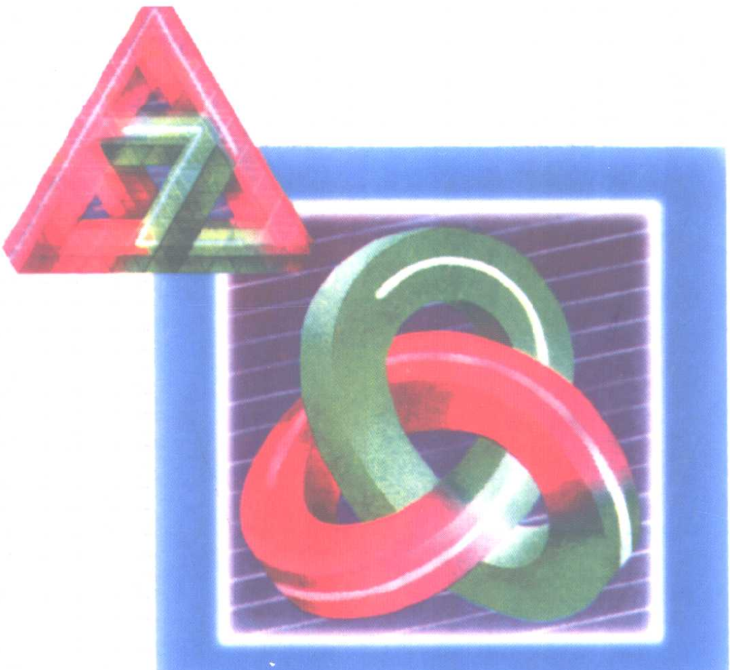
现代数学基础丛书

算子代数上线性映射引论

侯晋川 崔建莲 著



科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书

算子代数上线性映射引论

侯晋川　崔建莲　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了国内外算子代数上线性映射及其保持问题研究的进展，也是作者近年来研究成果的总结. 全书共分十章. 内容包括预备知识，保持算子秩不变以及保持各种谱函数的线性和可加映射，Banach 代数和 C^*-代数上的线性映射，von Neumann 代数上的可加映射，以及套代数和初等算子及其保持问题等.

本书读者对象为高等院校数学系高年级学生、研究生和有关科研人员.

图书在版编目(CIP)数据

算子代数上线性映射引论/侯晋川，崔建莲著 .—北京：科学出版社，2002

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-010942-2

Ⅰ.算… Ⅱ.① 侯… ② 崔… Ⅲ.算子代数-线性-映射(数学) Ⅳ.O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 087311 号

责任编辑：刘嘉善/责任校对：钟 洋

责任印制：安春生/封面设计：韦万里

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2002年12月第一次印刷 印张：14 7/8

印数：1—3 000 字数：387 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

20 世纪 30 年代, F. J. Murray 和 J. von Neumann 创立了算子代数理论. 现在这一理论已成为现代数学中一个起领头作用的热门分支, 它与量子力学, 微分几何, 线性系统和控制理论, 甚至数论以及其他一些重要数学分支都有着出人意料的联系和相互渗透. 它是非交换数学的基础, 例如是由 Alain Connes 发展的非交换几何和由 D. Voiculescu 发展的非交换概率论或非交换自由概率论的基础.

对于算子代数, 常规的研究课题主要是探讨代数的结构, 利用同态映射研究代数的分类. 然而, 由于算子代数结构极其复杂, 即使是性质最好的 von Neumann 代数和 C^*- 代数, 分类问题也远未解决. 另一方面, 算子代数作为特殊的 Banach 空间, 对其上的线性映射以及这些映射对代数结构的影响却研究极少, 过去仅限于态、导算子、等距、完全正及完全有界线性映射的讨论. 近 20 年来, 国内外许多学者另辟溪径, 开始注意到根据算子本身的特殊性, 与算子理论相结合, 开展对代数上把算子或代数的某种特征作为其不变量的线性映射的研究, 为算子代数研究的突破带来一线曙光, 这就是所谓的线性保持问题的研究, 且已取得一系列深刻而又漂亮的成果, 形成 20 世纪末本研究领域的一个新亮点. 目前, 算子代数上线性映射的研究越来越受到人们的关注, 成为当今算子理论和算子代数的一个非常活跃的交叉研究领域之一. 此项研究不仅丰富了算子代数理论的研究, 而且作为副产品, 刺激了算子理论中新结果的出现, 进而, 其成果往往从新的角度揭示了算子代数的固有性质以及与其上线性映射的联系. 例如, 在许多情形下, 这样的线性映射是代数同态或代数反同态. 这表明在某些条件下, 算子代数上映射的线性蕴涵其可乘性, 从而使人

们进一步加深对算子代数的认识和理解. 算子代数上线性保持问题研究的最终目的之一是利用线性手段探讨和解决拓扑代数的问题，即通过刻画保持代数元某种特征不变的线性映射、初等线性映射等，反馈算子代数的整体结构性质，从新的角度提供对算子代数分类的信息. 这在理论上和应用上都有着重要的意义. 如果把 $M_n(\mathbb{C})(=\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))$ 看作是有限维复空间上的算子代数，那么线性保持问题的研究可追溯到 19 世纪末 G. Frobenius 的开创性工作. 近 40 多年来，矩阵代数上线性保持问题研究一直是矩阵理论中最活跃最富有成果的领域之一. 人们对无限维算子代数上线性保持问题研究的普遍关注则是近十几年的事，并得到快速发展，所用的方法与有限维情形也不同. 本书的目的主要是以作者在这方面的一些工作为主线，介绍国内外在算子代数上线性保持问题方面研究的概况，现状以及最新进展.

全书共分 10 章. 第一章是预备知识, 简单介绍 Banach 空间，Hilbert 空间算子理论和算子代数方面的基本概念以及本书后面常用的一些性质. 这部分内容大多可在泛函分析基础教程中找到. 对于那些普通教程不加介绍的概念和结果，我们都指出参考文献，以方便读者查阅. 第二章介绍保持算子秩不变或秩不增的线性和可加映射的刻画. 注意到, 可以把算子代数看作环而更一般地研究其上可加映射的保持问题，因而，我们尽可能地只在可加而不是线性的假设下进行讨论. 本章是线性保持和可加保持问题研究的基础之一，因为算子代数上线性和可加映射的保持问题在许多情形可转化到保秩一或秩一不增的情形，并借助于该章的结果而得到解决. 第三章用统一的方法处理标准算子代数上保持或压缩各种谱函数，保持各种与可逆性有关以及与算子的零空间和值域性质有关的线性和可加映射的刻画问题. 第四章则给出 Banach 代数和 C*- 代数上压缩某些谱函数, 保各种可逆性, 保极大理想, 谱半径不增的线性映射以及 von Neumann 代数上保零积或完全迹秩不增的线性映射的刻画，并且在注记一节中介绍著名的 Kaplansky 问题研究的史料和进展情况. 第五章介绍 von Neumann 代数上可

加保持问题研究的一些工作，主要对保零积，保正交性以及与算子函数 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射进行了讨论. 第六章对算子代数上保某个给定多项式的零化元不变的线性和可加映射进行了较详尽的研究. 作为应用，还获得标准算子代数上保谱半径可加映射的具体结构. 第七章介绍套代数 (nest algebras) 上线性保持问题的研究成果. 与前面几章不同，非平凡套代数不是半单的 Banach 代数，而且是一类最重要的非自伴算子代数，它的有限维模型就是上三角块矩阵代数，而无限维情形则要复杂得多. 对于套代数上线性保持问题的研究，目前还仅停留在上三角矩阵代数的范围. 本章是第一次对无限维套代数的情形进行系统的探讨，主要考虑套代数上保秩一性，完全秩不增，保幂等性，保零积，保数值域闭包，保数值半径等的线性映射，并由此获得套代数的自同构，局部自同构以及 Jordan 同构的新刻画. 初等算子是算子代数上一类重要的线性映射，是联结算子理论与算子代数的桥梁之一. 第八章介绍初等算子及其保持问题，获得保自伴性初等算子，正初等算子，完全正初等算子及保谱初等算子的刻画，同时还获得有限秩初等算子和初等算子局部线性组合 (线性插值) 的刻画. 初等算子虽然一直是人们研究的重点对象，但除定义外再没有其他等价的抽象刻画. 本章利用完全秩不增性质，给出初等算子的一个等价描述. 第九章研究 Hilbert 空间情形初等算子作为算子理想 $\mathcal{C}_2$ 上线性算子时的性质，并在更一般的算子张量积的框架下进行讨论，主要是获得初等算子限制到 $\mathcal{C}_2$ 上成为自伴算子，正规算子，亚正规算子，拟正规算子，紧算子，有限秩算子，$\mathcal{C}_p$ 类算子等的充分必要条件. 以上涉及的都是线性或可加映射，然而除加法和数乘运算外，算子代数中还有一种基本的代数运算，即乘法运算. 因此，类似地也可考虑可乘保持问题. 我们在最后一章，即第十章介绍算子代数上可乘保持问题方面的一些结果，内容包括矩阵代数上可乘映射的刻画及保正性、保酉性可乘映射的刻画；标准算子代数上秩一不增可乘映射和保秩可乘映射的结构性质；保谱(或谱半径) 和保数值域 (或数值半径) 可乘映射的刻画以及自同构

的一些新特征等.

本书的写作曾得到中国科学院数学所李炳仁教授、复旦大学数学所严绍宗教授的鼓励和支持；白朝芳博士详细阅读了本书的初稿，在此谨表谢意. 对于国家自然科学基金、数学天元基金和中国科学院科学出版基金、山西省自然科学基金和山西省回国留学人员科研基金对本书出版的资助深表感谢.

由于作者水平有限，加上文献收集不全，新成果不断出现，缺陷与不足之处在所难免，倘有纰漏，热忱欢迎读者批评指正.

著　者

2002 年 1 月于临汾

山西师范大学

目　录

第一章　预 备 知 识

本章我们将给出在后面几章中经常用到的有界线性算子，Banach 代数，C^*- 代数，von Neumann 代数和套代数的一些概念及结论.

§1.1　Banach 空间及算子

定义 1.1.1　设 X 是实或复线性空间，如果在 X 上定义了非负函数 $\|\cdot\|$，满足下列公理：

(1) 三角不等式：对任意的 $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(2) 对任意的 $x \in X$, 任意的数 a, 有 $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(3) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

称 X 为赋范空间. 进而，如果还满足

(4) 对 X 中的任意 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ (即当 $n, m \to \infty$, $\|x_n - x_m\| \to 0$), 存在 $x \in X$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$,

则称 X 是 Banach 空间.

满足 (1)—(3) 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 X 上的范数. 满足 (1)—(2) 的非负函数称为半范数.

设 f 为 X 上的线性泛函. 如果 $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)| < \infty$, 称 f 为 X 上的有界线性泛函. 记 Banach 空间 X 上的有界线性泛函全体为 X^*, 则 X^* 按通常函数的加法和数乘法成为线性空间. $(X^*, \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间，称此空间为 X 的共轭空间.

我们有时也用 $\langle x, f\rangle$ 表示泛函 f 在 x 处的值 $f(x)$.

设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是线性映射. 如果 $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| < \infty$, 称 T 有界. T 是连续的当且仅当 T 是有界的，而 $\|T\|$ 称为 T 的范数.

在 Banach 空间及算子理论中，通常认为开映射定理、闭图定

理、 Hahn-Banach 延拓定理和一致有界原理是最基本的定理，我们列举如下：

定理 1.1.1 (开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子，且 $TX=Y$, 则 T 为开映射.

定理 1.1.2 (闭图定理) 设 $T:X\to Y$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性算子，且 T 的图像 $\{(x,\, Tx)\mid x\in X\}$ 为 $X\times Y$ 中的闭集，那么 T 是有界的.

定理 1.1.3 (Hahn-Banach 延拓定理) 如果 f 为 X 的闭线性子空间上的有界线性泛函，则 f 可保范地延拓为 X 上的有界线性泛函.

定理 1.1.4 (一致有界原理或共鸣定理) 设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一族有界线性算子. 如果对任意的 $x\in X$, 有 $\sup\{\|T_\alpha x\|\mid\alpha\in\Lambda\}<\infty$, 那么 $\sup\{\|T_\alpha\|\mid\alpha\in\Lambda\}<\infty$.

从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合记为 $\mathcal{B}(X,Y)$; 如果 $X=Y$, 简记为 $\mathcal{B}(X)$. 赋予算子范数， $\mathcal{B}(X,Y)$ 成为 Banach 空间. 范数定义的拓扑又称一致拓扑. 除范数拓扑外， $\mathcal{B}(X,Y)$ 中还有其他一些重要的算子拓扑，下面是本书常用的几种.

定义 1.1.2 设 X,Y 是 Banach 空间.

(1) 由半范族

$$\{\phi_{x,f}(\cdot)=|\langle(\cdot)x,f\rangle|\ \mid x\in X,f\in Y^*\}$$

确定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为弱算子拓扑 (简记为 WOT);

(2) 由半范族

$$\{\psi_x(\cdot)=\|(\cdot)x\|\ \mid x\in X\}$$

确定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为强算子拓扑 (简记为 SOT).

(3) 设 φ 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上的线性泛函，如果存在序列 $\{x_i\}\subset X$ 和 $\{f_i\}\subset Y^*$ 使得 $\sum\limits_i\|x_i\|^2\|f_i\|^2<\infty$ 且对所有的 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$,

有 $\varphi(T)=\sum\limits_{i}\langle Tx_i,f_i\rangle$, 则称 φ 是 σ-w 连续的. 由所有 σ-w 连续线性泛函决定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的 σ-w 拓扑.

设 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, 符号 $\mathrm{rng}(T)$ 和 $\ker T$ 分别代表 T 的值域和零空间. 算子 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ 称为有限秩的, 如果 T 的值域 $\mathrm{rng}(T)$ 是有限维子空间, $\mathrm{rng}(T)$ 的维数也称之为 T 的秩. 用 $\mathcal{F}(X,Y)$ 表示 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中所有有限秩算子的集合. 设 $y\in Y$, $f\in X^*$ 非零, 则由 $x\mapsto\langle x,f\rangle y$ 定义的算子是一秩的, 通常记为 $y\otimes f$. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的每个一秩算子都可表示为这种形式.

命题 1.1.5 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的秩 n 算子可表示为 n 个一秩算子的和.

命题 1.1.6 $\mathcal{B}(X)$ 中有限秩算子理想在 $\mathcal{B}(X)$ 中按照弱算子拓扑是稠密的.

命题 1.1.7 $\mathcal{B}(X)$ 的换位是平凡的, 即若 $T\in\mathcal{B}(X)$ 与 $\mathcal{B}(X)$ 中每个算子 S 都交换 $(TS=ST)$, 则存在数 λ 使得 $T=\lambda I$, 其中 I 表示 X 上的恒等算子.

定义 1.1.3 令 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$. 由 T 按如下方式可定义另一算子 T^*:

$$T^*(f)x=f(Tx),\quad \forall x\in X,\ f\in Y^*,$$

T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子, 称 T^* 是 T 的共轭算子. 易验证 T^* 也有界且 $\|T\|=\|T^*\|$.

定义 1.1.4 设 X 是 Banach 空间且 $T\in\mathcal{B}(X)$. 如果存在多项式 $p(t)$ 使得 $p(T)=0$, 称 T 是代数算子; 如果对每个 $x\in X$, 存在与 x 有关的多项式 $p_x(t)$ 使得 $p_x(T)x=0$, 称 T 是局部代数算子.

定理 1.1.8 (局部代数算子的 Kaplansky 定理 [181]) 局部代数算子一定是代数算子.

定理 1.1.9 (Liouville 定理) 设 $x(\cdot)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 到 Banach 空间 X 中的有界解析函数, 则存在 X 中的固定元 x_0, 使得对任意的 $z\in\mathbb{C}$, 有 $x(z)=x_0$, 即整个复平面上定义的有界解析向量值函

数是常函数.

定理 1.1.10 (次调和函数的 Liouville 定理 [9]) 整个复平面上的有界次调和函数是常函数.

定义 1.1.5 设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$.

(1) T 的谱 $\sigma(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不可逆 $\}$.

(2) T 的左谱 $\sigma_l(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不左可逆 $\}$.

(3) T 的右谱 $\sigma_r(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不右可逆 $\}$.

(4) T 的点谱 $\sigma_p(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 存在非零向量 $x \in X$, 使得 $(\lambda I - T)x = 0\}$.

(5) T 的近似点谱 $\sigma_{ap}(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 存在单位向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 使得 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0\}$.

(6) T 的满谱 $\sigma_s(T)$ 是 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T)X \neq X\}$.

(7) T 的压缩谱 $\sigma_c(T)$ 是 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{rng}(\lambda I - T)$ 在 X 中不稠密 $\}$.

(8) T 的谱半径 $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}(= \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|T\|.)$

以后, 我们也常把算子 $\lambda I - T$ 简记为 $\lambda - T$.

命题 1.1.11 设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$. 则下列成立:

(1) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma_l(T)$.

(2) $\sigma_s(T) \subseteq \sigma_r(T)$.

(3) 集合 $\sigma(T)$, $\sigma_l(T)$, $\sigma_r(T)$, $\eta\sigma(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 都包含 $\partial\sigma(T)$, 其中集合 $\partial\sigma(T)$ 代表 T 的谱边界, $\eta\sigma(T)$ 代表 $\sigma(T)$ 的多项式凸包, 称之为 T 的全谱 (full spectrum).

证明 只需证明 (3) 成立, 显然只需证明 $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 都包含 $\partial\sigma(T)$ 即可. 事实上, 由 [51; p.215, 命题 6.7] 可知, $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. 下证 $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T)$. 设 $\lambda \in \partial\sigma(T)$ 但 $\lambda \notin \sigma_s(T)$, 那么

$\text{rng}(\lambda-T)$ 满且 $\lambda-T$ 不是单射算子，由 [196; p.285, 问题 1c] 知，λ 属于 $\sigma(T)$ 的内部，矛盾. 所以 $\partial\sigma(T)\subset\sigma_s(T)$. 证毕.

定义 1.1.6 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T\in\mathcal{B}(X,Y)$.

(1) 如果 T 把有界集映为列紧集，称 T 是紧算子. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的紧算子全体之集合记为 $\mathcal{K}(X,Y)$(当 $X=Y$ 时简记为 $\mathcal{K}(X)$，它是 $\mathcal{B}(X)$ 的范闭理想).

(2) 称商代数 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 为 Calkin 代数，记作 $\mathcal{C}(X)$. 设 $\pi(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 的商映射. 如果 $\pi(T)$ 是 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 中的可逆元，则称 T 为 Fredholm 算子.

T 为 Fredholm 算子当且仅当 T 具有闭值域且 $\dim(\ker T)<\infty$, $\dim(\text{rng}(T))^{\perp}<\infty$. 紧算子 T 具有许多类似于有限维空间算子的谱性质，例如 T 的每个非零谱点都是点谱 (即特征值) 且只要 $\lambda\neq 0$, $\lambda-T$ 就是 Fredholm 算子.

定义 1.1.7 设 H 是线性空间，$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ 是其上的一个二元函数. 如果 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ 关于第一个变元是线性的而关于第二个变元是共轭线性的，且满足下列条件：对任意 $x,y\in H$,

(1) $\langle x,x\rangle\geq 0$, 而 $\langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0$;

(2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$,

则称 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ 为 H 上的内积. 设 H 是 Banach 空间且具有内积 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, 如果 H 上的范数 $\|\cdot\|$ 由此内积导出，即对任意的 $x\in H$, 有 $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$, 则称 H 为 Hilbert 空间.

设 H 为 Hilbert 空间，如果 $x,y\in H$ 满足 $\langle x,y\rangle=0$, 称 x 与 y 正交. 如果 $\{e_i\mid i\in\Lambda\}$ 是 H 中一族相互正交的单位向量，且其线性张在 H 中稠密，则称它为 H 的一个标准正交基. 此时，任意 $x\in H$ 可惟一表示为 $x=\sum\limits_{i\in\Lambda}\langle x,e_i\rangle e_i$. 可分 Hilbert 空间存在可数标准正交基.

定义 1.1.8 设 H 是 Hilbert 空间，其内积为 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. 令 $A\in\mathcal{B}(H)$. 则存在 $A^*\in\mathcal{B}(H)$ 使得对任意 $x,y\in H$ 都有 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ 成立，称 A^* 为 A 的共轭算子或伴随算子.

(1) 如果 $A^*=A$, 称 A 是自伴算子.

(2) 如果 A 自伴且对每个 $x\in H$, 有 $\langle Ax,x\rangle\ge 0$, 称 A 是正算子.

(3) 如果 $A^k=A$, 称 A 是 k- 阶幂等算子, 其中 k 是一自然数; 2- 阶幂等算子称为幂等算子.

(4) 如果存在自然数 k 使 $A^k=0$, 称 A 是幂零算子; 如果 $A^k=0$ 但 $A^{k-1}\neq 0$, 称 A 为 k- 阶幂零算子.

(5) 如果 A 是正算子且 A 是 2- 阶幂等算子, 称 A 是投影.

(6) 如果 $AA^*=A^*A$, 称 A 是正规算子.

(7) 如果 $AA^*=A^*A=I$, 称 A 是酉算子; 如果 $A^*A=I$, 称 A 是等距算子; 如果 A^*A 和 AA^* 都是投影算子, 称 A 是部分等距算子, 而 A^*A 和 AA^* 分别称为 A 的始投影和终投影.

(8) 如果存在正规算子 B 及 B 的不变子空间 M 使得 $A=B|_M$, 称 A 是次正规算子.

(9) 如果 $A^*A\ge AA^*$, 称 A 是亚正规算子.

对 Banach 空间情形同样可定义幂零算子, k- 阶幂零算子和 k- 阶幂等算子的概念.

定理 1.1.12 ([176]) 设 H 是无限维的 Hilbert 空间. 则对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, T 可表示为 $\mathcal{B}(H)$ 中有限多个平方零算子的和以及有限多个幂等算子的和; 当 H 为复空间时, T 可表示为最多 5 个平方零算子的和, 最多 5 个幂等算子的和以及有限多个投影的线性组合.

命题 1.1.13 设 H 是 Hilbert 空间且 $T\in\mathcal{B}(H)$ 是亚正规算子, 则 $r(T)=\|T\|$. 即, 亚正规算子的谱半径等于其范数.

定理 1.1.14 (亚正规算子的 Fuglede-Putnam 定理 [97]) 设 H 是 Hilbert 空间. 令 $T,S^*\in\mathcal{B}(H)$ 是亚正规算子. 对于 $W\in\mathcal{B}(H)$, 如果 $TW=WS$, 则 $T^*W=WS^*$, 并且 $T|_{\overline{\mathrm{rng}(W)}}$ 和 $S|_{(\ker W)^{\perp}}$ 是酉等价的正规算子.

定义 1.1.9 设 $A\in\mathcal{B}(X)$ 且 $M\subset X$ 是闭线性子空间. 如果对任意的 $x\in M$, 有 $Ax\in M$, 称 M 是 A 的不变子空间. Lat$A$