A. H. Nayfeh 著　宋家骕　戴世强　编译

摄动方法习题集

上海翻译出版公司

摄动方法习题集

(美) A.H. 奈弗 著
宋家骕 戴世强 译

Problems in Perturbation

作　者:　　A.H. Nayfeh
原出版社:　　John Wiley & Sons. 1985

上海翻译出版公司

摄动方法习题集

(美) A.H. 奈弗 著

宋家骕 戴世强 译

Problems in Perturbation

作 者: A.H. Nayfeh

原出版社: John Wiley & Sons. 1985

上海翻译出版公司

(上海复兴中路597号 邮政编码200020)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷七厂印刷

上海沪江电脑科技排印公司排版

开本850×1168 1/32 印张15.5 字数553000

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数1－2000

ISBN 7-80514-415-X/O·85 定价: 9.50元

译　序

据译者所知，本书的原著 Problems in Perturbation (1985)是世界上第一本摄动方法习题集，而且估计在相当长的一段时间内，不见得会有第二本同类著作问世。

本书的主要内容，是同一作者的 Introduction to Perturbation Techniques (1981)* 一书的全部 214 道习题(以小题计，接近 400 道)的详细解答。另新增 230 道(近 500 小题)补充题供练习用。

各章开头的方法提要很重要，合起来就是一本薄薄的摄动方法书。华罗庚先生说过："善读书则书变薄。"反复仔细领会这本"薄书"的字字句句，可以窥见摄动方法的精粹，对各种具体方法会有新的更深刻的理解。

摄动方法是求代数方程、超越方程、常微分方程、偏微分方程和积分方程等的近似分析解的一大类方法的总称，通常用渐近展开式来表示解，所以常常将定积分的渐近展开也放在一起。应用范围极其广泛是摄动方法最主要的特点，它不仅适用于自然科学和工程技术的各个分支，而且近年来还应用于社会科学的定量分析中，因此必定能够在我国四化事业中发挥其巨大的作用。关键是需要在大范围内大力推广应用这类方法，而推广工作的一个条件是要有合适的材料。《摄动方法导引》和本书这两种译本的出版，正是适应了国内的这一需要。因此应该说，上海翻译出版公司做了一件很有意义的好事。

研究和发展新的摄动方法，确实需要有较深厚的数学基础；但为了应用现有的绝大部分摄动方法，则仅需要微积分和基本的常微分方程的准备知识。所以对本书的内容，理、工科大学三、四年级以上的学生和研究生都可以掌握。对于广大研究人员来说，自学也没有困难。目前为完成学生的实习任务和毕业论文，为解决实际工作者的理论课题或应用课题，就数学工具来说，光靠大学一、二年级时所学到的东西是不够的，亟需充实和提高。而摄动方法正是需要优先充实的一个方面。认真学习《摄动方法导引》和本书之后，绝大部分读者将会看到自己的解题能力确实得到了增强。至于有些读者

---

* 《摄动方法导引》，宋家骕译，上海翻译出版公司，19××。

忽然在书中发现他苦苦思索着的问题的现成解法，也不必过分惊讶。由于本书题解的数量众多，因而存在着这种可能性。

本书适合于应用数学、力学、物理学、天文学和机械工程、船舶与海洋工程、航空航天工程、土木工程、水利工程等专业的高年级大学生、研究生以及科技人员使用，还适合于生物数学、经济数学、控制理论、人口理论等专业的学生和科研人员参考。对于担任摄动方法课程的教师，也是一本有价值的教学参考书。

关于出版习题解答书籍的利弊，一般的看法是，对于基础课和低年级学生而言，习题解答书不宜多出多看。可是对于诸如摄动方法这样的内容来说，是否应另当别论？因为绝大多数人学习的主要目的，只是为了会用现成的方法。借助于大量例题来理解和掌握方法，正可以达到事半功倍的效果。

学生们常对摄动方法的所谓繁琐冗长啧有烦言。和某些精确解相比，摄动方法确实既不精巧，又不简练。可是应该看到，摄动方法解题的路子已经给出，因而一般不需要很多数学技巧和灵活处理，这是与书写简短性质不同的另一种简便。而且当你解决了面临的"难题"之后，就会发现这些运算工作量原来算不上一回事。

本书的前半部分(第一至十一章)由宋家骕翻译，后半部分(第十二至十五章)由戴世强译出。两人的工作都是认真细致的。已发现的一百多处错漏已迳直在译文中得到纠正。译者感谢上海翻译出版公司，衷心感谢他们为本书出版所作出的种种努力。

限于学力，译文中定存在有疏误，恳请专家和读者同志们批评指正。

译　者

1988年8月8日

原　序

物理学家、工程师和应用数学家所面临的许多问题中牵缠到一些难点，因而得不到精确解，例如方程是非线性的、在复杂的已知边界或未知边界上的非线性边界条件、以及变系数等等。为此利用数值方法、分析方法或结合二者来求近似解。对于给定的初条件、边界条件和特定的参数，我们可以借助于现代计算机相当准确地求解线性和非线性微分方程。可是，如果需要对非线性问题的解的特征以及解与某些参数的依赖关系作深入的了解，那末就得对许许多多的参数值和初始条件的数值反复进行计算。这种做法即使对简单的非线性问题，其输出数据也将是如此之多，以致于无法辨认出哪怕是很简单的规律。在另一方面，分析方法却常常容易描述一般规律，得出封闭形式的有用的结果。对于带复杂边界条件的变系数非线性偏微分方程来说，将分析方法和数值方法结合起来，常常是最合适的方案。先利用数值方法解线性问题，然后用 Ritz–Galerkin 法将非线性问题归结为无穷个耦合的非线性常微分方程并通过分析方法来求解。

常常对于一个或几个参数取很大或很小数值的情况感到兴趣。这些情况是直接用数值方法来处理时特别感到困难的。但这时分析方法常常能够提供准确的近似解，甚至还能启示一条改善数值解的途径。

分析方法中最重要的是一些有规则的摄动方法(渐近展开法)，它们是用小参数(或小的坐标值)或大参数(或大的坐标值)来表示的。拙著 Perturbation Methods * 一书以统一的方式阐述了由物理学家、工程师和应用数学家所创造的绝大多数的摄动方法，指出了它们的异同，优点和局限性。但是因为材料是精炼的，高等的，所以只打算供研究人员和高年级研究生使用。另一本拙著 Introduction to Perturbation Techniques 则以初等的方式讲述材料，使科学和工程领域中各种各样专业的高年级大学生和一年级研究生都易于接受。这两本书都是通过例子来讲解内容的。后一本书有 360 道以上的习题。

本书包含有 Introduction to Perturbation Techniques 一书的全部习题的

* 《摄动方法》，王辅俊等译，上海科学技术出版社，1984年11月。

详解，还有数量大致相同的练习用的补充题。每一章以简短的引言开始，给出各种定义，基本理论和可供使用的各种方法的概要。对于有微积分和基本的常微分方程知识的读者来说，本书内容是自成体系的。虽然所解的问题均为 Introduction to Perturbation Techniques 一书的习题，但是材料具有普遍意义，所以可配合现有的任何一本摄动方法的教科书使用，也可配合包含有渐近法和摄动法的非线性振动的教科书和应用数学的教科书使用。鉴于阐述摄动法的最好办法是运用各种例子，所以用本书来自学十分理想。

阿里·哈桑·纳弗
弗吉尼亚州布拉克斯堡市
1985 年 3 月

内 容 提 要

本书是当今唯一的摄动方法习题集的中译本，可与同一作者的《摄动方法导引》一书配合使用。主要内容是《摄动方法导引》的全部近 400 道习题的详解。两书的分章相同，每章的开头有方法提要。并新增将近 500 道补充题供练习用。学好工科大学高等数学的读者就可以基本掌握本书内容。

摄动方法是求现代技术和科学问题的分析解的最主要的数学工具，应用领域极其广泛。通过大量例题学习摄动方法可收到事半功倍的效果。对于希望增强解决实际数学问题能力的理工科大学(以及某些社会科学专业)的高年级学生、研究生、教师和广大工程技术人员和研究人员，本书是一本合适的参考书。

目　录

第一章　引　　论

物理学家、工程师和应用数学家今天所面临的绝大多数物理问题，都有某些基本的特征，因而得不到精确的分析解。这些特征是，非线性的方程，在已知边界(某些情况下，在未知边界)上的非线性边界条件，变系数，以及复杂的边界形状。因此物理学家、工程师和应用数学家不得不去求面临的问题的近似解。这种近似可以是纯数值的，纯分析的，或者是数值方法和分析方法的结合。本书只致力于各种分析方法。这些方法和数值方法相结合，可产生极其有力的多方面适用的方法。

可以将分析的近似方法粗略地分为合理的和不合理的两类。不合理的近似通常是由特定方式建立数学模型而得到的，其中包括保留某些成分，忽略一些成分，并对另一些成分作近似处理。因为不能通过逐次求近似来改善精度，因此这类方法和死胡同有些相象。而合理的近似则描述一个所谓渐近展开式或摄动展开式的有规则的展开式，原则上可以无限展开下去。

1.1. 参数摄动

解决现代问题的关键是建立数学模型，这在推导支配方程、边界条件和初始条件过程中都会涉及到。然后，在试图作任何近似之前，应当先将数学问题用无量纲的变量来表达。

如果有关无量纲变量 $u(x,\ \varepsilon)$(u 可以是标量或向量)的物理问题，在数学上可以用微分方程 $L(u,\ x,\ \varepsilon)=0$ 和边界条件 $B(u,\ \varepsilon)=0$ 来表示(x 是无量纲的自变量，可以是标量或向量，ε 是个无量纲参数)，那末一般说来，它是不能精确求解的。可是如果存在有一个 $\varepsilon=\varepsilon_0$ (可以调节 ε 的零点使得 $\varepsilon_0=0$)，对于此参数值，上述问题可以精确地、较为容易地或者数值地求解，那么对于小的参数值 ε，我们来谋求 $u(x,\ \varepsilon)$的近似解，例如以

$$u(x,\ \varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\cdots$$

形式的 ε 的幂函数表示的展开式来近似，式中的 $u_n(x)$不依赖于 ε，$u_0(x)$是 $\varepsilon=0$ 时原问题的解。我们称这样的展开式为参数摄动。

1.2. 坐标摄动

如果物理问题在数学上用微分方程 $L(u,\ x)=0$ 和边界条件 $B(u)=0$ 来表示，而且当 $x\to x_0$ 时(x_0 可以调节为 0 或者∞)$u(x)$为已知的 u_0，那末坐标摄动就是对 x_0 邻近的 x 值来确定 u 关于 u_0 的偏差，$x_0=0$ 时用 x 的幂函数来表示，$x_0=\infty$时用 x^{-1} 的幂函数来表示。下面是几个坐标摄动的例子:

$$u=x^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,$$

$$u=x^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-n},$$

$$u=e^{-2x}x^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n.$$

1.3. 标准函数

在参数摄动和坐标摄动中，我们都对无量纲参数或坐标 ε 趋于某一指定值 ε_0 时(总可以调节 ε 使得 $\varepsilon_0=0$)各种函数(比如 $f(\varepsilon)$)的性态感到兴趣。将函数 $f(\varepsilon)$分类的办法之一，是根据其 $\varepsilon\to0$ 时的极限值。如果极限存在，则有三种可能性，即当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$\left.\begin{array}{l} f(\varepsilon)\to 0 \\ f(\varepsilon)\to A \\ f(\varepsilon)\to\infty \end{array}\right\}\ ,\qquad 0<A<\infty.$$

因为存在有无穷多个函数在 $\varepsilon\to0$ 时趋于零或无穷大，上述基于极限值的分类法并不是很有用的。因此，为了分得更细，我们根据其趋于零或无穷大的速率将第一类和第三类再作细分。为此将这些函数趋于零或无穷大的速率与一组标准函数的趋于零或无穷大的速率作比较。大家对这些标准函数是非常熟悉的，因而能直观地知道它们的极限性质。最简单的标准函数的例子是 ε 的各个幂函数。

1.4. 阶符号

如果 $$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=A\quad ,$$

式中$0<A<\infty$，我们就记为，当$\varepsilon\to0$时

$$f(\varepsilon)=O[g(\varepsilon)]\quad ;$$

并且称$\varepsilon\to0$时，$f(\varepsilon)$是小$g(\varepsilon)$阶；或者称$\varepsilon\to0$时，$f(\varepsilon)$是大$Og(\varepsilon)$。

如果 $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0,$$
我们就记为，当$\varepsilon \to 0$时
$$f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)],$$
并且称$\varepsilon \to 0$时，$f(\varepsilon)$是小$o\,g(\varepsilon)$.

1.5. 渐近级数

对于一个给定的级数$\Sigma_{n=0}^{\infty}(a_n / x^n)$，这里 a_n 不依赖于 x，当且仅当$|x| \to \infty$时，
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{|x|^N}\right),$$
或者等价地，当且仅当$|x| \to \infty$时，
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right),$$
我们才称它为渐近级数，并记作：当$|x| \to \infty$时
$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

1.6. 渐近序列和渐近展开式

如果当$\varepsilon \to 0$时
$$\delta_n(\varepsilon) = o[\delta_{n-1}(\varepsilon)],$$
就称函数序列 $\delta_n(\varepsilon)$是 $\varepsilon \to 0$ 时的一个渐近序列。

对于一个给定的展开式$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon)$，这里 a_n 不依赖于 ε，而 $\delta_n(\varepsilon)$是一个渐近序列，那末当且仅当 $\varepsilon \to 0$ 时
$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(\varepsilon) + o[\delta_N(\varepsilon)],$$
或者等价地，当且仅当$\varepsilon \to 0$时
$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta_n(\varepsilon) + O[\delta_N(\varepsilon)],$$
我们才称它为渐近展开式，并记作：当$\varepsilon \to 0$时
$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon).$$
显然渐近级数是渐近展开式的特例。

1.7. 收敛级数与渐近级数

将函数$f(x)$表示为x的逆幂函数的级数的前N项并加上余项$R_N(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{x^n}+R_N(x),$$

式中a_n不依赖于x。当且仅当

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \text{固定}x}}R_N(x)=0$$

时此级数才是收敛级数。当且仅当$|x|\to\infty$时

$$R_N(x)=o(|x|^{-N}),$$

此级数是$|x|\to\infty$时的渐近级数。显然，收敛级数一定是渐近级数，但渐近级数不必收敛。

1.8. 非一致有效展开式

对于多于一个变量的渐近展开式，例如$\varepsilon\to0$时

$$f(x,\ \varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\delta_n(\varepsilon),$$

当且仅当$\varepsilon\to0$时

$$f(x,\ \varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}a_n(x)\delta_n(\varepsilon)+R_N(x,\varepsilon)$$

而且对于感兴趣的区域中的所有的x值在$\varepsilon\to0$时，都有$R_N(x,\ \varepsilon)=o[\delta_N(\varepsilon)]$，这样的渐近展开式才是一致有效展开式。

习 题 解 答

1.1. 对小的ε值，试求下列函数的展开式的三项。

(a) $$\left(1-\frac{3}{8}a^2\varepsilon+\frac{51}{256}a^4\varepsilon^2\right)^{-1}$$
$$=1+\left(\frac{3}{8}a^2\varepsilon-\frac{51}{256}a^4\varepsilon^2\right)+\left(\frac{3}{8}a^2\varepsilon-\frac{51}{256}a^4\varepsilon^2\right)^2+\cdots$$
$$=1+\frac{3}{8}a^2\varepsilon-\frac{51}{256}a^4\varepsilon^2+\frac{9}{64}a^4\varepsilon^2+\cdots$$
$$=1+\frac{3}{8}a^2\varepsilon-\frac{15}{256}a^4\varepsilon^2+\cdots.$$

(b) $\cos(\sqrt{1-\varepsilon t}) = \cos\left[\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon t + \frac{\frac{1}{2}\times -\frac{1}{2}}{2!}\varepsilon^2 t^2 + \cdots\right)\right]$

$= \cos[(1 - \frac{1}{2}\varepsilon t - \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2) + \cdots]$

$= \cos 1 - \sin 1\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t - \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2\right) - \frac{1}{2!}\cos 1\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t - \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2\right)^2 + \cdots$

$= \cos 1 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon t + \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2\right)\sin 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2 \cos 1 + \cdots$

$= \cos 1 + \frac{1}{2}\varepsilon t \sin 1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^2(\sin 1 - \cos 1) + \cdots.$

(c) $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon + 2\varepsilon^2} = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon - 2\varepsilon^2\right)\right]^{1/2}$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon - 2\varepsilon^2\right) + \frac{\frac{1}{2}\times -\frac{1}{2}}{2!}\left(\frac{1}{2}\varepsilon - 2\varepsilon^2\right)^2 + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{4}\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{1}{32}\varepsilon^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{31}{32}\varepsilon^2 + \cdots.$

(d) $\sin(1 + \varepsilon - \varepsilon^2) = \sin 1 + (\varepsilon - \varepsilon^2)\cos 1 - \frac{1}{2!}(\varepsilon - \varepsilon^2)^2 \sin 1 + \cdots$

$= \sin 1 + (\varepsilon - \varepsilon^2)\cos 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 1 + \cdots$

$= \sin 1 + \varepsilon\cos 1 - \varepsilon^2(\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1) + \cdots.$

1.2. **对小的ε值，试展开下列各式并保留三项。**

(a) $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4 t} = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon^4 t\right)\right]^{1/2}$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon^4 t\right) + \frac{\frac{1}{2}\times -\frac{1}{2}}{2!}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon^4 t)^2\right) + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t - \frac{1}{16}\varepsilon^4 t - \frac{1}{32}\varepsilon^4 t^2 + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t - \frac{1}{16}\varepsilon^4 t\left(1 + \frac{1}{2}t\right) + \cdots.$

(b) $(1 + \varepsilon\cos f)^{-1} = 1 - \varepsilon\cos f + \varepsilon^2\cos^2 f + \cdots.$

(c) $(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2)^{-2}$

$= 1 - 2(\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2) + \frac{-2\times -3}{2!}(\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2)^2 + \cdots$

$$= 1 - 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(-2\omega_2 + 3\omega_1^2) + \cdots.$$

(d) $\sin(s + \varepsilon\omega_1 s + \varepsilon^2\omega_2 s)$

$$= \sin s + (\varepsilon\omega_1 s + \varepsilon^2\omega_2 s)\cos s - \frac{1}{2!}(\varepsilon\omega_1 s + \varepsilon^2\omega_2 s)^2\sin s + \cdots$$

$$= \sin s + \varepsilon\omega_1 s\cos s + \varepsilon^2 s\left(\omega_2\cos s - \frac{1}{2}\omega_1^2 s\sin s\right) + \cdots.$$

(e) $\sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) = \sin^{-1}[\varepsilon(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}]$

$$= \sin^{-1}\left[\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{2!}\varepsilon^2\right) + \cdots\right]$$

$$= \sin^{-1}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^3 + \cdots\right)$$

$$= \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^3\right) + \frac{1}{3!}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^3\right)^3 + \cdots$$

$$= \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^3 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \cdots = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{13}{24}\varepsilon^3 + \cdots.$$

(f) $\ln\frac{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}{\sqrt[3]{1+2\varepsilon}} = \ln(1+2\varepsilon-\varepsilon^2) - \frac{1}{3}\ln(1+2\varepsilon)$

$$= 2\varepsilon - \varepsilon^2 - \frac{1}{2}(2\varepsilon-\varepsilon^2)^2 + \frac{1}{3}(2\varepsilon-\varepsilon^2)^3$$

$$+ \cdots - \frac{1}{3}\left[2\varepsilon - \frac{1}{2}(2\varepsilon)^2 + \frac{1}{3}(2\varepsilon)^3 + \cdots\right] = \frac{4}{3}\varepsilon - \frac{7}{3}\varepsilon^2 + \frac{34}{9}\varepsilon^3 + \cdots.$$

1.3. 在 $h = \frac{3}{2}[1 - \sqrt{1 - 3\mu(1-\mu)}]$ 中设 $\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2$，试对小的 e 值展开此式并保留三项。

解: 利用 Taylor 级数展开，我们有

$$h(\mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2) = h(\mu_0) + h'(\mu_0)(e\mu_1 + e^2\mu_2)$$
$$+ \frac{1}{2!}h''(\mu_0)(e\mu_1 + e^2\mu_2)^2 + \cdots.$$

但是，

$$h'(\mu) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}[1 - 3\mu(1-\mu)]^{-\frac{1}{2}} \times (-3 + 6\mu)$$

$$= \frac{9}{4}(1 - 2\mu)[1 - 3\mu(1-\mu)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$h''(\mu) = -\frac{9}{2}[1 - 3\mu(1-\mu)]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\times\frac{9}{4}(1-2\mu)[1 - 3\mu(1-\mu)]^{-3/2}$$

$$\times(-3+6\mu)$$

$$=-\frac{9}{2}[1-3\mu(1-\mu)]^{-1/2}+\frac{27}{8}(1-2\mu)^2[1-3\mu(1-\mu)]^{-3/2}.$$

因此 $h=\frac{3}{2}[1-\sqrt{1-3\mu_0(1-\mu_0)}]+\frac{9}{4}(1-2\mu_0)$

$$\times[1-3\mu_0(1-\mu_0)]^{-1/2}\mu_1 e$$

$$+e^2\left\{\frac{9}{4}(1-2\mu_0)[1-3\mu_0(1-\mu_0)]^{-1/2}\mu_2\right.$$

$$-\frac{9}{4}[1-3\mu_0(1-\mu_0)]^{-1/2}\mu_1^2+\frac{27}{16}(1-2\mu_0)^2$$

$$\left.\times[1-3\mu_0(1-\mu_0)]^{-3/2}\mu_1^2\right\}+\cdots.$$

1.4. **对小的ε值，试确定下列函数的阶：**

$$\sinh(1/\varepsilon),\ \ln(1+\sin\varepsilon),\ \ln(2+\sin\varepsilon),\ e^{\ln(1-\varepsilon)}.$$

解：因为当$\varepsilon\to 0$时，

$$\sinh\frac{1}{\varepsilon}=\frac{e^{1/\varepsilon}-e^{-1/\varepsilon}}{2}\approx\frac{1}{2}e^{1/\varepsilon},$$

所以$\varepsilon\to 0$时，$\sinh\frac{1}{\varepsilon}=O(e^{1/\varepsilon})$.

因为当$\varepsilon\to 0$时，

$$\ln(1+\sin\varepsilon)\approx\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon,$$

所以$\varepsilon\to 0$时，$\ln(1+\sin\varepsilon)=O(\varepsilon)$.

因为当$\varepsilon\to 0$时，

$$\ln(2+\sin\varepsilon)\approx\ln(2+\varepsilon)\approx\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2}\varepsilon)\approx\ln 2+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

所以$\varepsilon\to 0$时，$\ln(2+\sin\varepsilon)=O(1)$.

因为当$\varepsilon\to 0$时，

$$e^{\ln(1-\varepsilon)}\approx e^{-\varepsilon}\approx 1-\varepsilon,$$

所以$\varepsilon\to 0$时，$e^{\ln(1-\varepsilon)}=O(1)$.

1.5. **试确定下列各式在$\varepsilon\to 0$时的阶：**

(a) 因为$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\approx\sqrt{\varepsilon}$，所以

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}=O(\varepsilon^{1/2}).$$

(b) $4\pi^2\varepsilon=O(\varepsilon)$.

(c) $1000\varepsilon^{1/2}=O(\varepsilon^{1/2})$.

(d) 因为$\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon$，所以

$$ln(1+\varepsilon)=O(\varepsilon).$$