13.15/13

科學圖書大庫

數學演習

譯者 吳英格　熊兆寰　連明嬌
校閱 趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學演習

譯者 吳英格 熊兆寰 連明嬌
校閱 趙少鐵

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本及實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此　標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良發行系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

校 閱 小 言

58 年暑期接徐氏基金會來函，邀本人譯書及校閱譯稿，過去對於徐氏基金會僅有所聞，後蒙基金會主持人在臺北邀約會談，始悉基金會對於發展國家科學抱負遠大，尤其輔導一般失學青年能在工作之餘自修科學新知甚爲欽佩。

本人於大學執教四十餘年，僅從事正規化教育，對失學青年之輔助甚少涉及因之乃欣然同意接受此一工作，並邀學子黃德華、須忠中、柳晉君共同效力，期望能藉徐氏基金會之力對發展國家科學及輔導失學青年求知之心，盡一份心力。

這是一本關於高等應用數學方面的參考書，本書作者爲法國巴黎高等航空學院的權威教授，積數十年之教學經驗，收集許多有關物理學及工程學上之應用數學問題，並將問題詳予解答；適於應用數學、物理學及工程學方面有興趣的讀者。本書內容豐富，並提供甚多練習與解法，實屬罕有之優良讀物。

序

當我決定出版這本解題書時，不免有些遲疑。原因是，雖然主要是給學生提供精選的練習題，但是把解法的細節一一提供是否便適合學生呢，我仍存疑問。說的更明確些，也許有人覺得經過了精選的一小部分特種解法應該就可以形成數學上探討的正式部分，而且只要這樣做便足夠了。然而，經過若干年的經驗，我感覺到在練習題中列有各種不同性質的問題，再予以詳細的解答，可能要比較有意義，同時我也覺得學生有必要去知道如何解答問題，這跟他想去推理有關問題並求得其解是一樣的情形。

這本問題集是為學應用數學，物理學及工程的學生而編寫的。編著的精神幾乎配合着數學上應用技巧方面的課程裡比較深奧的部分。然而，所選的題材卻是高水準（如物理學上的數學方法）與低水準（如積分學）兼顧。

這些練習題千萬不要當作課程來講。為幫助讀者瞭解起見，各章前都列有簡要的導引，其中有主要公式的複習，也有預備知識的簡要描述，當然這些預備知識讀者大部分都聽過或看過的了。

雖然有很多的書沒有辦法包括所有的問題，但是名為應用數學，高等微積分，矩陣與張量等等一般專為大學程度工程師及物理學家而編寫的諸書中都可以找到跟本書有關的資料。在這些教科書中，有最適合讀者看的，列舉如下：

R. Courant 與 D. Hilbert，"數學物理方法"，第一册。

此書常用做高等應用數學方面的藍本，為一基本的參考書。為能解答本書的習題，讀者不用熟讀此書之每一細節，但熟悉某些章卻是不可缺乏的。

R. V. Churchill，"複變數及應用"，

R. Courant 與 F. John，"微積分與分析導論"

J. Irving 與 N. Mullineux "物理與工程上的數學"

I. S. Sokolnikoff 與 R. M. Redheffer "物理與近代工程的數學"

在這本問題集裡所列出的解法，不容易一一說出其來源。有些是編者自己作的，有些是在一般的數學書上都可以看到，有些是具有補充講課需要的性質。除了一些例外，大部分的問題都可以在作者所著的"數學教本"（Cours de Mathématique）中找到。一般說來，練習題的難度是很中庸的，

較難的會在問題前附上星號。

本書所論題材共分六章，即簡易積分，均勻收斂及範數化空間（normed space），線積分與重積分，解析函數，常微分方程式及偏微分方程式，這種順序是有其道理的。在各章裡，讀者應能利用前章練習題中所包含的題材。雖然第二章開頭是研究一致收斂，但是以下諸章的許多練習題組成了有關級數與積分的連續問題的專門訓練，跟在積分號下的微分法與積分法專門訓練。同樣的，殘數定理（residue theorem）爲第四章末的題材，在第五章與第六章的許多練習題中用到。第一章的練習題中不包含有關廣義積分的收斂方面的問題。這類習題永遠組成了第二章中處理積分均勻收斂的各種習題的初始問題（initial problem）。正交函數首先在第二章出現，然後在第五章中因跟第二階線性微分方程式的問題有關連，會再度出現。本書很少談及變分法的問題，但將在第五章末出現，只是有時代數的意義要重於泛函的性質。

此處不想列出有關或然率論（或稱機遇論）的練習題。這項題材需要特別的預備知識，然而由於或然率論跟代數與積分學上某些問題間的關係相當的密切，因此，若干練習題非用或然率論上的語言來描述不可。對於或然率論不太熟的讀者來說，習題前的導引將會讓您把握到應有的知識及觀念。

目　次

第六章 偏微分方程……449

第一章　數列，級數，及定積分

本章包含一些有關分析之基本觀念的練習。讀者在看到這些練習前，並不需要作一番廣泛的準備。讀者們只需知道一般課程及一些特殊數學課程中各種定義，並了解在問題中牽涉的對象所具有的一些基本性質，就足夠了。

下面為我們常會遇到的：

通常所謂的距離，二個函數之間的距離，二個數列之間的距離。

向量空間的範數（ norm ），一個函數的範數。

連續及單調（monotonic）函數的古典（ classical ）性質。

數值數列及級數的收斂，絕對收斂，交錯級數。

定積分，一個變數的可積分函數，第一及第二均值定理，希瓦（Schwarz ）不等式。

在此處所稱的積分專指瑞曼（ Riemann ）積分而言。如果我們用利氏(Lebesgue) 積分，那麼徐德（Holder）不等式方面的練習，將有十分廣泛的結果。在這裡，我們只處理定積分的純粹代數性質，故僅利用到一些初等的公理：積分式（ integral) 可視為在積分區間的一函數，為線性泛函（ linear functional ）及可加的（ additive)；可積分函數形成一個代數（ algebra ）；一個正函數的積分式是正的；一個函數絕對值的積分式至少與此函數積分式之絕對值一樣大；如果 f 不為負而其積分為零，則 f 殆到處（ almost everywhere）為零。根據這些原則，則不管用何種積分都是無關緊要的。

所有的定積分都是定義域為一緊湊（compact）區間的有界函數。本章不包含不定（即廣義）積分的練習，不論這不定積分是在一無限區間積分或為無界（ unbounded ）函數的積分。不定積分與一致收斂內的練習有關，將在第 2 章出現。

除了以上提出的問題，我們常遇到的問題是去證明一個積分的收斂。要孤立這類的題目是不可能的，所以我們將這些放在第 2 章。

在第 2 章內也有關於波韋（ Bolzano- weierstrass ）定理的一些練習這些與一致收斂有密切的關聯。

1.有關二函數之間及二數列之間的距離之例

下面我們給予一個二函數之間的距離，但此距離不為範數（norm）之例。

【問題】

A・假設 a 與 b 為兩正數，求證

$$\frac{a+b}{1+a+b}\leq\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\cdot$$

B・若 $f(x)$ 為在區間 $\alpha\leq x\leq\beta$ 之一可積分函數，且令

$$L(f)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}dx\cdot$$

求證 $L(f+g)\leq L(f)+L(g)$

我們是否能藉著泛函（functional）L 之幫助，來定義兩函數之間的距離？

C・若 u 與 v 為任二實數數列，它們的值分別為 $u_1\cdots\cdots u_n\cdots\cdots$ 與 $v_1\cdots\cdots v_n\cdots\cdots$ 令 a_n 為一正數收斂數列的一般項。且令

$$L(u)=\sum_n a_n\frac{|u_n|}{1+|u_n|},\ L(v)=\sum_n a_n\frac{|v_n|}{1+|v_n|}\cdot$$

一般項（general term）為 u_n+v_n 的數列以 $u+v$ 表示。
求證

$$L(u+v)\leq L(u)+L(v)\cdot$$

【解】

A・

既然 a 與 b 為正數，則不等式

$$\frac{a+b}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \tag{1}$$

由下式明顯的不等式馬上可得知：

$$\frac{a}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a}, \quad \frac{b}{1+a+b} \le \frac{b}{1+b}.$$

僅當 a 或 b 爲零時，等式成立。

B.

既然 f 爲一在區間 $[\alpha, \beta]$ 之可積分函數，泛函 L 將 f 映至正數

$$L(f) = \int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} dx \quad (\alpha < \beta)$$

我們將證明泛函 L 滿足三角不等式

$$L(f+g) \le L(f) + L(g). \tag{2}$$

首先，我們有

$$|f+g| \le |f| + |g|.$$

既然函數 $\frac{x}{1+x}$ 爲一增函數，又因不等式(1)，我們可得

$$\frac{|f+g|}{1+|f+g|} \le \frac{|f|+|g|}{1+|f|+|g|} \le \frac{|f|}{1+|f|} + \frac{|g|}{1+|g|}.$$

由此可得不等式(2)。

現在我們再回憶一下關於二函數之距離的定義：

兩函數 f 與 g 之間的距離 $l(f, g)$ 爲一實數且滿足下列諸公設：

(a) $l(f, g) > 0$，當 $f \neq g$，

(b) $l(f, f) = 0$，

(c) $l(f, g) = l(g, f)$，

(d) $l(f, g) \le l(f, h) + l(h, g)$

此處 f, g, h 爲任意函數。

我們若同意當 $L(f-g) = 0$ 時，認爲函數 f 與 g 相等，那麼我們可利

用泛函 L 定義兩函數 f 與 g 之距離。

簡單地，令

$$l(f,g)=L(f-g)\cdot$$

這定義對於定義域在區間 $[\alpha,\beta]$ 之可積分函數是成立的。函數 $L(f)$ 可以用來定義兩函數之間的距離，但是它在一個由定義域爲區間 $[\alpha,\beta]$ 的可積分函數所形成的向量空間中，並非爲一範數。我們從實函數所形成的向量空間中，可看出其理由。如果我們以 m 表一實數，則 $L(mf)=|m|L(f)$ 並不成立。

C.

我們已知

$$\frac{|u_n+v_n|}{1+|u_n+v_n|}\leq\frac{|u_n|}{1+|u_n|}+\frac{|v_n|}{1+|v_n|}$$

既然 $\dfrac{|u_n|}{1+|u_n|}<1$，故級數 $\Sigma\dfrac{a_n|u_n|}{1+|u_n|}$ 收斂。

如果將上列不等式兩邊乘以 a_n，且將其 n 項加起來，則得

$$L(u+v)\leq L(u)+L(v),$$

同時當

$$L(u)=\Sigma a_n\frac{|u_n|}{1+|u_n|}\text{ 時，上式亦成立。}$$

函數 $L(u-v)$ 可看成二級數 u 及 v 之距離。因爲除了對於每一 n，當 $u_n=v_n$ 時 L 爲零外，其他都爲正。u 與 v 在 L 中是對稱的，並且滿足三角不等式。非常有趣的，不論這無窮數列是收斂或發散，這距離的定義對於這些數列都是成立的。

2. 連續函數的極值

【問題】

A.

若$f(x)$爲一連續函數，且在閉區間$[a,b]$，$a<b$，中之任一點均爲正，則$f(x)$在x_0點有一極大值（maximum value）M，此處$a\leq x_0\leq b$。求證

$$M=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right]^{1/n}$$

B.

求證，若$f(x)$嚴格（strictly）爲正的，則$f(x)$的極小值（minimum）等於

$$\lim_{n\to-\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right]^{1/n}.$$

【解】

A.

由假設，函數f爲正且在閉區間$[a,b]$中連續。故至少在$[a,b]$中有一點x_0，$f(x_0)$爲極大值M首先我們假設x_0與a，b都不同。對任一$\epsilon>0$，存在一數α比x_0-a與$b-x_0$小，並能使得當$|x-x_0|<\alpha$時，$M-\epsilon\leq f(x)\leq M$成立。

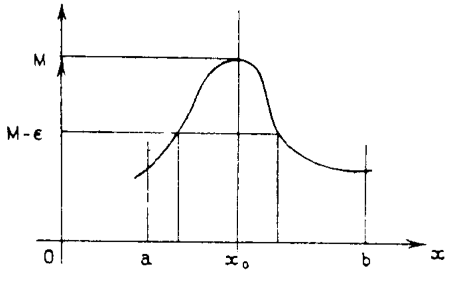

圖 1。

若以E表示兩區間$(a,x_0-\alpha)$與$(x_0+\alpha,b)$之聯集，則

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx=\frac{1}{b-a}\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha}[f(x)]^n dx+\frac{1}{b-a}\int_E[f(x)]^n dx.$$

於是

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx \geq \frac{1}{b-a} 2\alpha (M-\epsilon)^n \tag{1}$$

另一方面，由不等式$f(x) \leq M$，可得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx \leq M^n ,$$

所以

$$\left(\frac{2\alpha}{b-a}\right)^{1/n} (M-\epsilon) \leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx\right]^{1/n} \leq M \cdot \tag{2}$$

當 n 趨近於無限大時，因子 $[2\alpha/b-a]^{1/n}$ 趨近於 1 。所以存在一數 N_ϵ ，使得當 $n > N_\epsilon$ 時，

$$M-2\epsilon \leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx\right]^{1/n} \leq M \cdot$$

成立。

此不等式相當於

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx\right]^{1/n} = M \cdot \tag{3}$$

附註：

在上述中，我們選 α 使得它足夠地小，而能將區間$(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$包含於區間 (a, b) 中。如果前面的 x_0爲 a 點，我們只需將$(a, x_0+\alpha)$代替$(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$即可。

B.

我們利用不等式(3)來證明

$$\lim_{n\to-\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx\right]^{1/n} = \min f(x) \cdot \tag{4}$$

今若令 $n'=-n$，則

$$\lim_{n\to-\infty}\left[\frac{1}{b-a}\right]\int_a^b [f(x)]^n dx\,]^{1/n} = \lim_{n'\to+\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{[f(x)]^{n'}} dx\right]^{-1/n'}$$