测量数据处理方法

CELIANG SHUJU CHULI FANGFA

阎凤文 编著

原子能出版社

测量数据处理方法

原 子 能 出 版 社

测量数据处理方法
阎 凤 文　编著
原子能出版社出版
（北京2108信箱）
原子能出版社印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行·新华书店经售
☆
开本 787×1092　1/32　印张10.5　字数 226 千字
1990 年 6 月北京第一版　1990 年 6 月北京第一次印刷
印数 1—2800
统一书号：15175·876　定价：6.80 元
ISBN 7-5022-0021-5/O·4

前　言

当今，在科学实验和科学观测中，参数测量已成为重要的内容。正确处理测量数据不仅关系到实验研究成果的可靠性和应用价值，而且有助于克服实验工作中的盲目性，为实验条件的选择和测量设备的调试提供实践依据；正确处理测量数据有时还会导致新的现象和规律的发现。由于实验技术的迅速发展，实验数据分析与处理方法在实验研究中的作用显得更加重要并且日益趋于在线化和程序化，人们似乎可以把实验数据处理方法和实验理论一起视为实验研究工作中的“软件工程”。

写作本书的目的，在于为从事一般性参数测量的科技工作者和教学工作者提供一本较为系统而又简明扼要的有关数据处理和误差分析的参考书。本书在叙述基本概念的基础上，比较详细地给出各种数据处理方法的原理、公式、算法、应用范围和误差估计，并力求适应于编写计算机程序的需要；虽然大部分示例取自核技术和反应堆工程参数测量实践，但所述原则和方法均适合于其它参数测量领域。

本书在重点叙述误差理论、最小二乘法和数字傅里叶分析技术的同时，还用少量篇幅介绍了可用于参

数估计的直接最优化方法和近年来发展起来的数字时序分析技术，并且在第一章和第三章概括地叙述了与参数测量有关的概率论基本知识和数值计算常用方法。

由于笔者水平有限，书中错误在所难免，欢迎读者指正。

在编写本书的过程中，得到赵仁恺高级工程师的热情关心和鼓励，彭凤研究员审阅了书稿，叶长源、苏著亭、朱淑贞、张锐同志曾阅读初稿的部分章节，并提出宝贵意见，在此一并表示感谢。

编者

1988年2月

目　录

前言……………………………………………………(vii)
第一章　概率统计基本知识……………………………………(1)
§1.1　随机变量……………………………………………(1)
1.1.1　概率分布……………………………………………(2)
1.1.2　数学期望……………………………………………(4)
1.1.3　方差和标准差………………………………………(5)
1.1.4　协方差和相关系数…………………………………(7)
1.1.5　矩……………………………………………………(8)
§1.2　常见概率分布…………………………………………(8)
1.2.1　正态分布……………………………………………(8)
1.2.2　均匀分布……………………………………………(11)
1.2.3　二项分布……………………………………………(13)
1.2.4　泊松分布……………………………………………(14)
1.2.5　其它类型分布………………………………………(18)
§1.3　极限定理……………………………………………(22)
1.3.1　大数定律……………………………………………(22)
1.3.2　中心极限定理………………………………………(23)
§1.4　随机过程……………………………………………(24)
1.4.1　平稳随机过程………………………………………(26)
1.4.2　各态历经过程………………………………………(26)
§1.5　参数估计……………………………………………(27)
1.5.1　极大似然估计………………………………………(27)
1.5.2　最小二乘原理………………………………………(30)
1.5.3　参数估计优劣的评价标准…………………………(31)

§1.6 统计量……………………………………………(32)
1.6.1 χ^2 分布……………………………………………(33)
1.6.2 t 分布……………………………………………(34)
1.6.3 F 分布……………………………………………(36)
第二章 测量误差理论……………………………………………(39)
§2.1 基本概念……………………………………………(39)
2.1.1 误差公理……………………………………………(39)
2.1.2 误差来源……………………………………………(41)
2.1.3 误差的分类……………………………………………(43)
2.1.4 误差的表示方法……………………………………………(45)
2.1.5 精度……………………………………………(49)
§2.2 随机误差……………………………………………(51)
2.2.1 误差正态分布定律……………………………………………(51)
2.2.2 标准误差的概率意义……………………………………………(52)
2.2.3 标准误差的计算方法……………………………………………(54)
2.2.4 线性函数标准误差的传播……………………………………………(59)
2.2.5 非线性函数标准误差的传播……………………………………………(60)
2.2.6 相关系数在误差传播中的作用……………………………………………(62)
§2.3 系统误差……………………………………………(67)
2.3.1 系统误差的规律性……………………………………………(67)
2.3.2 系统误差的发现……………………………………………(68)
2.3.3 系统误差的消除……………………………………………(75)
2.3.4 已定系差的传播与综合……………………………………………(80)
2.3.5 未定系差的估计与综合……………………………………………(80)
§2.4 测量结果的总误差及报道……………………………………………(81)
2.4.1 测量结果的总误差……………………………………………(82)
2.4.2 测量结果的数字报道……………………………………………(84)
2.4.3 测量结果符合程度的报道……………………………………………(85)
2.4.4 测量精度高低的报道……………………………………………(88)
§2.5 异常观测数据的判别与数据光滑……………………………………………(91)

2.5.1 统计判别法……………………………………………（91）
2.5.2 物理判别法……………………………………………（94）
2.5.3 数据光滑……………………………………………（95）
§2.6 平均值的计算方法……………………………………（98）
2.6.1 等精度测量平均值的计算……………………………（98）
2.6.2 非等精度测量平均值的计算…………………………（100）
2.6.3 权数的选取原则……………………………………（102）
第三章 常用数值计算……………………………………（105）
§3.1 近似计算方法…………………………………………（105）
3.1.1 泰勒级数……………………………………………（105）
3.1.2 基本初等函数的近似计算……………………………（106）
3.1.3 数值微分……………………………………………（109）
3.1.4 数值积分……………………………………………（113）
§3.2 矩阵及其运算…………………………………………（116）
3.2.1 基本概念……………………………………………（116）
3.2.2 加减乘运算…………………………………………（118）
3.2.3 矩阵求逆……………………………………………（119）
3.2.4 矩阵微分……………………………………………（122）
§3.3 解线性方程组…………………………………………（126）
3.3.1 消去法……………………………………………（126）
3.3.2 迭代法……………………………………………（128）
3.3.3 逆矩阵法……………………………………………（129）
§3.4 应用数字计算机产生随机数…………………………（130）
3.4.1 均匀分布随机数……………………………………（131）
3.4.2 正态分布随机数……………………………………（132）
3.4.3 标准正态分布随机数………………………………（133）
§3.5 数值计算中的误差问题………………………………（133）
3.5.1 有效数字与舍入误差………………………………（134）
3.5.2 有效数位的选取原则………………………………（135）
3.5.3 计算工具的精度限值………………………………（139）

3.5.4 数据误差与算法误差……………………………… (141)
3.5.5 舍入误差可略条件……………………………… (144)
第四章 最小二乘法……………………………… (146)
§4.1 经典最小二乘法……………………………… (146)
4.1.1 代数最小二乘法……………………………… (146)
4.1.2 矩阵最小二乘法……………………………… (148)
4.1.3 拟合误差的估计方法……………………………… (150)
4.1.4 线性拟合示例……………………………… (154)
§4.2 相关测量最小二乘法……………………………… (159)
4.2.1 相关观测量的权矩阵……………………………… (159)
4.2.2 相关测量示例……………………………… (161)
§4.3 考虑自变量误差的直线拟合……………………………… (164)
4.3.1 有效方差加权法……………………………… (164)
4.3.2 算术平均法……………………………… (166)
§4.4 非线性参数拟合……………………………… (169)
4.4.1 函数变换法……………………………… (169)
4.4.2 高斯-牛顿最小二乘法……………………………… (172)
4.4.3 拟合误差的一般估计法……………………………… (174)
4.4.4 拟合误差的蒙特卡洛估计法……………………………… (175)
§4.5 加速收敛的最小二乘法……………………………… (177)
4.5.1 改进的高斯-牛顿法……………………………… (177)
4.5.2 阻尼最小二乘法……………………………… (179)
§4.6 参数初值的选取方法……………………………… (180)
4.6.1 选点法……………………………… (181)
4.6.2 逐参平均法……………………………… (181)
4.6.3 差商法……………………………… (184)
第五章 直接最优化方法……………………………… (185)
§5.1 网格搜索法……………………………… (185)
§5.2 随机搜索法……………………………… (188)
5.2.1 一般随机搜索法……………………………… (188)

5.2.2 改进随机搜索法…………………………（189）
§5.3 单参数优选法…………………………（193）
5.3.1 费波那奇法…………………………（193）
5.3.2 黄金分割法…………………………（196）
5.3.3 初始搜索区间的确定…………………………（200）
第六章 数字傅里叶分析技术…………………………（202）
§6.1 一般知识…………………………（202）
6.1.1 复数概念…………………………（202）
6.1.2 傅里叶级数…………………………（204）
6.1.3 傅里叶变换…………………………（205）
6.1.4 频谱和功率谱…………………………（207）
§6.2 傅里叶分析技术在参数测量中的应用…………………………（209）
6.2.1 扰动响应试验…………………………（210）
6.2.2 随机噪声响应试验…………………………（214）
6.2.3 数字滤波…………………………（217）
§6.3 确定周期函数的傅里叶系数…………………………（221）
§6.4 离散傅里叶变换（DFT）…………………………（229）
6.4.1 不确定周期函数的傅里叶系数…………………………（229）
6.4.2 傅里叶系数的实时在线算法…………………………（234）
§6.5 快速傅里叶变换（FFT）…………………………（238）
6.5.1 FFT的基本思想…………………………（239）
6.5.2 基-2 FFT算法…………………………（241）
6.5.3 实数据的FFT算法…………………………（252）
§6.6 傅里叶分析的误差估计…………………………（256）
6.6.1 离散有限傅里叶变换的误差…………………………（256）
6.6.2 功率谱的平滑与误差估计…………………………（260）
6.6.3 频率响应函数的平滑与误差估计…………………………（264）
第七章 数字时间序列分析技术…………………………（269）
§7.1 动态数据系统方法论…………………………（269）
7.1.1 随机微分-差分方程…………………………（269）

7.1.2 特征方程与特征根…………………………（271）
7.1.3 格林函数与动态参数…………………………（272）
7.1.4 频率响应函数和功率谱密度函数………………（274）
§7.2 自回归模型的拟合…………………………（276）
7.2.1 建模过程…………………………（276）
7.2.2 最小二乘算法（1）…………………………（277）
7.2.3 最小二乘算法（2）…………………………（278）
7.2.4 逐步递推算法…………………………（280）
§7.3 自回归滑动平均模型拟合…………………………（282）
7.3.1 建模过程…………………………（282）
7.3.2 确定模型参数初值的逆函数法…………………（287）
7.3.3 F-检验准则…………………………（290）
7.3.4 正态白噪声检验方法…………………………（291）
7.3.5 残差序列的计算方法…………………………（292）
7.3.6 过程方差的数值计算…………………………（293）
§7.4 动态数据采集与预处理…………………………（296）
§7.5 应用时序分析测定动态参数的示例………………（297）
7.5.1 高通量核反应堆瞬发中子衰减
常数的测定…………………………（297）
7.5.2 钠冷快堆冷却剂中热电偶
时间常数的测定…………………………（299）
参考文献…………………………（303）
附表I 标准正态分布置信概率…………………………（306）
附表II t分布置信概率…………………………（308）
附表III t分布临界值…………………………（312）
附表IV χ^2分布临界值…………………………（314）
附表V F分布临界值（$\alpha=0.05$）…………………………（316）
附表VI F分布临界值（$\alpha=0.01$）…………………………（320）

第一章　概率统计基本知识

概率论与数理统计是实验数据处理和误差分析的理论基础。由于参数测量数据处理的需要，本章简要介绍一下概率统计方面的基本概念和重要定理，主要包括随机变量的概率分布和数字特征、极限定理、随机过程、参数估计和统计量等内容。

§1.1　随机变量

大量测量实践证明，对某一客观现象进行多次重复观测，每次所得结果不尽相同，并且不能事先预断，具有偶然性即随机性。在概率论中，把测量结果具有随机性的现象称为随机现象，把任意一次观测得到的结果称为随机事件。若每个随机事件均可用一个单值实数表示，则这些数就是随机事件的函数，记作X，并称之为随机变量（有时直接简称为变量）。

若随机变量的取值在某一实数区间内连续分布，则称之为连续随机变量；若仅取某一区间内的若干离散数值，则称之为离散随机变量。若某一变量的取值不影响另一变量的取值，则称两变量相互独立。

定义随机变量全部可能取值的集合为总体或母体；部分取值的集合为随机样本，简称样本或子样，而称其中任意一个取值为样本值（在实验数据处理场合，常称样本值为观测

值），称样本值的个数为样本容量。实际上，人们不可能得到随机变量的总体，只能通过测量得到其中的若干样本值。应用概率统计理论，可以根据有限样本的概率统计特性推断出总体的概率统计特性，进而得到所需物理量或物理参数的若干特征值，例如平均值、标准误差和相关系数等。

随机变量的概率统计特性包括概率密度函数、概率分布函数、数学期望、方差、协方差和矩等，下面分别作扼要的介绍。

1.1.1 概率分布

在相同条件下，对某物理量或参数X进行N次重复测量，若某一测量结果为x的情况出现n次，当$N\to\infty$时，则称$f=n/N$为取值x出现的概率。

设连续变量X的取值为x的概率为$f(x)$，则定义

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x}f(\zeta)d\zeta \tag{1.1.1}$$

为变量X的概率密度函数，简称密度，且有

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1 \tag{1.1.2}$$

如果从$-\infty$到x对$p(x)$进行积分，则

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(\eta)d\eta \tag{1.1.3}$$

为概率分布函数或累积密度，简称分布函数，且有

$$p(x)=\frac{dP(x)}{dx} \tag{1.1.4}$$

对于离散变量 X_k，取值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 出现的概率依次为 p_1，p_2，…，p_N，于是称

$$p(x_k) = p_k \qquad k = 1, 2, \cdots, N \qquad (1.1.5)$$

为离散变量 X_k 的密度，且有

$$\sum_{k=1}^{N} p(x_k) = \sum_{k=1}^{N} p_k = 1 \qquad (1.1.6)$$

同样有离散变量的分布函数

$$P(x_k) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i \qquad (1.1.7)$$

分布函数 $P(x)$ 具有如下性质：

性质 1 $\quad 0 \leqslant P(x) \leqslant 1 \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.1.8)$

性质 2 $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = 0 \qquad (1.1.9)$

性质 3 $\quad \lim\limits_{x \to \infty} P(x) = 1 \qquad (1.1.10)$

随机变量的密度和分布函数的图象可见图1.1和图1.2。

关于多维随机变量的概率分布特性可查阅概率论专著[1]，本书从略。

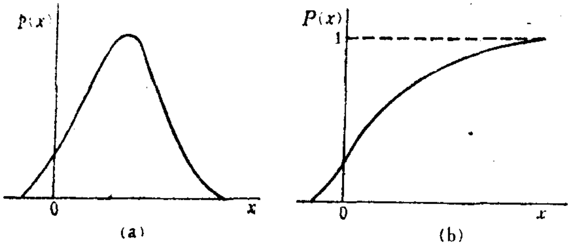

图1.1 连续变量的密度（a）和分布函数（b）

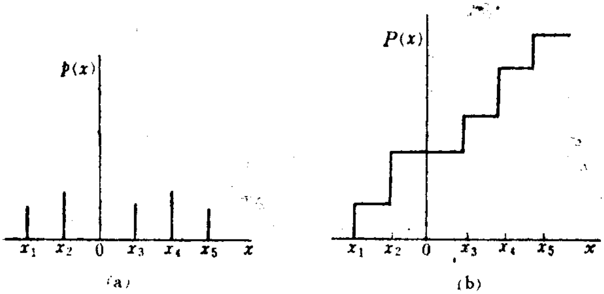

图1.2 离散变量的密度（a）和分布函数（b）

1.1.2 数学期望

在实际问题中，人们总是希望能找出一个数值可以代表随机变量X所有取值的平均结果。因此，设随机变量X的密度为p（x），则定义

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \qquad (1.1.11)$$

为变量X的数学期望，简称为期望或均值，E为期望算符。对于离散变量情况，若取值x_k（$k=1，2，\cdots$）相应的概率为p_k，则有期望

$$E(X_k)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k \qquad (1.1.12)$$

数学期望具有如下性质：

性质1 常数的期望为其本身，即

$$E(c)=c，c\text{为常数} \qquad (1.1.13)$$

性质 2　随机变量与常数乘积的期望等于随机变量的期望乘以常数，即

$$E(kX)=kE(X)\text{，}k\text{为常数} \tag{1.1.14}$$

性质 3　随机变量与常数之和的期望等于随机变量的期望与常数的和，即

$$E(X+b)=E(X)+b\text{，}b\text{为常数} \tag{1.1.15}$$

性质 4　有限个独立随机变量和的期望等于各个随机变量期望的和，即

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=\sum_{i=1}^{N} E(X_i)\text{，}N\text{为有限正整数} \tag{1.1.16}$$

性质 5　有限个独立随机变量积的期望等于各个随机变量期望的积，即

$$E(\prod_{i=1}^{N} X_i)=\prod_{i=1}^{N} E(X_i)\text{，}N\text{为有限正整数} \tag{1.1.17}$$

性质 6　设随机变量Y是另一变量X的函数，记作

$$Y=F(X)$$

而X的密度为$p(x)$，且$E(X)$存在，则

$$E(Y)=E[F(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)p(x)dx \tag{1.1.18}$$

1.1.3　方差和标准差

我们不但要知道随机变量的期望值，还要知道随机变量的取值在期望值周围的起伏情况，于是引出了随机变量的另一重要数字特征，即方差。

设随机变量X的密度为$p(x)$，则定义

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 p(x)dx \qquad (1.1.19)$$

为变量X的方差，D为方差算符，且有$D(X)\geqslant 0$。

对于离散变量X_k，若其密度为p_k，则方差为

$$D(X_k)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X_k)]^2 p_k \qquad (1.1.20)$$

可见，方差就是$[X-E(X)]^2$的数学期望，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \qquad (1.1.21)$$

由此可以推得方差和期望之间的关系：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \qquad (1.1.22)$$

此式是估计随机变量方差的一种简便方法。

方差具有如下性质：

性质 1 常数的方差等于零，即

$$D(c)=0, c\text{为常数} \qquad (1.1.23)$$

性质 2 随机变量与常数乘积的方差等于变量的方差乘以常数的平方，即

$$D(kX)=k^2D(X),\ k\text{为常数} \qquad (1.1.24)$$

性质 3 变量与常数之和的方差等于变量的方差，即

$$D(X+b)=D(X),\ b\text{为常数} \qquad (1.1.25)$$

性质 4 有限个相互独立变量之和的方差等于各个变量方差之和，即

$$D\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=\sum_{i=1}^{N}D(X_i),\ N\text{为正整数} \qquad (1.1.26)$$

定义方差的正平方根为标准差，记为