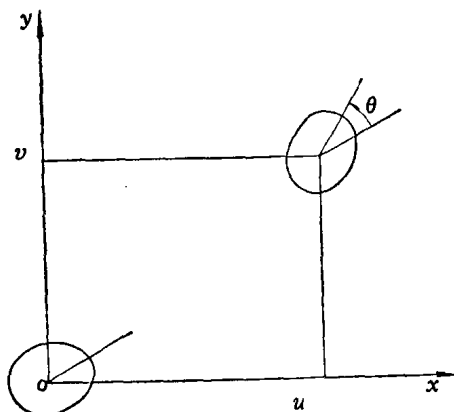


图 1-3

平面构件一端与固定点相联（图 1-4a），则该平面构件只有转角 θ 一个自由度。若再用一根支承杆将另一端与固定点联上（图 1-4b），则该平面构件自由度为零，亦即完全约束住了。一般地说，一根支承连杆可以使构件减少一个自由度。作用相等于两根连杆的单铰，可以使构件减少两个自由度。

当两个构件（盘体）被一个铰所约束时，独立的自由度是 u 、 v 、 θ_1 和 θ_2 四个（图 1-5a），从原来六个自由度减少了两个。如果三个盘体为一个铰相联（图 1-5b），则九个独立自由度丧失了四个，剩下 u 、 v 、 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 五个独立自由度。归纳起来，把约束多个杆件的铰称之为“复铰”，复铰的约束作用相当于 $n-1$ 个

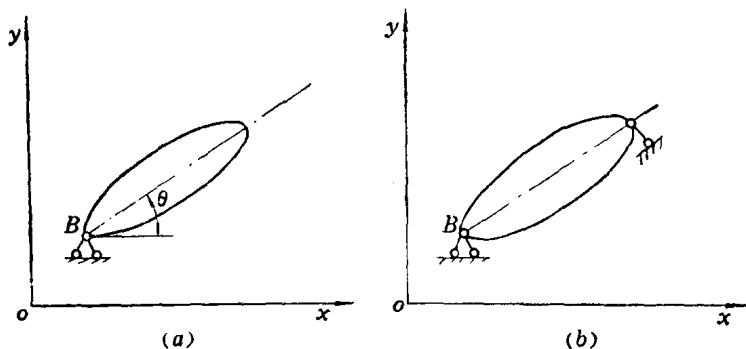


图 1-4

“单铰”，其中 n 为这个铰约束的杆件数，至此，由以上推理便可确定平面结构的自由度计算公式为：

$$F = 3B - 2J - R \quad (1-1)$$

式中 F —— 结构的自由度数；

B —— 结构本身组成构件数；

J —— 组合结构的单铰数，对于复铰应该先把它们折算成单铰；

R —— 支承连杆数。

可将式 (1-1) 的计算结果区分成下列三种情形：

1) 若 $F > 0$ ，说明结构是几何形状可变的；

2) 若 $F = 0$ ，说明结构具有保证几何形状不变所需的最小联系数；

3) 若 $F < 0$ ，说明结构具有多余的联系。

如果不考虑结构支承连杆的作用，只检查结构内部的几何不变性，则自由度的计算公式可改为：

$$F_i = 3B - 2J \quad (1-2)$$

作为一个整体，结构应该具有三个自由度。因此，如果 $F_i > 3$ ，结构本身是

几何可变的；如果 $F_i = 3$ ，则结构本身具有保证几何不变性所必需的最小联系数；当 $F_i < 3$ ，则表示结构本身具有多余的联系。

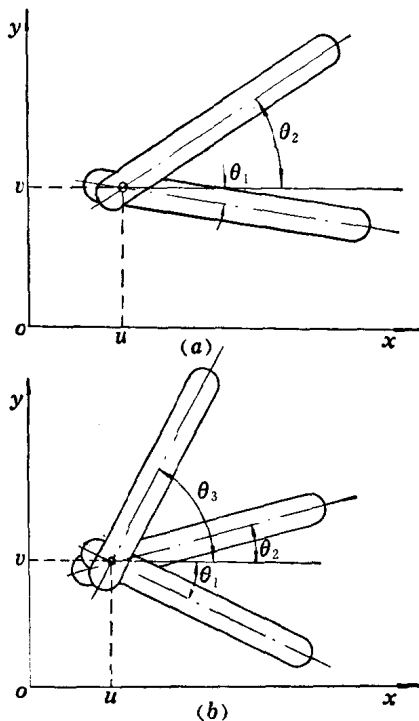


图 1-5

2. 结构的几何组成分析

上面这样分析自由度的方法是不足以完全确定一个结构是否几何可变的。事实上，对于平面结构，纵然按式1-1求得的 $F \leq 0$ ，如果构件安排不合理，致使在结构的某一部分有多余的约束，而另一部分却约束不够，则结构仍然可以是几何可变结构。

图1-6所示结构便是一个满足 $F \leq 0$ ，但几何可变的结构。 $F \leq 0$ （或 $F_i \leq 3$ ）只是一个几何不变结构的必要条件，要确定一个结构几何不变，还要进行结构的几何组成分析。分析结构几何组成

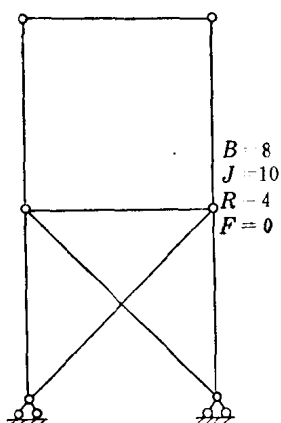


图 1-6

通常采用三角形法则，这个法则叙述为：如用不在一根直线上的三个铰联接三个构件，则它们组成几何不变体系。图1-7所示的两种情形都是符合三角形法则的，所以都是几何不变的。其中b图中的一根连杆杆可以看作构件III，而另外两个连杆相当于一个虚铰，该虚铰位于两连杆延长线的交点C上。这样，三个构件I、II和III为三个铰A、B和C相联，而且它们不在一根直线上，符合三角形法则，结构是几何不变的。

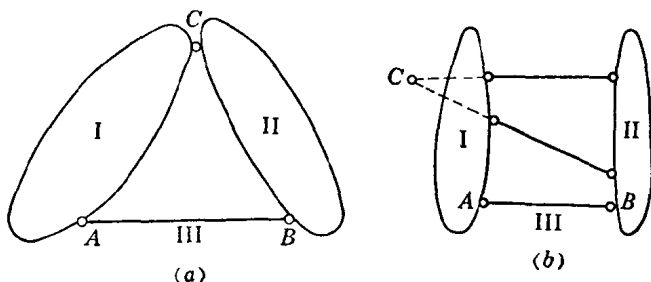


图 1-7